

# Structure hyperbolique sur le complémentaire d'un nœud

Frédéric Palesi

Rapport de stage

Stage effectué en Juin/Juillet 2004

Au Centre de Mathématiques et d'Informatique (Université Marseille-Provence)

Sous la direction de Daniel Matignon

# Introduction

La topologie des 3-variétés a connu un essor particulier après les travaux de Thurston au milieu des années 1970. Pour étudier cette topologie Thurston a eu l'idée d'utiliser les structures géométriques qui existent sur la plupart des ces 3-variétés et en particulier la plus intéressante, la géométrie hyperbolique. Prenons maintenant une corde, faisons un nœud dessus et joignons les deux bouts ensemble. On peut tout de suite remarquer que l'espace privé de cette corde nouée est une 3-variété. Dans ce cadre, on peut alors essayer de trouver des structures géométriques sur ce complémentaire pour pouvoir en étudier la topologie.

Après avoir introduit brièvement la théorie des nœuds, de leurs complémentaires et des groupes fondamentaux dans la partie I, nous nous pencherons dans la partie II sur des aspects de la géométrie des 3-variétés hyperboliques pour comprendre quels complémentaires de nœuds admettent une structure hyperbolique. Et finalement dans la partie III, nous étudierons l'exemple du nœud en huit avec en particulier la construction de la structure hyperbolique et le calcul du volume de ce complémentaire.

La majeure partie de ce travail s'appuie sur [1] qui est une introduction à quelques applications de la géométrie hyperbolique sur les 3-variétés

## I - Théorie des nœuds

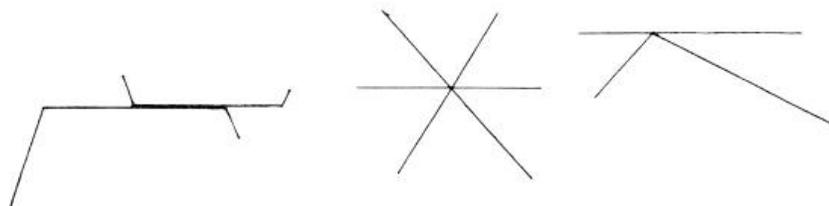
### A. Définitions

Nous commençons par donner les concepts de base de la théorie des nœuds. (Nous renvoyons à [2],[3], ou [4] pour plus de détails). On appelle nœud, un plongement du cercle  $S^1$  dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^3$  ou la 3-sphère  $S^3$ . Un simple plongement  $i : S^1 \rightarrow S^3$  n'a pas beaucoup d'intérêt, c'est pourquoi on étudie les classes d'équivalences de ces nœuds par certains mouvements qui ne modifient pas la "forme" du nœud. De façon intuitive, 2 nœuds sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre sans couper la corde ou réduire un morceau de nœud à un point. Cela correspond à ce que l'on peut faire dans la réalité avec un morceau de corde élastique. Ces mouvements sont des isotopies ambiantes. On se restreint pour la suite aux nœuds équivalents à des courbes fermées linéaires par morceaux (c'est à dire des polygones), évitant ainsi de travailler avec des nœuds qui ne pourraient pas exister dans la réalité (voir fig. 1).



Figure 1 : nœud sauvage

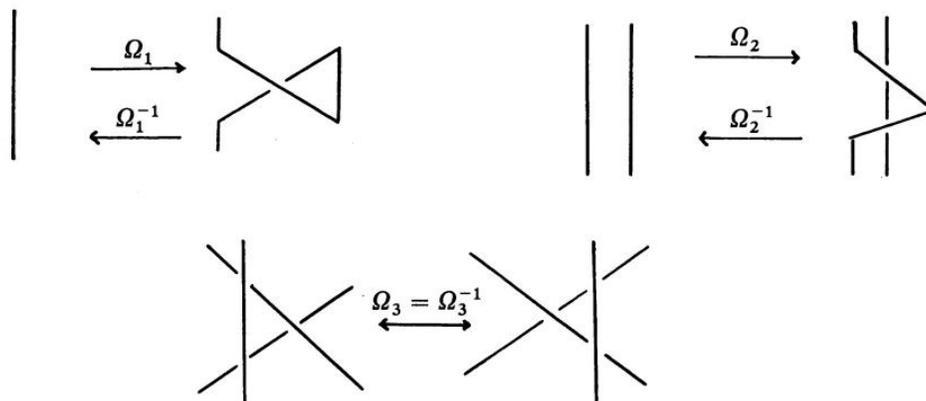
Comme travailler dans  $\mathbb{R}^3$  est ardu, on travaille le plus souvent avec une projection du nœud sur un plan  $\mathcal{P}$ . Cette projection doit éviter les configurations montrées dans la figure 2. Une telle projection est appelée régulière. Il est facile de montrer qu'il y a une infinité de projections régulières pour un même nœud.



**Figure 2 :** Configurations à éviter

Une simple projection ne détermine pas le nœud, il faut qu'à chaque intersection on marque l'arc qui passe au dessus, on a alors un diagramme. De cette façon on peut reconstruire le nœud à partir de ce diagramme.

**Définition I.A.1 :** (Mouvement de Reidemeister) Deux diagrammes sont équivalents, si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie de mouvements de Reidemeister  $\Omega_i, i = 1, 2, 3$  ou leurs inverses  $\Omega_i^{-1}$ . Les trois mouvements sont décrits dans la figure 3.



**Figure 3** Mouvements de Reidemeister

**Proposition I.A.2 :** Deux nœuds sont équivalents si et seulement si leur diagrammes sont équivalents.

Idée de démonstration : On montre d'abord que deux projections régulières différentes d'un même nœud sont connectées par des mouvements de Reidemeister. Puis il suffit alors de montrer que, pour une projection fixée, deux nœuds équivalents ont des diagrammes équivalents.

