TD2 : Valeurs propres, vecteurs propres

Exercice 1:

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$ en fonction du paramètre λ .
2. En déduire les valeurs propres de A et les sous-espaces propres associés.

Exercice 2:

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = (x, -y, -z)$.

1. Que représente f géométriquement ?
2. Donner les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
3. Interpréter géométriquement.

Exercice 3:

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit

$$f_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3 \quad \text{et} \quad f_3 = e_1 - e_3.$$

1. Vérifier que f_1, f_2, f_3 constituent une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit F l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Vérifier que f_1, f_2, f_3 sont des vecteurs propres de F associés à des valeurs propres que l'on précisera. Déterminer la matrice B de F dans la base (f_1, f_2, f_3) .
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice B^n .
5. En déduire la matrice A^n .

Exercice 4: 1. Soit la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Quelles sont les valeurs propres de M ? Donner les sous-espaces propres associés. Montrer que $\mathbb{R}^3$ est somme directe des sous-espaces propres de M .

2. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. Quelles sont les valeurs propres de M ? Donner les sous-espaces propres associés. Montrer que $\mathbb{R}^n$ est somme directe des sous-espaces propres de M .

Exercice 5:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 8 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice $A - \lambda I_3$.
2. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'endomorphisme $f - \lambda Id$ est-il inversible ?
3. Trouver une base de $\text{Ker}(f - \text{id})$ et une base de $\text{Ker}(f + \text{id})$. Quelles sont les dimensions de ces sous-espaces ? Montrer que ce sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.
4. Ecrire la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition

$$\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(f - \text{id}) \oplus \text{Ker}(f + \text{id}).$$

5. Interpréter géométriquement.
6. On considère le polynôme $P(X) = (X - 1)(X + 1)$. Calculer $P(f)$. Que remarquez vous ?

Exercice 6:

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On définit le polynôme $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Calculer $P(A)$.

Exercice 7:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f .
2. Donner les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f .
4. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 8:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique de f .
2. Calculer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.
3. Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f ?
4. Comparer avec l'exercice précédent.

Exercice 9:

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Existe-t-il une base dans laquelle la matrice de f est diagonale ?

Exercice 10:

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3. On considère sur E l'application $f : P \mapsto 2P + 3P' + P''$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E
2. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de E .
3. Donner les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.

Exercice 11: 1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres deux à deux distinctes d'un endomorphisme f sur un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs propres de associés (x_i vecteur propre associé à λ_i).

Soient $\mu_1, \dots, \mu_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^p \mu_i x_i = 0$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{i=1}^p \lambda_i^n \mu_i x_i = 0$.

2. En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $\sum_{i=1}^p P(\lambda_i) \mu_i x_i = 0$.
3. Montrer qu'il existe pour tout $1 \leq i \leq p$ un polynôme P_i tel que $P_i(\lambda_i) \neq 0$ et tel que $P_i(\lambda_j) = 0$ pour $1 \leq j \leq p$ avec $j \neq i$ (on explicitera un tel polynôme).
4. En déduire que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
5. Montrer que les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_p}$ sont en somme directe.

Exercice 12:

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Pour $M \in M_2(\mathbb{R})$, on définit $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $M_2(\mathbb{R})$.
2. Calculer les valeurs propres et sous-espaces propres de f .

Exercice 13:

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le polynôme caractéristique χ_A de A
2. Calculer $\chi_A(A)$. Que remarquez vous ?

Exercice 14: 1. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Résoudre le système $MX = \lambda X$ en discutant en fonction du paramètre λ .

2. En déduire que les valeurs propres de M sont les racines d'un polynôme P que l'on explicitera.
3. Montrer que les sous-espaces propres sont tous de dimension 1.
4. Mêmes questions dans le cas général où $M \in M_n(\mathbb{R})$ est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Exercice 15:

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire supérieure. On notera $(m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ ses coefficients. (On a donc $m_{i,j} = 0$ pour $i > j$).

1. Calculer le polynôme caractéristique de M .
2. Quelles sont les valeurs propres de M ?

Exercice 16:

Soient E un espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit l'application Ad_u qui à $v \in \mathcal{L}(E)$ associe $u \circ v - v \circ u$.

1. Montrer que Ad_u est un endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ (c'est à dire $Ad_u \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(E))$).
2. Soient λ, μ des valeurs propres de u . Montrer que $\lambda - \mu$ est une valeur propre de Ad_u .