

Théorie ergodique et billards polygonaux

Vincent Guenez

Frédéric Palesi

Rapport de stage

Stage effectué en Juin/Juillet 2003

A l'Institut de Mathématiques de Luminy (Marseille)

Sous la direction de Pascal Hubert

Introduction

Considérons une table de billard polygonale (sans trou). Et tapons dans une boule (assimilée à un point matériel). En l'absence de force de frottement, que peut-on dire de sa trajectoire ? Est-elle fermée ? Est-elle dense ? Peut-on avoir différents comportements, selon la forme de la table, ou la direction initiale de la boule ? Nous allons traiter ces questions, dans le cas des billards rationnels (c'est-à-dire dont les angles sont des multiples rationnels de π), après avoir défini le formalisme nécessaire, lié à la théorie ergodique. Nous concentrerons alors notre attention sur un exemple particulier, l'exemple de Veech, avant de finir avec quelques résultats récents, et la théorie dont ils découlent. La majeure partie de ce travail (exceptée la partie I) se base sur [MT], qui est une introduction aux travaux récents effectués en théorie du billard polygonal.

Avertissement : Sauf mention contraire, le terme "mesure" signifiera "mesure de probabilité" tout au long de ce rapport.

I - Théorie ergodique élémentaire

1. Définitions

Commençons par donner les définitions de base de la théorie ergodique. (Nous renvoyons à [F], ou [W] pour plus de détails)

Définition I.1.1 : Un système dynamique mesuré est la donnée de (X, \mathcal{A}, μ, T) où :

- \mathcal{A} est une σ -algèbre sur X .
- μ est une mesure définie sur \mathcal{A} .
- $T : X \rightarrow X$ est \mathcal{A} -mesurable, et préserve μ , i.e pour tout $A \in \mathcal{A}$, $T^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ et $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$.

Lorsque X est un espace topologique, on notera $(X, \mu, T) = (X, \mathcal{Bor}(X), \mu, T)$.

Le but de la théorie ergodique est alors d'étudier le comportement de T^n , ou plus précisément, de $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$, où $x \in X$.

Définition I.1.2 : Le système dynamique (X, μ, T) (ou plus généralement (X, \mathcal{A}, μ, T)) est *ergodique* si tout $A \in \mathcal{Bor}(X)$ (ou plus généralement $A \in \mathcal{A}$) T -invariant (i.e qui vérifie $T^{-1}A = A$) est de mesure 0 ou 1.

Ceci traduit le fait qu'on ne peut pas partitionner X en 2 ensembles de mesures strictement positives sur lesquels T agirait séparément.

Donnons maintenant quelques définitions relatives aux systèmes dynamiques topologiques :

Définition I.1.3 : T est *minimal* si $\forall x \in X$, $\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X .

Lorsque la transformation est minimale, l'orbite de tout point (l'ensemble des $T^n x$, $n \in \mathbb{N}$) "visite" donc l'intégralité de X , au sens où elle rencontre tout ouvert de X .

Définition I.1.4 : Soit (X, \mathcal{A}) un ensemble muni d'une σ -algèbre, et $T : X \rightarrow X$ une application \mathcal{A} -mesurable. (X, \mathcal{A}, T) sera dit *uniquement ergodique* s'il existe une *unique* mesure μ préservée par T .

Remarque : Lorsque X est un espace topologique, on notera (X, T) à la place de $(X, \mathcal{Bor}(X), T)$.

On peut se demander pourquoi le terme "ergodicité" intervient dans cette définition. Cela découle, en fait, de la proposition suivante :

Proposition I.1.5 : Si (X, \mathcal{A}, T) est *uniquement ergodique*, alors, en notant μ l'unique mesure T -invariante, (X, \mathcal{A}, μ, T) est *ergodique*.

Démonstration : Soit $A \in \mathcal{A}$ T -invariant. Nous allons montrer que $\mu(A) \in \{0, 1\}$. Soit B le complémentaire de A dans X . B est également T -invariant. Définissons alors la mesure suivante :

Pour tout $E \in \mathcal{A}$, $\nu(E) = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{3} \mu(A \cap E) + \frac{2}{3} \mu(B \cap E) \right)$, où α est une constante telle que $\nu(X) = 1$, plus précisément $\alpha = \frac{1}{3} \mu(A) + \frac{2}{3} \mu(B) = \frac{1}{3} (2 - \mu(A))$.