On peut orienter le nœud dans l'espace (la projection étant alors également orientée), on a alors une nouvelle définition de l'équivalence en rajoutant le fait que l'isotopie doit préserver l'orientation. Si  $K$  est un nœud on appelle :  $-K$  le nœud *inverse* obtenu en inversant l'orientation. Et on appelle  $K^*$  le nœud *miroir* obtenu par réflexion du nœud.

**Definition I.A.3 :** Un nœud est dit *inversible* si  $K = -K$ . Un nœud est dit *amphichiral* si  $K = -K^*$ .

**Definition I.A.4 :** Soit  $K \subset \mathbb{R}^3$  un nœud qui rencontre un plan en deux points P et Q. Ce plan sépare  $K$  en deux parties, et si on recolte P et Q dans les deux parties, par des arcs simples sur le plan, on obtient deux nœuds  $K_1$  et  $K_2$ . On écrit alors  $K = K_1 \# K_2$ . On dit que le nœud est composé si  $K_1$  et  $K_2$  ne sont pas triviaux,  $K_1$  et  $K_2$  sont appelés les facteurs de  $K$ . Un nœud est *premier* si il ne peut pas se decomposer (i.e  $(K = K_1 \# K_2) \Rightarrow (K_1 \text{ ou } K_2 \text{ trivial})$ ).

**Definition I.A.5 :** (nœud satellite). Soit  $K'$  un nœud dans  $\mathbb{R}^3$  et  $V'$  un tore solide trivial tel que  $K' \subset V' \subset \mathbb{R}^3$ . On suppose que  $K'$  n'est pas contenu dans une 3-boule de  $V'$ , et qui ne soit pas l'âme de  $V'$ . Soit alors un homéomorphisme  $h : V' \rightarrow V \subset \mathbb{R}^3$  ou  $V$  est un voisinage tubulaire d'un nœud non-trivial  $K^0$ .  $h$  envoie  $K'$  sur un nœud  $K$ .  $K$  est appelé un *satellite* de  $K^0$  et  $K^0$  est son *compagnon*. Il est facile de voir qu'un nœud composé est un nœud satellite. Pour cela il suffit de construire le tore "swallow-follow" (le tore qui avale un des nœud et qui suit l'autre).

**Definition I.A.6 :** (nœud torique). On appelle nœud torique, un nœud qui peut être plongé comme une courbe simple fermée sur un 2-tore non noué dans  $\mathbb{R}^3$ . Plus précisément, sachant que de telles courbes sur les tores peuvent se définir par un couple  $(p, q)$ , on peut noter les nœuds toriques par  $T_{p,q}$  qui est le nœud qui s'enroule  $p$  fois dans le sens longitudinal et  $q$  fois dans le sens meridional.

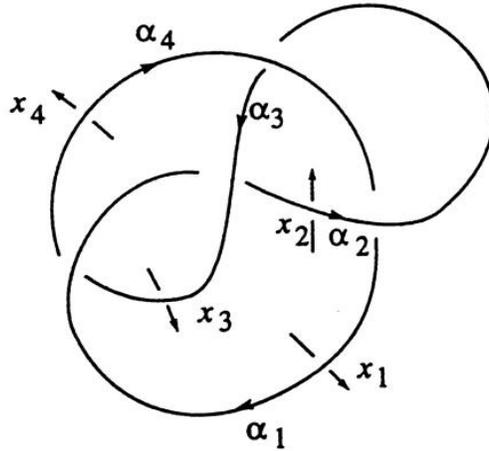
## B. Groupe du nœud

Pour distinguer les nœuds, on cherche des invariants de nœuds qui sont préservés sur les classes d'équivalence des nœuds. Comme on peut s'en douter le complémentaire du nœud est très utile. On peut donc essayer de classifier les nœuds par des outils de topologie algébrique, par exemple un invariant très intéressant est le groupe fondamental du complémentaire.

On se place à partir de maintenant dans  $\mathbb{S}^3$  (on est ainsi dans un espace compact, ce qui se revelera utile dans la suite), on note  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  le complémentaire du nœud. On définit également l'extérieur du nœud comme  $X_K = \mathbb{S}^3 \setminus \text{Int}(\eta(K))$ , où  $\eta(K)$  est un voisinage tubulaire de  $K$  ; la différence entre les deux notions est que  $X_K$  est une 3-variété compacte dont le bord est un 2-tore.

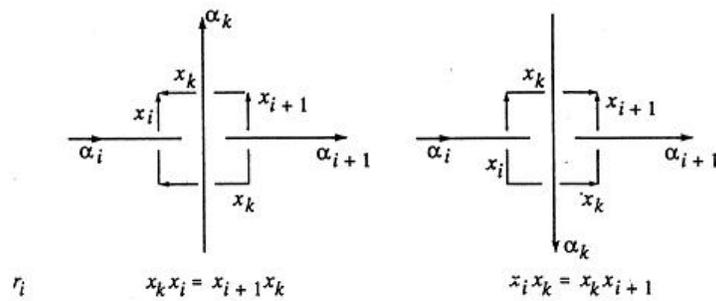
**Definition I.B.1 :** on appelle groupe du nœud, le groupe fondamental de l'extérieur du nœud (qui est isomorphe au groupe fondamental du complémentaire du nœud). On le note donc  $\pi_1(X_K)$  (respectivement  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ ).

