Matrices et endomorphismes, systèmes linéaires, déterminants

1 Matrices et endomorphismes

Exercice 1:

Dans $\mathbb{R}^3$, on se donne deux familles de vecteurs

$$\mathcal{B}_1 = ((1, 2, 1), (2, 3, 3), (3, 7, 1)), \quad \mathcal{B}_2 = ((3, 1, 4), (5, 3, 2), (1, -1, 7)).$$

1. Montrer que ces deux familles forment des bases de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$.
3. On considère f l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (2x - y, x - z, y)$. Donner la matrice M_1 de f dans la base $\mathcal{B}_1$ et la matrice M_2 de f dans la base $\mathcal{B}_2$.
4. Quelle est la relation entre P , M_1 et M_2 ?

Exercice 2:

On considère l'espace $\mathbb{R}_2[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. Soit

$$P = X^2 - 4X + 4$$

un polynôme de degré 2.

1. Donner la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. (a) Soit $U_0 = 1$, $U_1 = X - 1$, $U_2 = X^2 - 2X + 1$. Montrer que (U_0, U_1, U_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
(b) Calculer les coordonnées de P dans la base (U_0, U_1, U_2) .
3. (a) Soit $V_0 = X^2$, $V_1 = X^2 + 2X + 1$, $V_2 = X^2 - 2X + 1$. Montrer que (V_0, V_1, V_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
(b) Calculer les coordonnées de P dans la base (V_0, V_1, V_2) .
4. (a) Soit $W_0 = 1$, $W_1 = X - 2$, $W_2 = (X - 2)^2$. Montrer que (W_0, W_1, W_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
(b) Calculer les coordonnées de P dans la base (W_0, W_1, W_2) .

Exercice 3:

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n . Soit u définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $u(P) = P + P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Exprimer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que u est inversible.

Exercice 4:

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (0, x, y)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice M de f dans la base canonique.
3. Calculer M^n pour tout $n \geq 0$.
4. En déduire f^n pour tout $n \geq 0$. (Rappel : $f^n = f \circ \dots \circ f$.)
5. Mêmes questions pour g définie par $g(x, y, z) = (y, x, z)$.
6. Mêmes questions pour h définie par $h(x, y, z) = (-x, 2y, 0)$.

Exercice 5:

On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs suivants $u = (1, 1)$, $v = (-1, 2)$.

1. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. On considère l'application ϕ qui à un vecteur x de $\mathbb{R}^2$ associe ses coordonnées dans la base (u, v) . Montrer que ϕ est linéaire et donner sa matrice dans la base canonique.
3. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur u parallèlement à v .
4. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à u parallèlement à v .

Exercice 6:

Dans chaque cas, déterminer si les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ F et G sont supplémentaires :

1. $F = \text{Vect}\{(1, 1, 0)\}$ et $G = \text{Vect}\{(0, 0, 1)\}$
2. $F = \text{Vect}\{(1, 0, 0)\}$ et $G = \text{Vect}\{(0, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$
3. $F = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (0, 1, -2)\}$ et $G = \text{Vect}\{(0, 0, 1)\}$
4. $F = \text{Vect}\{(1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ et $G = \text{Vect}\{(0, 0, 1), (1, 2, 1)\}$

Exercice 7:

On se place dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $P = \{(x, y, z) / x + y + 2z = 0\}$ et $Q = \text{Vect}\{(1, 2, 1)\}$ sont deux espaces supplémentaires. Donner la dimension de P et Q .
2. Donner la matrice dans la base canonique de la projection sur P , parallèlement à Q .
3. En déduire la matrice dans la base canonique de la composée de l'homothétie de rapport 5 et de la projection sur P , parallèlement à Q .
4. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie par rapport à Q , parallèlement à P .

Exercice 8:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (2x - y, y - x)$.

Que vaut $f^3 + f^2 + f$?

Exercice 9:

Soit M la matrice carrée de taille $n + 1$ dont le coefficient d'indices (i, j) est donné par

$$m_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{si } 1 \leq i \leq j \leq n + 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. En considérant M comme la matrice dans un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base canonique, montrer que M est inversible et déterminer son inverse.

2. Soit deux suites réelles (a_n) et (b_n) liées par les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} b_p.$$

Exprimer pour tout n , b_n en fonction de a_p , $0 \leq p \leq n$.

Indication : on pourra introduire les vecteurs

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad B_n = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

2 Déterminants

Exercice 10:

Calculer le déterminant des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 23 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ -i & 1 & 2-3i \\ 1 & -1 & 1+i \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Exercice 11:

Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses :

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, ab \neq 0 \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Que remarquez-vous à propos de D^{-1} ?