On vérifie sans peine que ν est T -invariante. Donc par unique ergodicité, $\nu = \mu$, en particulier $\mu(A) = \nu(A) = \frac{\mu(A)}{2 - \mu(A)}$, ce qui donne $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

2. Théorèmes ergodiques

Malgré sa définition d'apparence simple, l'ergodicité est en fait une notion très puissante comme le montrent le théorème suivant :

Théorème I.2.1 (Théorème ergodique de Birkhoff) : Soit (X, \mathcal{A}, μ, T) un système dynamique mesuré, et $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$. Alors il existe une fonction $f^* \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ T -invariante presque partout telle que :

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = f^* \quad \text{pour presque tout } x \in X$$

$$(ii) \quad \int f^* d\mu = \int f d\mu$$

$$(iii) \quad \text{Si de plus } T \text{ est ergodique, alors } f^* \text{ est constante et } f^* = \int f d\mu$$

Nous renvoyons à [F] pour une démonstration.

Cette dernière formule correspond en fait à l'égalité entre la moyenne spatiale et la moyenne temporelle de la fonction f . En effet, si le système est ergodique, en prenant pour f la fonction caractéristique d'un ensemble mesurable, on obtient que, pour presque tout point, la proportion de temps passé dans un ensemble, est égale à sa mesure.

Voyons maintenant une caractérisation de l'unique ergodicité (dont on pourra trouver une démonstration dans [W]) :

Théorème I.2.2 : *Soit X un espace topologique et $T : X \rightarrow X$ une application continue, alors les propositions suivantes sont équivalentes*

(i) $\forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)$ converge uniformément vers une constante.

(ii) $\forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)$ converge en chaque point vers une constante.

(iii) $\exists \mu$ T -invariante, telle que $\forall f \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$ et $\forall x \in X$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \int f d\mu$$

(iv) T est *uniquement ergodique*

Proposition I.2.3 : *Si (X, T) est *uniquement ergodique*, et si l'unique mesure T -invariante charge les ouverts (i.e tout ouvert est de mesure non nulle) alors T est minimal.*

Démonstration : Soit U un ouvert de X et $x \in X$. Soit F un fermé inclus dans U et f une fonction continue valant 1 sur F et 0 en dehors de U . Alors, par la caractérisation ci-dessus, on en déduit qu'il existe une infinité de i tels que $f(T^i(x)) \neq 0$ et donc tels que $T^i(x) \in U$. Par conséquent, T est minimal.

Nous verrons dans la partie III que ces deux notions ne sont pas équivalentes.

Remarque : Toutes les définitions et les théorèmes précédents sont encore valables si l'on remplace la transformation T et ses itérées T^i par un flot ϕ^t , quitte à remplacer les sommes $\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x)$ par des intégrales $\frac{1}{T} \int_0^T f \circ \phi^t(x) dt$.

3. Exemples

Examinons l'ergodicité de quelques systèmes dynamiques simples.

Considérons la transformation T définie sur le cercle unité \mathbb{S}^1 (qui sera muni de sa mesure habituelle, divisée par 2π) par $T(z) = e^{2i\pi\alpha}z$, où α est un réel fixé. T est la rotation d'angle $2\pi\alpha$, et préserve donc la mesure.

Si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, on voit facilement que T est périodique, et ne peut, par conséquent, être minimal ou *uniquement ergodique*.

Supposons maintenant que $\alpha \notin \mathbb{Q}$, et montrons que T est ergodique.

T peut être également vue comme la transformation de \mathbb{R}/\mathbb{Z} , qui à x associe $(x + \alpha) \bmod 1$. Soit alors A une partie de \mathbb{R}/\mathbb{Z} , mesurable et T -invariante. Notons $f = \chi_A$. f est une application 1-périodique, et bornée. Notons $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ses coefficients de Fourier. Les coefficients de Fourier de $f \circ T$ sont $(c_n e^{2i\pi n \alpha})_{n \in \mathbb{Z}}$. Mais f est T -invariante. Donc, par unicité des coefficients de Fourier : pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $c_n e^{2i\pi n \alpha} = c_n$, ce qui implique $c_n = 0$ si $n \neq 0$ (car $\alpha \notin \mathbb{Q}$). On en déduit que f est constante presque partout, et donc que A est de mesure 0 ou 1. Donc T est ergodique.