Il existe une simple procédure pour obtenir une présentation d'un groupe de nœud, appelée présentation de Wirtinger. Prenons un plongement du nœud  $K$  qui soit tel que sa projection sur le plan  $z = 0$  est régulière, et qui définit un nombre fini d'arcs  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  (voir figure 4). On oriente le nœud  $K$  de façon à ce que les arcs  $\alpha_i$  soient des arcs orientés de façon compatible avec leur indexation. On fixe alors un point  $b$  au dessus de la projection (par exemple  $(0, 0, 1)$ ) et on forme  $n$  boucles orientées  $x_1, \dots, x_n$  qui passent par le point  $b$  et sous chaque  $x_i$ . La figure 4 représente ces boucles par des flèches sous chaque arc  $\alpha_i$ .



**Figure 4 :** Présentation de Wirtinger pour le nœud en huit

A chaque point d'intersection on trouve une relation entre les  $x_i$  qui ne peut prendre que deux forme possible comme le montre la figure 5



**Figure 5 :** Les deux relations possibles

**Théorème I.B.2 :**  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$  est engendré par les  $x_i$  et a une présentation :

$$\langle x_1, \dots, x_n | r_1, \dots, r_n \rangle$$

où les  $r_i$  sont les relations définies dans la figure 5. De plus, le théorème reste vrai en enlevant une quelconque des relations

**Exemple :** On prend le nœud de huit représenté sur la figure 4, et on trouve les trois relations suivantes (puisque trois suffisent) :

$$(1) x_1x_3 = x_3x_2, (2) x_4x_2 = x_3x_4, (3) x_3x_1 = x_1x_4.$$

On simplifie les relations jusqu'à obtenir une seule relation, et on obtient donc la présentation suivante :

$$\langle x_1, x_3 | x_1^{-1}x_3x_1x_3^{-1}x_1x_3 = x_3x_1^{-1}x_3x_1 \rangle .$$

**Definition I.B.3 :**  $\eta(K)$  étant un tore solide, on peut définir des méridiens et des parallèles. Un meridien  $m$  de  $K$  est une courbe simple fermée sur  $\partial\eta(K)$  qui est non homologue à 0 dans  $\partial\eta(K)$  mais homologue à 0 dans  $\eta(K)$ . Un parallèle  $l$  est une courbe simple fermée sur  $\partial\eta(K)$  et qui intersecte un meridien transversalement en un seul point, on choisit généralement l'unique parallèle qui est homologue à 0 dans  $X_K$ .  $\langle m, l \rangle$  détermine un feuilletage de  $\partial\eta(K)$ , une courbe fermée simple *essentielle* se décrit  $m^pl^q$ . Le groupe  $\langle m, l \rangle$  est un sous-groupe de  $\pi_1(X_K)$  qui est appelé sous-groupe *périphérique*. Un sous-groupe périphérique est composé d'éléments *paraboliques*.

## II - Structure hyperbolique

Pour pouvoir construire une structure hyperbolique sur le complémentaire d'un nœud il faut que ce nœud satisfasse certains critères qui sont dictés par la géométrie hyperbolique. On rappelle donc dans un premier temps quelques éléments de géométrie hyperbolique dont nous aurons besoin. Nous renvoyons à [5] pour plus de détails.

### A. 3-variétés hyperboliques

On appelle n-espace hyperbolique,  $\mathbb{H}^n$ , le demi-espace supérieur  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$  muni de la métrique définie par l'élément de longueur :

$$ds^2 = \frac{dx_1^2 + \dots + dx_n^2}{x_n^2}$$

$\mathbb{H}^n$  est l'unique variété riemannienne complète, connexe, simplement connexe, de courbure constante -1. Les géodésiques dans cet espace métrique sont les lignes droites et les demi-cercles orthogonaux à la sphère à l'infini  $\{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} \cup \{\infty\}$  que l'on notera  $\mathbb{S}_\infty^{n-1}$ . Une *structure hyperbolique* sur une n-variété  $M$  est une métrique riemannienne sur  $M$  qui soit telle que chaque point de  $M$  a un voisinage isométrique à un sous-ensemble ouvert du n-espace hyperbolique.

On notera le groupe des isométries  $Isom(\mathbb{H}^n)$ . C'est un groupe de Lie réel, et on peut noter que dans le cas de la dimension 3 on a  $Isom_+\mathbb{H}^3 \cong PSL(2, \mathbb{C})$ . Si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret, sans torsion, de  $Isom_+(\mathbb{H}^n)$ , alors  $\Gamma$  agit librement sur  $\mathbb{H}^n$  et donc  $\mathbb{H}^n/\Gamma$  admet une structure hyperbolique. Plus généralement, étant donnée une structure hyperbolique sur une variété orientable  $M$ , il existe un homomorphisme de  $\pi_1(M)$  dans

$Isom_+(\mathbb{H}^n)$  appelé la représentation *holonomique* associée à la structure hyperbolique. On peut noter que dans le cas où  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$ , l'image de  $\pi_1(M)$  par l'homomorphisme coïncide avec  $\Gamma$ . Donc en particulier, une 3-variété hyperbolique est identifiée à  $\mathbb{H}^3/\Gamma$  où  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $PSL(2, \mathbb{C})$  (qu'on appelle groupe de Klein) sans torsion.

**Proposition II.A.1 :** *Le volume d'une variété hyperbolique  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  peut se calculer à partir du volume d'un domaine fondamental. Soit  $x_0 \in \mathbb{H}^n$ , on pose :*

$$D = \{x \in \mathbb{H}^n : d(x, x_0) \leq d(x, \gamma(x_0)) \forall \gamma \in \Gamma\}$$

*et on a alors  $Vol(D) = Vol(M)$ . De plus si  $M$  est compact,  $D$  est un polyèdre géodésique compact .*

Un théorème de Mostow et Prasad dit que si une  $n$ -variété ( $n \geq 3$ ) compacte orientable admet une structure hyperbolique de volume fini, alors cette structure est unique. Pour une démonstration complète du théorème voir le chapitre C de [5]. Un corollaire intéressant de ce théorème est que si  $M$  est une telle variété, alors  $Vol(M)$  est un invariant topologique.