Exercice 12:

Les vecteurs a, b, c de $\mathbb{R}^3$ définis par $a = (1, 0, -1)$, $b = (2, 1, 3)$, $c = (1, -1, 0)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 13:

Calculer le déterminant de la matrice suivante :

$$B_n = \begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

Indication : on pourra poser, pour $n \geq 2$, $u_n = \det(B_n) - \det(B_{n-1})$ et établir une relation simple entre u_n et u_{n+1} .

Exercice 14:

On considère une matrice N telle que $N_{i,j} = 0$ pour $j < n - i$ et $N_{i,n-i} = a_i$.

Calculer le déterminant de N .

Indication : on pourra utiliser des opérations sur les colonnes de N .

3 Systèmes linéaires**Exercice 15:**

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{cases} x - 3y = 3 \\ \frac{1}{2}x + 2y = \frac{1}{5} \end{cases} & b) \begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 2x - 2y + z = 1 \end{cases} & c) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases} \\
 d) \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + y = 1 \\ x + 2y = -1 \end{cases} & e) \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ x - 4y + 7z = 3 \end{cases} & f) \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -2x + y + z = 2 \\ -x - y + 2z = 3 \end{cases} \\
 g) \begin{cases} 5x + 3y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \\ 3x + 3y + z = 0 \end{cases} & h) \begin{cases} x - 3y + z = 1 \\ 2x + y - z = -1 \\ x + 11y - 5z = -5 \end{cases} & i) \begin{cases} -2x + y = -4 + i \\ 2x + iz = 2 - i \\ x - y - iz = 2 \end{cases} \\
 j) \begin{cases} x + iy + 2z = 0 \\ ix + 3z = 0 \end{cases} & &
 \end{array}$$

Exercice 16:

Résoudre et discuter selon le paramètre k les systèmes linéaires suivants

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 3x - 4y = k \end{cases} & b) \begin{cases} x - ky + z = k \\ -x + ky + z = 1 \\ x + ky - z = 1 \end{cases} \\
 c) \begin{cases} x - 2z = -4 \\ -x + y + (k + 4)z = 10 \\ x - ky - 5z = -10 \end{cases} & d) \begin{cases} x + ky + z = 1 \\ kx + y + (k - 1)z = k \\ x + y + z = k + 1 \end{cases}
 \end{array}$$

Exercice 17:

Soit E_j^i la matrice de taille (n, n) telle que toutes ses composantes sont nulles sauf celle en (i, j) qui vaut 1

1. Calculer pour toute matrice $M = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ les produits matriciels $E_j^i M$ et $M E_j^i$.
2. On considère un système linéaire $\mathcal{S}$ à n lignes et n colonnes, de matrice M .
 - (a) Montrer que si l'on effectue l'opération $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ sur le système $\mathcal{S}$ et qu'on obtient le système $\mathcal{S}'$ de matrice M' , la matrice M' s'obtient par

$$M' = T_{ij}(\lambda)M$$

où l'on explicitera la matrice $T_{ij}(\lambda)$.

- (b) Montrer que chaque étape du pivot de Gauss, lorsque le pivot se trouve sur la ligne la plus haute, se ramène à la multiplication de M par une matrice $T_{ij}(\lambda)$ avec $i > j$. À quelle classe bien connue appartiennent toutes ces matrices ?
- (c) En déduire que si l'algorithme du pivot de Gauss aboutit sans qu'on ait jamais échangé de ligne ou de colonne, il existe une matrice L triangulaire inférieure et une matrice U triangulaire supérieure telle que

$$M = LU$$

Montrer que L est dans ce cas inversible avec uniquement des 1 sur sa diagonale. En conclure que la résolution du système $\mathcal{S}$ peut se ramener à la résolution de deux systèmes triangulaires successifs.

3. Trouvez la décomposition LU de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & 5 \\ 2 & -3 & 30 \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{2} & -9 \end{pmatrix}$$

4. Trouvez la décomposition LU de la matrice

$$N = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ -4 & 1 & -12 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

5. En déduire la solution x de $Nx = b$ avec $b = (1, 5 \quad 4 \quad -14 \quad -6, 5)^t$.

Notez que la résolution d'un système n lignes, n colonnes par la méthode du pivot de Gauss nécessite $\sim 2n^3/3$ opérations arithmétiques tandis que la résolution d'un système triangulaire par substitution ne nécessite que $\sim n^2$ opérations arithmétiques. C'est pourquoi lors de la résolution de systèmes de grandes tailles pour plusieurs second membres il est intéressant de décomposer la matrice M en deux matrices triangulaires puisqu'on a $2n^2 \ll 2/3n^3$ lorsque n est grand.

Exercice 18:

Soit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soient

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer Mx_1 , Mx_2 et Mx_3 . Quel lien entre Mx_j et x_j remarquez-vous ?

2. Donnez sans calcul la solution du système linéaire $Mx = b$ lorsque b est l'un des x_j .
3. Montrez que $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. En déduire, toujours sans calcul, la solution du système lorsque b est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. *Indication : on pourra écrire b sous la forme $b = \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.*