En utilisant le théorème I.2.2, on peut même montrer que T est uniquement ergodique. En effet, on vérifie sans difficultés (par calculs) que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, la fonction f définie par $f(x) = e^{2i\pi n x}$ vérifie la propriété (ii) du théorème. On en déduit que tout polynôme trigonométrique vérifie cette même propriété. Puis, par densité des polynômes trigonométriques dans l'espace des fonctions continues 1-périodiques, la propriété (ii) est vérifiée pour l'ensemble des fonctions continues 1-périodiques, que l'on peut assimiler à $\mathcal{C}(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R})$. Donc, par le théorème I.2.2, la transformation T est uniquement ergodique.

Ces résultats (et leurs démonstrations) se généralisent facilement aux dimensions supérieures (Voir [T] et [W]). On a alors le résultat :

Proposition I.3.1 : *Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et soit T la transformation définie sur le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ (muni de la mesure de Lebesgue héritée de \mathbb{R}^n) par :*

$$T : (x_1, \dots, x_n) \mapsto ((x_1 + a_1) \bmod 1, \dots, (x_n + a_n) \bmod 1)$$

Alors T est ergodique (et même uniquement ergodique) si et seulement si les a_i sont \mathbb{Q} -linéairement indépendants.

II - Billards

1. Présentation. Cas du billard carré

On va maintenant étudier les billards, et plus précisément, les billards polygonaux, qui sont des systèmes dynamiques particuliers.

Mathématiquement, un billard sera vu comme un polygone (pas nécessairement convexe), dans lequel se déplace une boule (assimilée à un point matériel) qui est soumise aux lois de la réflexion de Descartes, et ne subit pas de force de frottements.

Mais, commençons par examiner le cas le plus simple de billards : le billard carré (voir Fig.1). (Le lecteur intéressé pourra voir dans [T] une description plus précise de ce billard).

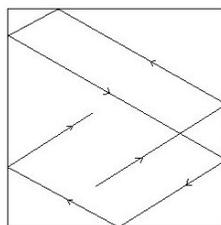


Fig. 1 : Le billard carré

Considérons une trajectoire dans ce billard, de pente initiale α , et "déplions" cette trajectoire : lorsqu'elle rencontre un côté du carré, au lieu de la faire réfléchir sur ce côté, on continue dans la même direction, mais sur le symétrique du carré par rapport à ce côté. On réitère alors ce procédé à chaque fois que l'on rencontre un côté, de telle sorte que la trajectoire suive une ligne droite (Voir Fig. 2).

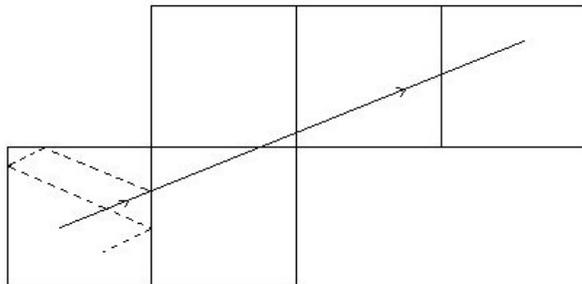


Fig. 2 : Dépliage d'une trajectoire

On peut remarquer que les symétries changent les orientations des carrés. Cependant, dans le cas du billard carré, il n'y a que 4 orientations possibles, ce qui permet d'identifier les carrés ayant la même orientation, c'est-à-dire ceux qui diffèrent d'une translation selon un vecteur du réseau $2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$ (Voir Fig. 3). Ceci revient à considérer un carré plus gros, constitué de 4 carrés unités, et à identifier ses côtés opposés. Or, un carré dont les côtés opposés sont identifiés n'est autre qu'un tore plat standard. Ainsi, une trajectoire dans le billard carré peut être vue comme une géodésique sur le tore plat (Voir Fig. 3). On s'est donc ramené à l'étude d'un flot linéaire dans la direction α (que l'on notera F_α) sur le tore.