**Théorème II.A.2 :** *Soit  $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$  une 3-variété hyperbolique de volume fini, alors :*

- (i) *Si  $M$  est fermée,  $\Gamma$  n'a pas de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sous-groupe.*
- (ii) *Sinon  $M$  est l'intérieur d'une variété compacte à bord, dont le bord est composé d'une union disjointe de tore. De plus tout  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sous-groupe est périphérique.*

Démonstration : Soit  $\Gamma$  un sous-groupe discret de  $SL(2, \mathbb{C})$  isomorphe à  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ , on peut alors voir que  $\Gamma$  est conjugué (dans  $SL(2, \mathbb{C})$ ) à un sous groupe de  $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\}$ . Un élément de  $SL(2, \mathbb{C})$  qui est conjugué à un élément de cette forme est appelé parabolique. Il est connu que si  $\Gamma$  est un groupe de Klein sans torsion alors tout  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sous-groupe est périphérique, c'est à dire qu'il est conjugué à  $\pi_1(T)$  dans  $\Gamma$  où  $T$  est un bord de  $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$ . Donc si  $M$  est une 3-variété hyperbolique fermée alors il y a une borne inférieure à la longueur de la plus courte géodésique fermée dans  $M$ . Ainsi d'après la définition de la métrique hyperbolique on en déduit que  $\Gamma$  ne peut pas contenir d'éléments paraboliques, ce qui implique que  $\Gamma$  ne contient pas de  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sous-groupe.

On peut ajouter que, si  $M$  est comme ci dessus, un élément  $\gamma \in \Gamma$  qui n'est pas parabolique préserve une unique géodésique  $A_\gamma$ .  $\gamma$  agit par translation le long de  $A_\gamma$  sur une distance  $l(\gamma)$ , plus une rotation d'angle  $\theta$  autour de  $A_\gamma$ . On remarque alors que les éléments qui commutent avec  $\gamma$  sont exactement ceux d'axe  $A_\gamma$ . Il est donc clair que le centre du groupe de Klein est trivial, en effet seul l'identité préserve toutes les géodésiques  $A_\gamma$ .

## B. nœuds hyperboliques

**Definition II.B.1 :** On appelle nœud hyperbolique, un nœud  $K$  dont le complémentaire  $S^3 \setminus K$  admet une structure hyperbolique de volume fini.

**Théorème II.B.2 :** *Soit  $K \subset \mathbb{S}^3$  un nœud premier non-trivial. Alors  $K$  est un nœud hyperbolique si et seulement si  $K$  n'est pas un nœud torique ou un nœud satellite.*

Démonstration : On montrera seulement qu'un nœud torique ou satellite n'admet pas de structure hyperbolique .

Soit  $K = T_{p,q}$  un nœud torique, on peut présenter le groupe du nœud sous la forme suivante (après simplification de la présentation de Wirtinger) :

$$\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) = \langle u, v | u^p v^{-q} \rangle$$

Le sous-groupe  $\langle u^a \rangle$  est un groupe cyclique infini qui représente le centre de  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$ . Or on sait que si  $K$  est hyperbolique, le centre du groupe doit être trivial. On en déduit que  $K$  n'est pas hyperbolique.

Soit  $K$  un nœud satellite, et  $K^0$  son compagnon. On peut voir que le groupe du nœud  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$  contient un  $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  sous-groupe qui n'est pas périphérique, car les courbes essentielles sur  $T^2 = \partial(X_{K^0})$  ne définissent pas de disque sur  $X_K$ . En effet  $K^0$  étant non-trivial on a  $X_{K^0}$  qui n'est pas un tore solide donc les courbes sont incompressibles vers l'extérieur du tore, et on ne peut pas mettre  $K$  dans une 3-boule du tore  $\eta(K^0)$  donc les courbes sont incompressibles vers l'intérieur du tore. Finalement les courbes essentielles ne forment pas un sous-groupe périphérique de  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K)$  puisque  $K \neq K^0$ .

La deuxième partie de la démonstration, qui montre que ces deux cas sont les seules obstructions à une structure hyperbolique sur le complémentaire du nœud, est un cas particulier du théorème d'hyperbolisation de Thurston.

Si  $K$  est le nœud trivial alors on a :  $\pi_1(\mathbb{S}^3 \setminus K) \cong \mathbb{Z} \cong \langle \gamma \rangle \subset PSL(2, \mathbb{C})$ . Donc  $\mathbb{S}^3 \setminus K = H^3 / \langle \gamma \rangle$ , et on voit donc que la structure hyperbolique est de volume infini.

**Exemple :** On choisit  $K$ , le nœud en huit. La présentation de Wirtinger du groupe du nœud :  $\Gamma = \langle x_1, x_3 | x_1^{-1} x_3 x_1 x_3^{-1} x_1 x_3 = x_3 x_1^{-1} x_3 x_1 \rangle$ .

Pour construire une structure hyperbolique sur le complémentaire du nœud on peut trouver une représentation du groupe  $\Gamma$  dans  $PSL(2, \mathbb{C})$ . On pose  $\omega = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ , et on définit un homomorphisme  $\Phi : \Gamma \rightarrow SL(2, \mathbb{C})$  par :

$$\Phi(x_1) = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Phi(x_3) = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}$$

En effet on peut vérifier que  $A$  et  $B$  satisfont les relations de  $\Gamma$ . Ensuite pour déterminer que la structure hyperbolique est bien de volume fini on peut construire un polyèdre fondamental pour l'action de  $\Phi(\Gamma)$  sur  $\mathbb{H}^3$ . En effectuant un certain recollement de paire de faces on a alors une 3-variété hyperbolique de volume fini comme on va le voir dans la partie suivante.

## C. Recollement de tétraèdres idéaux

Comme l'a montré Thurston, un moyen simple de donner une description concrète des structures hyperboliques sur les 3-variétés, est de donner les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un recollement d'un nombre fini de polyèdres idéaux donne une 3-variété admettant une structure hyperbolique de volume fini.

**Définition II.C.2 :** Un polyèdre idéal est un polyèdre dans  $\mathbb{H}^3 \cup \mathbb{S}_\infty^2$  tel que tous les sommets sont dans la sphère-à-l'infini (ce sont des sommets idéaux), et toutes les arêtes sont des géodésiques hyperboliques.

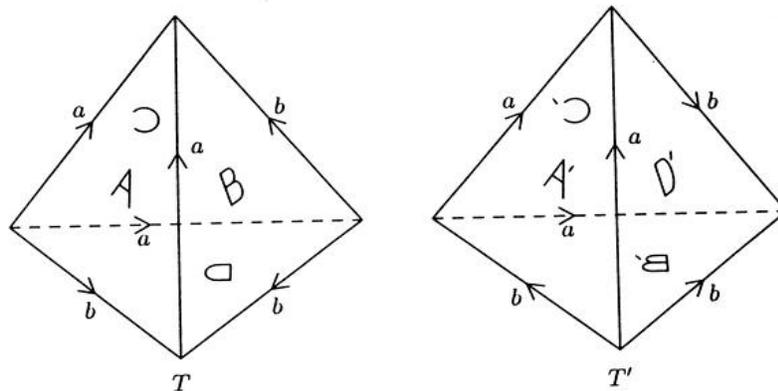
Un appariement de face pour un ensemble de polyèdres  $\mathcal{P}$  est un ensemble fini  $\Phi$  d'isométries tel que chaque isométrie envoie une face  $S$  d'un polyèdre  $P$  sur une face  $S'$  d'un polyèdre  $P'$ . L'appariement de face  $\Phi$  des faces  $S$  s'étend en un appariement des sommets des polyèdres que l'on peut considérer comme une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets. Les classes d'équivalence sont appelées *cycles*, ou point "cusp". Si  $[x] = \{x_1, \dots, x_m\}$  est un cycle, et pour chaque sommet  $x_i$  du polyèdre  $P_i$  on note l'angle solide  $\omega_i$  alors on doit avoir la somme des angles solides  $\omega[x] = \omega_1 + \dots + \omega_m = 4\pi$  pour que le recollement soit régulier.

Soit  $M$  la 3-variété hyperbolique obtenue en recollant une famille finie de polyèdres convexes de volume fini dans  $\mathbb{H}^3$ . Soit  $v$  un sommet idéal d'un polyèdre  $P_v$ . On appelle *étoile* de  $v$  noté  $L(v)$  l'intersection entre le polyèdre et une horosphère centrée en  $v$  suffisamment petite.  $L(v)$  est donc un polygone euclidien compact sur l'horosphère et on peut montrer que  $\Phi$  correspond à un appariement de cotés des polygones  $\{L(u) : u \in [v]\}$ , où  $[v]$  est le cycle de  $v$ . Notons alors  $L[v]$  l'espace obtenu par recollement des polygones selon  $\Phi$ .  $L[v]$  est donc une surface euclidienne appelée *étoile* du point "cusp"  $[v]$  de la 3-variété hyperbolique  $M$ . Si les éléments de  $\Phi$  préservent l'orientation alors  $L[v]$  est un 2-tore (topologiquement).

Pour que la structure hyperbolique sur  $M$  soit complète il faut et il suffit que, pour chaque point "cusp",  $L[v]$  soit complète.

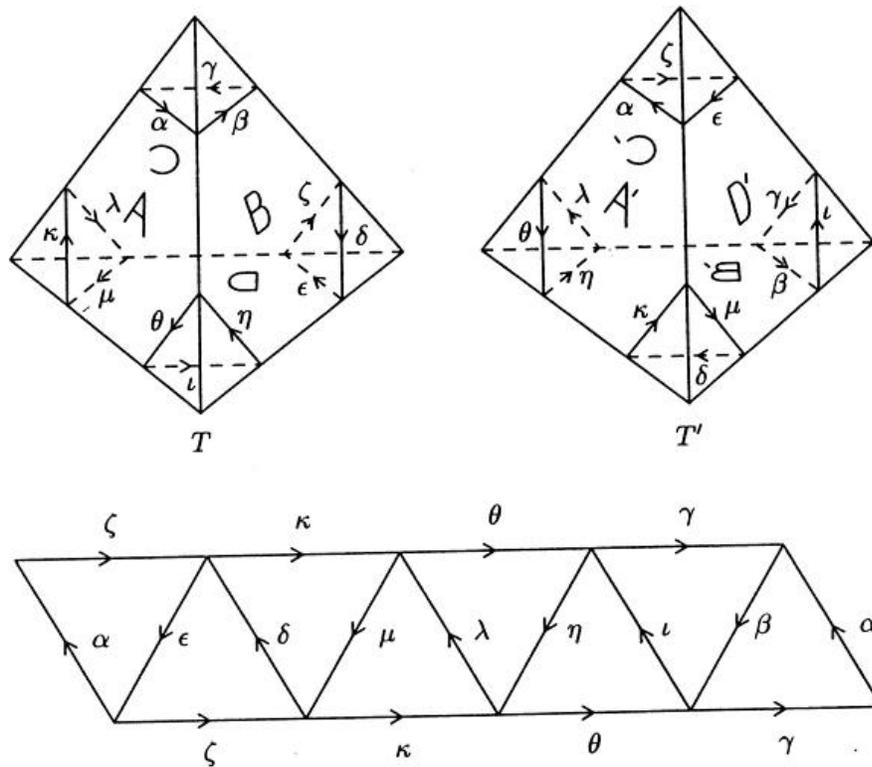
**Exemple :** Recollement de deux tétraèdres réguliers.