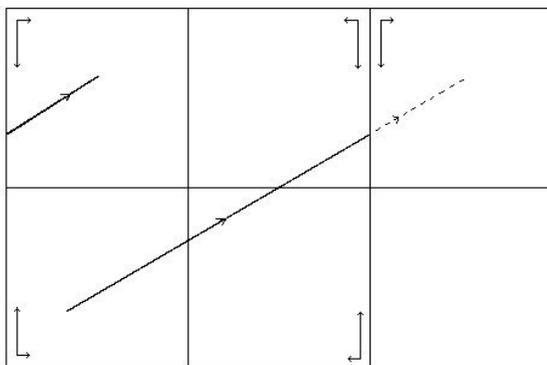


Fig. 3 : Trajectoire vue sur le tore

On en déduit, d'après la Proposition I.3.1, que le flot est uniquement ergodique si α est irrationnel, et périodique sinon. Ainsi, si $\alpha \in \mathbb{Q}$, la boule reviendra à son point de départ au bout d'un temps fini, alors que sa trajectoire sera dense, et même "bien répartie", si $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

2. Généralisation. Surface associée à un billard

Une trajectoire dans un polygone quelconque P peut être dépliée exactement de la même manière que dans le cas du carré : dès que la boule rencontre un côté de P , on la fait continuer en ligne droite, mais sur une "copie" du billard P , qui n'est autre que le symétrique de P par rapport au côté rencontré (Voir Fig. 4).

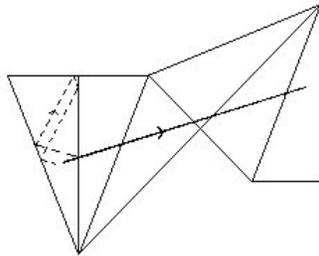


Fig. 4 : Dépliage d'une trajectoire dans un billard triangulaire

Considérons le groupe des déplacements du plan $G(P)$, engendré par les réflexions par rapport aux côtés de P . Chaque copie de P apparaissant au cours du dépliage de la trajectoire, est alors l'image de P par un élément de $G(P)$. Pour étudier les directions des trajectoires, on peut projeter le groupe des déplacements du plan dans le groupe orthogonal $\mathcal{O}(2, \mathbb{R})$ (en le quotientant par les translations, c'est-à-dire, en ne considérant que la partie linéaire de ces déplacements). Notons $\mathcal{O}(P)$ l'image de $G(P)$ dans le groupe orthogonal. Ce groupe est engendré par les réflexions vectorielles d'axes dirigés par les côtés de P .

Définition I.3.1 : On dit que le polygone P est *rationnel* si le groupe $\mathcal{O}(P)$ est fini.

On peut remarquer que cette propriété implique le fait que les angles de P sont tous des multiples rationnels de π . Et c'est même équivalent si P est connexe, ce que nous supposons désormais.

Remarque : Dans un billard rationnel, la trajectoire d'une boule ne peut prendre qu'un nombre fini de directions. En effet, l'ensemble des directions possibles, pour une boule est $\{A.v : A \in \mathcal{O}(P)\}$, où v est sa direction initiale.

Très peu de résultats sont connus sur les billards non rationnels. Nous ne travaillerons désormais qu'avec des billards rationnels.

Dans le cas du carré, le dépliage permettait de se ramener au cas d'un flot de direction constante sur un tore. Mais c'est, en fait, le cas pour n'importe quel polygone rationnel : le dépliage permet de se ramener au cas d'un flot de direction constante sur une certaine surface.

En effet, soit P un polygone rationnel. Notons P_1, \dots, P_m l'orbite de P sous l'action de $\mathcal{O}(P)$, et recollons ces copies de P de la manière suivante : si s est un côté de P_i , et s' est un côté de P_j , et que P_i s'obtient à partir de P_j par réflexion d'axe dirigé par s' , et vice-versa, alors on identifie s et s' . Autrement dit, pour tout i et j , on recolle P_i et P_j le long du côté qui permet de passer de P_i à P_j par réflexion. On obtient alors une surface compacte orientable, et sans bord, S , sur laquelle le flot du billard se résume à un flot de direction constante. (Voir Fig. 5)