Soit  $T$  et  $T'$  deux tétraèdres idéaux réguliers disjoints. On indexe les faces et les arêtes comme dans la figure ci dessous :



**Figure 6 :** Motif de recollement des deux tétraèdres

On recolle les deux tétraèdres avec l'unique appariement de face qui envoie  $S$  sur  $S'$  et qui respecte l'indexation des arêtes pour  $S = A, B, C, D$ . On doit vérifier que l'espace quotient  $M$  obtenu après les identifications est une 3-variété hyperbolique. Il est clair que les points de l'intérieur des 2 tétraèdres possèdent un voisinage hyperbolique, de même que les points de l'intérieur des faces qui possèdent deux demi voisinages (un dans  $T$ , l'autre dans  $T'$ ). Il reste à voir que les points de l'intérieur d'une arête possèdent bien un voisinage hyperbolique, ce qui équivaut à dire que la somme des angles diédraux d'une classe d'arêtes est de  $2\pi$ . Or on peut voir qu'il y a 6 points dans chaque classe d'arête et que l'angle diédral d'une arête dans un tétraèdre régulier est de  $\pi/3$ . Par contre après identification on voit qu'il n'y a qu'un seul sommet  $\omega$ , et la somme des angles solides est de  $2\pi$  et non de  $4\pi$ . C'est la raison pour laquelle on a choisis des tétraèdres idéaux de sorte que les sommets ne sont pas dans la variété puisqu'ils sont à l'infini. Le lien du point "cusp" est donc un tore, ce que l'on peut voir sur la figure suivante.



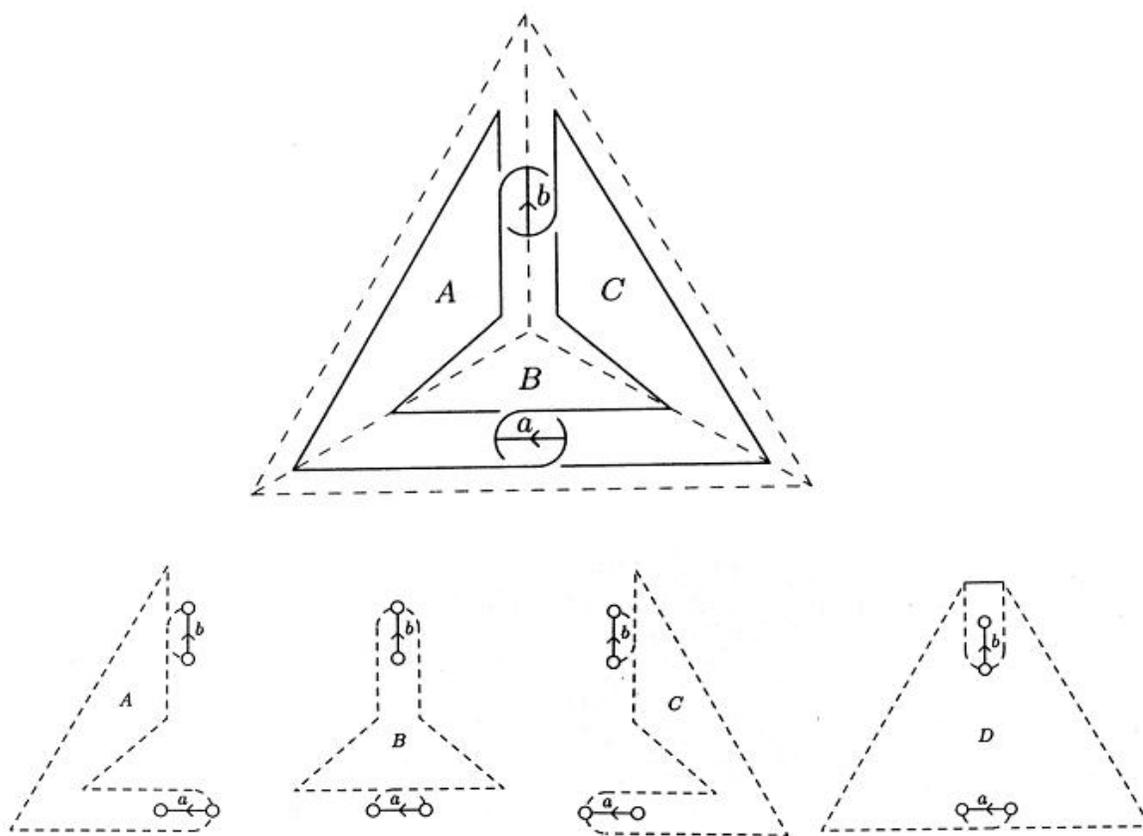
**Figure 7 :** L'étoile du point "cusp" de  $M$

Nous allons voir dans la partie suivante que la variété  $M$  que l'on vient de construire, est homéomorphe au complémentaire du nœud en huit  $S^3/K$ .