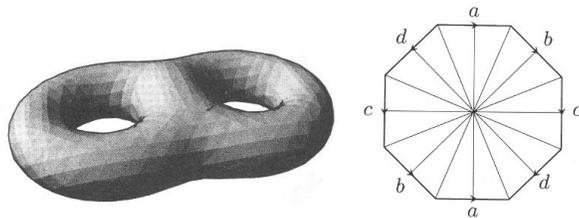


Fig. 5 : Surface de genre 2 obtenu à partir d'un billard triangulaire d'angles $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8})$

Regardons cette surface de plus près. La construction ci-dessus nous donne un pavage de S , ce qui permet de calculer sa caractéristique d'Euler (Voir [MT], ou [T] pour des calculs explicites), puis son genre (on rappelle que $\chi = 2 - 2g$, où χ est la caractéristique d'Euler, et g le genre). En notant r le nombre de sommets de P , $\frac{\pi k_i}{n_i}$ (avec k_i et n_i premiers entre eux), les angles aux sommets de P , et $N = \text{ppcm}(n_1, \dots, n_r)$, on a alors :

$$g = 1 + \frac{N}{2} \sum_{i=1}^r \frac{k_i - 1}{n_i}$$

On pourra le vérifier sans difficultés dans le cas du billard carré, ou du billard triangulaire de la Fig. 5.

En munissant S de la métrique plate héritée de \mathbb{R}^2 , on obtient alors une surface plate. Cependant, la formule de Gauss-Bonnet implique qu'une surface partout plate ne peut être que de genre 1. Mais, on remarque que la surface comporte effectivement des points singuliers, qui sont les sommets de P (dans le processus de dépliage, on triche légèrement puisqu'on ne considère que les trajectoires qui ne rencontrent aucun sommet de P). Ce sont des singularités dites *coniques*, car, lorsque l'on tourne autour, il faut décrire un angle différent de 2π (plus précisément $2\pi k_i$) avant de revenir à son point de départ. S est donc une surface plate comportant un nombre fini de singularités coniques, d'angles qui sont des multiples entiers de 2π .

Exemples : Le lecteur pourra vérifier que dans le cas de la Fig. 5, tous les sommets de l'octogone sont identifiés et forment une singularité conique d'angle 6π . Par contre, dans le cas du carré, la seule singularité est, en fait, une fausse singularité, puisqu'elle est d'angle 2π .

III - Etude ergodique du billard avec mur

1. Le système dynamique de Veech

Nous avons vu dans la partie I que, sous des conditions raisonnables, l'unique ergodicité implique la minimalité. On peut alors se demander si la réciproque est vraie. En 1968, Veech découvre un système dynamique particulier, qui est minimal et non uniquement ergodique (voir [Ve1]). Nous allons maintenant en donner une description.

On considère deux cercles unités C_1 et C_2 , sur lesquels on repère 2 arcs J_1 et J_2 de même longueur $\alpha \in [0, 2\pi]$. Soit θ un réel. On définit alors la transformation T comme suit :

- Si $x \in C_1 \setminus J_1$, Tx est l'image de x par la rotation d'angle $2\pi\theta$ sur le cercle C_1 .
- Si $x \in J_1$, Tx est l'image de x par la rotation d'angle $2\pi\theta$, mais sur le cercle C_2 .
- T est définie de la même manière sur le cercle C_2 (Voir Fig. 6).

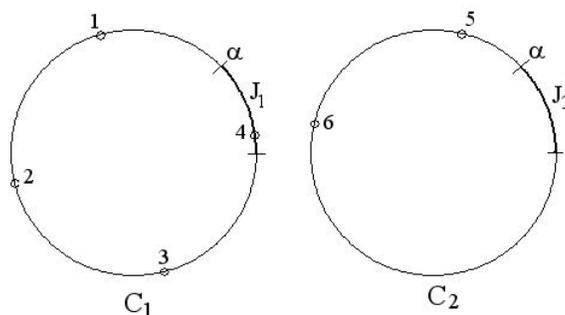


Fig. 6 : Système dynamique de Veech

Sous certaines hypothèses concernant α et θ , la transformation est alors minimale, mais pas uniquement ergodique. La démonstration de Veech (voir [Ve1]) s'appuie les propriétés du développement en fractions continues de θ . Nous allons voir un résultat plus général, utilisant des techniques totalement différentes, dans l'étude du billard avec mur.