### III - Complémentaire du nœud en huit

#### A. Drapage sur le tétraèdre

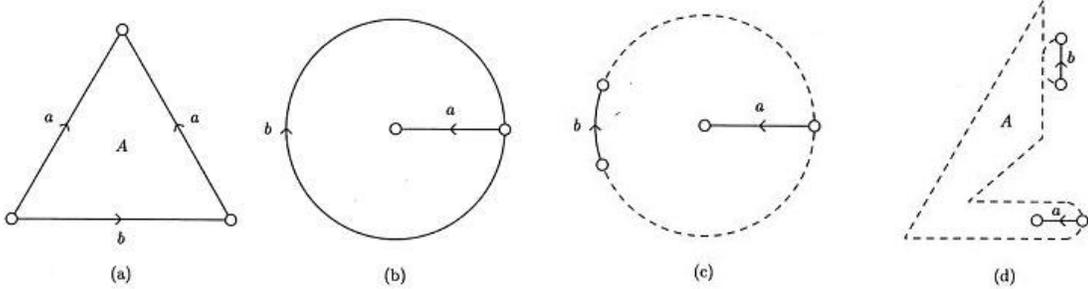
Soit  $K$  le nœud en huit dans  $\mathbb{S}^3$ , on va montrer que le complémentaire du nœud  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  est homéomorphe à la 3-variété hyperbolique  $M$  que l'on a obtenue à la partie précédente. Pour cela, on drape le nœud  $K$  sur un tétraèdre, et on ajoute deux arcs orientés  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  qui sont là pour désingulariser la surface créée par  $K$ . Ces deux arcs orientés vont correspondre aux arêtes des tétraèdres que l'on recolle pour obtenir  $M$ . On considère donc le 2-complète  $M$  dont le 1-squelette est l'union de  $K$  et des deux arcs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$ . Le 2-complète est découpé en quatre 2-cellules  $A, B, C, D$  représentées dans la figure ci dessous :



**Figure 8 :** Le 2-complète  $L$  et les quatres 2-cellules

Ces quatre 2-cellules forment le 2-complète  $L$ , si on ajoute le nœud  $K$  à la place des pointillés. En déformant la cellule  $A$  par des homéomorphismes, on obtient la face  $A$  du tétraèdre  $T$  de la partie précédente avec le bon motif de recollement comme on le voit

dans la figure suivante :



**Figure 9** : Déformation de la 2-cellule  $A$

On peut faire la même chose avec les cellules  $B, C, D$  et on arrive aux faces  $B, C, D$  du tétraèdre  $T$ . Ces déformations permettent de voir que l'image dans  $M$  de  $\partial T$ , le bord du tétraèdre est homéomorphe à  $L \setminus K$  le 2-complète auquel on retire le nœud.

De plus en retractant  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  à des points on peut remarquer que  $L$  a le type d'homotopie de la sphère  $\mathbb{S}^2$ . En conséquence  $\mathbb{S}^3 \setminus L$  est l'union de deux 3-boules ouvertes, et on va maintenant essayer de trouver la décomposition cellulaire du bord des boules qui est le 2-complète. On peut observer que chacun des arcs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  rencontrent les quatre 2-cellules de  $L$ . On coupe  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  le long de l'intérieur des 2-cellules et on sépare les arcs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  de façon à faire apparaître deux 3-variétés  $N$  et  $N'$  dont les bords sont des 2-sphères moins quatre points, avec la même décomposition cellulaire que  $T$  et  $T'$ . On peut donc construire une fonction

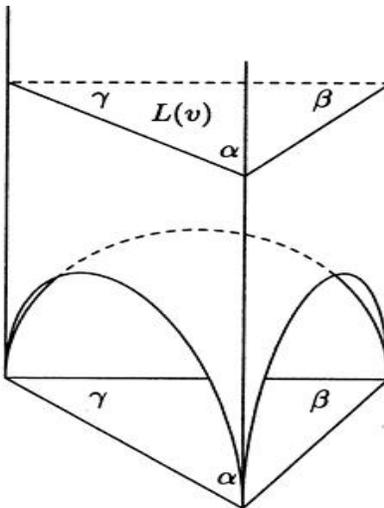
$$\Phi : N \amalg N' \rightarrow T \amalg T'$$

qui induit un homéomorphisme de  $\mathbb{S}^3 \setminus K$  sur  $M$ . Donc la 3-variété  $M$  obtenue par recollement de deux tétraèdres idéaux réguliers est homéomorphe au complémentaire du nœud en huit dans  $\mathbb{S}^3$ .

Pour un nœud quelconque, la méthode est une généralisation de cet exemple. Soit  $K$  un nœud hyperbolique,  $P$  un plan de projection pour  $K$ , and  $G(K)$  le diagramme de  $K$  sur  $P$ . Ce diagramme induit une décomposition cellulaire de  $\mathbb{S}^3$ ; les 0-cellules étant les intersections, les 1-cellules étant les arcs de  $G(K)$ , les 2-cellules étant les régions de  $P \setminus G(K)$  et les 3-cellules étant les deux régions de  $\mathbb{S}^3 \setminus P$  qui sont simplement des 3-boules. On modifie maintenant cette décomposition en modifiant chaque point d'intersection de  $G(K)$  comme suit. A chaque point d'intersection on fait passer l'arc du dessus par dessus le plan  $P$  et l'arc du dessous en dessous, et on ajoute un court segment vertical entre les deux arcs. Cette construction donne un nouveau complexe dont les 0-cellules sont les extrémités des segments, les 1-cellules sont les arêtes de  $G(K)$  auxquelles on ajoute les segment qu'on a ajouté, les 2-cellules sont les mêmes régions que précédemment mais légèrement modifiées au voisinage des segment, et les 3-cellules sont toujours deux 3-boules. C'est à partir de cette décomposition du complémentaire que la décomposition en tétraèdre peut se faire.

## B. Calcul du volume hyperbolique

On commence par étudier la géométrie des tétraèdres idéaux. On se place donc dans  $\mathbb{H}^3$  et soit  $T$  un tétraèdre idéal dont on peut supposer qu'un de ses sommets se trouve à l'infini. La classe de similarité de l'étoile de  $L(v)$  (où  $v = \infty$ ) détermine  $T$  à congruence près, c'est à dire que  $T$  est déterminé par le triangle formé par les trois autres sommets (voir fig 8).