2. Le billard avec mur

Le système dynamique de Veech, ci-dessus, donne un exemple de transformation minimale, mais pas uniquement ergodique. On peut se demander s'il n'existe pas des billards pour lesquels, le flot dans une certaine direction, vérifie la même propriété. Nous allons voir que c'est le cas pour le billard avec mur.

Considérons un billard carré, de côté 1, avec un mur, de longueur $\alpha \in [0, 1]$, perpendiculaire à un des côtés, et situé au milieu de ce même côté (Voir Fig. 7).

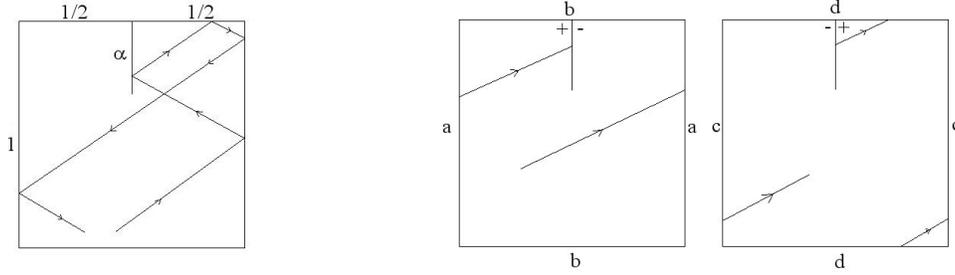


Fig. 7 : Le billard avec mur, et sa surface associée¹

La surface associée à ce billard est l'union de 2 tores plats (rectangles 2×1 , dont on identifie les côtés opposés), que l'on recolle le long d'une fente de longueur 2α . Quitte à changer d'échelle selon la direction verticale, on se ramène alors à la surface de la fig.7, constitué de 2 tores plats standard (carrés unités, dont on identifie les côtés opposés), recollés le long d'une fente de longueur α .

Remarque : Prologeons sur ces 2 tores la fente, de manière à obtenir 2 cercles ayant une partie commune (la fente). Considérons le flot dans un direction transverse à la fente, et T l'application de premier retour associé à ce flot, sur ces 2 cercles. On remarque que ce système est exactement le système dynamique de Veech.

Considérons, pour $(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$, la surface M constituée de 2 tores plats, que l'on recolle le long d'une fente reliant $(0, 0)$ à (x_0, y_0) (pour $(x_0, y_0) = (0, \alpha)$, on retrouve la surface associée au billard avec mur). On a alors le résultat suivant, dû à Masur et Smillie (Voir [MS] et [MT]) :

Théorème III.2.1 : *Si (x_0, y_0) ne sont pas rationnellement liés, ou si $(x_0, y_0) = (0, \alpha)$, avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$ (ou inversement), alors, il existe un ensemble non dénombrable de directions θ , pour lesquelles le flot, sur la surface M , est minimal, mais pas uniquement ergodique.*

Remarque : Si $(x_0, y_0) = (0, \alpha)$, avec $\alpha \in \mathbb{Q}$ (billard avec mur de longueur rationnelle), le résultat devient faux, puisqu'on peut montrer que, dans ce cas, minimal équivaut à uniquement ergodique.

Nous allons donner le principe de la démonstration (pour plus de détails, on pourra consulter [MT]).

Cette démonstration s'appuie sur un résultat général, en théorie du billard polygonal, qui est :

Théorème III.2.2 : *Si P est un billard rationnel, alors l'ensemble des directions pour lesquelles le flot n'est pas minimal est dénombrable.*

On pourra trouver une démonstration élémentaire de ce résultat dans [T], ou [MT].

¹La trajectoire dessinée sur la surface ne sert qu'à indiquer les identifications. Elle ne représente pas le dépliage de la trajectoire dessinée sur le billard.

Ainsi, il suffit de trouver un ensemble non dénombrable de directions pour lesquelles le flot n'est pas uniquement ergodique, et même non-ergodique, d'après la proposition I.1.5. Pour cela, on dispose d'un critère géométrique : si $\theta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \theta$, et que θ_n vérifie certaines propriétés géométriques, alors le flot dans la direction θ n'est pas ergodique. On est donc ramené à la construction d'un ensemble non dénombrable de telles suites. Pour cela, on construit un arbre, par récurrence, de la manière suivante :

On prend, comme racine de l'arbre, la direction de la fente θ_0 .

A partir de chaque noeud, on construit, en utilisant la propriété arithmétique sur (x_0, y_0) , 2 directions distinctes (les *enfants* du noeud), vérifiant le critère géométrique de non-ergodicité.

La construction mène à un arbre infini de directions vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Tout parcours de l'arbre, d'enfants en enfants, est une suite de directions θ_n , convergente, et vérifiant le critère géométrique de non-ergodicité.

(ii) Deux parcours distincts de l'arbre mènent à 2 directions limites distinctes.

Ainsi, l'ensemble des directions limites est un ensemble de directions non-ergodiques, et il est non dénombrable, puisque l'ensemble des parcours de l'arbre l'est.

IV - Géométrie et dynamique des billards rationnels. Résultats avancés

1. Surfaces de translation et théorie de Teichmüller

On a vu que la construction de la surface associée à un billard rationnel P , par identifications de côtés de polygones, mène à une surface plate, à singularités coniques S . Comme les identifications se font par une simple translation, on peut munir S d'une structure de *surface de translation* (i.e dont les changements de cartes sont de la forme $z \mapsto z+v$, avec z et v dans \mathbb{C}). On peut, par conséquent, étudier les propriétés topologiques et ergodiques du flot dans une direction fixée, en étudiant, plus généralement, les propriétés des feuilletages sur les surfaces de translations.

Soit S une surface de Riemann, et ω une différentielle abélienne (i.e de la forme $f(z)dz$, où f est holomorphe) sur cette surface. On peut trouver un système de cartes locales qui fasse de S une surface de translation. Pour étudier les billards, on étudie donc, plus généralement, les surfaces de Riemann, munies d'une différentielle abélienne, ou d'une d'une différentielle quadratique (c'est-à-dire de la forme $f(z)dz^2$, avec f holomorphe, voire méromorphe, avec des pôles simples).

Remarque : Dans le cas d'une surface munie d'une différentielle quadratique, les changements de cartes peuvent également être de la forme $z \mapsto -z + v$ ce qui entraîne que les feuilletages ne sont plus orientés. Cependant, l'étude se base sur les mêmes principes.

Comme les propriétés des feuilletages sont intimement liées à la structure de la surface S , on en vient naturellement à l'étude de l'espace modulaire de S , qui est le quotient de l'ensemble des structures conformes de S , par l'ensemble des difféomorphismes de S . (Pour une description plus précise de l'espace modulaire d'une surface, et la théorie de

Teichmüller, on pourra regarder dans [Th]). Plus précisément, c'est l'action de $SL(2, \mathbb{R})$ sur l'espace modulaire, et même sur un fibré au-dessus de l'espace modulaire (pour prendre en compte le fait que S est munie d'une différentielle abélienne, ou quadratique), qui est intéressante pour l'étude des propriétés ergodiques. Cette action est la suivante :

Soit $A \in SL(2, \mathbb{R})$. Si (U_i, ϕ_i) est un système de cartes locales sur S , A permet de définir une nouvelle structure de translation sur S , en prenant, comme système de cartes $(U_i, A \circ \phi_i)$. Cette action, sur l'espace des structures, passe au quotient, et définit alors une action sur l'espace modulaire de S . Notamment, l'étude de l'action des matrices de la forme $\begin{pmatrix} e^{t/2} & 0 \\ 0 & e^{-t/2} \end{pmatrix}$ (appelée *flot géodésique*) se révèle particulièrement utile.

2. Quelques résultats avancés

Citons, dans ce dernier paragraphe, quelques résultats avancés de la théorie des billards rationnels. Le premier, datant de 1986 (voir [KMS]), est un résultat profond s'appuyant sur la théorie de Teichmüller, et les différentielles quadratiques :

Théorème IV.2.1 (Kerckhoff-Masur-Smillie) : *Pour toute différentielle quadratique (en particulier, billard rationnel), l'ensemble des $\theta \in [0, 2\pi]$ pour lesquels le feuilletage dans la direction θ est minimal, mais pas uniquement ergodique, est de mesure de Lebesgue nulle.*

Ce théorème entraîne que, dans le cas du billard avec mur, l'ensemble des directions minimales, mais pas uniquement ergodiques, bien que non-dénombrable, est négligeable pour la mesure de Lebesgue. En 2002, Cheung a étudié plus en détails cet ensemble, et a obtenu le résultat suivant (Voir [C]) :

Théorème IV.2.2 (Cheung) : *Si la longueur du mur $\alpha \notin \mathbb{Q}$ est un nombre diophantien, alors l'ensemble des directions minimales, mais pas uniquement ergodiques, est de dimension de Hausdorff $1/2$.*

Rappelons qu'un nombre α est dit diophantien s'il existe $d \geq 1$, et $K > 0$ tel que, pour tout $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec p et q premiers entre eux, $\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{K}{q^d}$, et que la dimension de Hausdorff (ou dimension fractale) est un moyen de comparer (de quantifier) les ensembles de mesure nulle. (pour plus de précisions on pourra aller voir dans [Fal], ou dans [B]).

La démonstration de Cheung s'appuie sur le même principe de construction d'arbre que la démonstration de Masur et Smillie, dont il était question au III.2. Elle consiste, en fait, à affiner au maximum cette dernière démonstration, en exploitant la condition arithmétique sur α (Voir [C]).

Pour finir, signalons l'alternative de Veech, que nous ne détaillerons pas (le lecteur intéressé pourra consulter [Ve2], ou [Vo]) qui donne une condition suffisante pour qu'un billard rationnel présente la même dichotomie que celle du billard carré, ou une direction est, soit périodique, soit uniquement ergodique. Cette condition est une condition géométrique portant sur un groupe associé au billard : le groupe de Veech du billard.

Conclusion

La théorie des billards polygonaux est une discipline récente, qui a pris une part entière dans la théorie des systèmes dynamiques, et qui est actuellement en plein développement. Ainsi, de nombreux problèmes qui lui sont liés sont encore ouverts (l'alternative de Veech est-elle une CNS ? Peut-on étendre certains résultats aux billards non rationnels ?). C'est pourquoi, malgré l'apparence simple des questions qu'elle soulève, elle se révèle être d'une extrême richesse, faisant appel à différents champs des mathématiques, tels que la géométrie, la théorie ergodique, l'algèbre...

Références

- [B] Bugeaud Y. *Approximation by algebraic numbers*, à paraître, 2003.
- [C] Cheung Y. *Hausdorff dimension of the set of nonergodic directions*, à paraître dans Ann. of Math.
- [F] Fathi A. *Systèmes dynamiques*, cours de l'Ecole Polytechnique, 1996.
- [Fal] Falconer K. *The geometry of fractal sets*, Cambridge University Press, 1986.
- [KMS] Kerckhoff S, Masur H, Smillie J. *Ergodicity of billiards flows and quadratic differentials*, Ann. of Math. 124 p.293-311, 1986.
- [MS] Masur H, Smillie J. *Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations*, Ann. of Math. 134, p.455-543, 1991.
- [MT] Masur H, Tabachnikov S. *Rational billiards and flat structures*, à paraître, Handbook Dynamical Systems, Elsevier.
- [T] Tabachnikov S. *Billiards*, SMF Panoramas et synthèses No 1, 1995.
- [Th] Thurston W. *Three-dimensional geometry and topology*, Princeton university press, 1997.
- [Ve1] Veech W. *Strict ergodicity in zero-dimensional dynamical systems and the Kronecker-Weyl theorem mod 2*, Trans. AMS 140, p.1-34, 1969.
- [Ve2] Veech W. *Teichmüller curves in moduli space. Eisenstein series and applications to triangular billiards*, Invent. Math. 97, p.117-171, 1989.
- [Vo] Vorobets Y. *Plane structures and billiards in rational polygons : the Veech alternative*, Russ. Math. Surv., 51, No 5, p.3-42, 1996.
- [W] Walters P. *Ergodic theory. Introductory lectures*, Lecture notes in mathematics No 458, Springer-Verlag, 1975.