**Figure 10** : Un tétraèdre idéal dans  $\mathbb{H}^3$

Ce triangle est déterminé par les trois angles diédraux  $\alpha, \beta, \gamma$  des arêtes incidentes à  $v$  qui sont tels que  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ . De plus  $T$  étant idéal les angles diédraux des arêtes opposées de  $T$  sont égaux. Donc la classe de similarité de l'étoile  $L(v)$  ne dépend pas du choix de  $v$ . De plus comme Thurston le décrit dans [7], la classe de similarité de ce triangle, et donc le tétraèdre tout entier, est entièrement déterminée par un unique nombre complexe à partie imaginaire positive. En effet soit  $\Delta = \Delta(u, v, w)$  un triangle euclidien du plan complexe avec les sommets  $u, v, w$ . A chaque sommet de  $\Delta$  on associe le rapport des côtés incidents, par exemple  $z(u) = \frac{w-u}{v-u}$  et de même pour les deux autres sommets. Ce qui nous intéresse étant la classe de similarité, on peut envoyer le sommet  $v$  sur 0 et  $w$  sur 1. Il vient alors que  $z(u)$  détermine entièrement  $z(v)$  et  $z(w)$  et donc la classe de similarité du triangle. Donc  $T$  peut se représenter par un unique nombre  $z \in \mathbb{C}$  appelé le paramètre tétraédrique de  $T$ . Ou bien on peut le représenter par les trois angles diédraux  $\alpha, \beta, \gamma$ , on note alors  $T = T_{\alpha, \beta, \gamma}$

Pour calculer le volume d'un tétraèdre idéal on utilise la fonction de Lobachevsky  $\Lambda(\theta)$  définie comme suit :

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt.$$

**Théorème III.B.1 :** *Le volume du tétraèdre idéal  $T_{\alpha,\beta,\gamma}$  est donné par*

$$\text{Vol}(T_{\alpha,\beta,\gamma}) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma)$$

Ici le tétraèdre qui nous interesse est celui dont tous les angles diédraux sont  $\pi/3$ . Ce tétraèdre régulier joue un rôle esentiel dans la théorie des 3-variétés. En particulier le plus grand volume possible pour un tétraèdre idéal hyperbolique est atteint pour ce tétraèdre, on le note  $v_0 = 3\Lambda(\pi/3)$ . Approximativement on a  $v_0 = 1,0149416\dots$

## C. Volume des complémentaires de nœud

La partie précédente nous montre que le volume du complémentaire du nœud en huit est de  $2v_0 = 2,0298832\dots$ . De la même façon on peut calculer le volume du complémentaire de n'importe quel nœud hyperbolique. Le problème de savoir quand deux nœuds sont équivalents ou non est un problème important de la théorie des nœuds. On sait que les nœuds premiers sont déterminés par leurs complémentaires ce qui, dans le contexte des nœuds hyperbolique montre que deux nœuds sont équivalents si et seulement si leurs complémentaires sont isométriques en tant que 3-variétés hyperbolique, ou encore que les groupes des nœuds sont conjugués dans  $\mathbb{H}^3$ . Par contre le volume hyperbolique n'est pas suffisant pour déterminer le nœud, on peut simplement dire que deux nœuds qui n'ont pas le même volume ne sont pas équivalents. Cela étant dit il est intéressant de noter qu'il ne peut y avoir qu'un nombre fini de nœuds dont le complémentaires aient le même volume, ce qui en fait un outil intéressant pour distinguer les nœuds (par exemple il existe un nombre infini de nœud avec le même polynome d'Alexander ou bien le même polynome HOMFLY, qui sont deux invariants très utilisés).

Il y a maintenant des questions évidentes qui se posent. Est ce qu'il y a une borne supérieure au volume d'un complémentaire de nœud, et de la même façon existe t'il une borne inférieure ?

Un théorème intéressant dit qu'il y a une borne inférieure au volume d'une 3-variété hyperbolique, donc en particulier au volume d'un complémentaire de nœud. Cependant on ne sait pas encore si le complémentaire du nœud en huit est le plus petit nœud hyperbolique, même si plusieurs indices laissent à penser que cette conjecture est vraie. Par contre on peut construire des complémentaires de nœuds hyperbolique de volume arbitrairement grand.

## Conclusion

La construction de la structure hyperbolique du nœud en huit peut être considérée comme la plus simple, étant donné que le nœud en huit est le plus "simple" des nœuds hyperboliques. En effet, le même principe peut être appliqué pour construire la structure hyperbolique sur n'importe quel nœud hyperbolique, cependant la grande difficulté de cette construction est de trouver le 2-complète qui permet de mettre en relation le nœud et le polyèdre.

La théorie des nœuds a pris une part essentielle dans la compréhension de la topologie des 3-variétés, et ses applications dans ce domaine sont très diverses. Par exemple la chirurgie de Dehn sur les nœuds donne lieu à un théorème puissant de Rocklin, Wallace et Lickorish, qui dit que toute 3-variété compacte orientée peut être obtenue par chirurgie de Dehn sur un entrelacs  $E$  (union disjointe des nœuds  $K_1, \dots, K_n$ ).

## Références

- [1] Calahan P. J., Reid A. W. *Hyperbolic Structures on Knot Complements*
- [2] Adams C. *The Knot Book*, W. H. Freeman and Co, 1991
- [3] Burde G., Zieschang H. *Knots*, De Gruyter Studies in math. 5, De Gruyter, 1985.
- [4] Rolfsen D. *Knots and links*, Publish or Perish, 1976.
- [5] Benedetti R. et Petronio C. *Lectures on Hyperbolic Geometry*, Springer-Verlag, 1991.
- [6] Ratcliffe J. *Foundations of Hyperbolic 3-manifolds*, Graduate Texts in Math. 149, Springer-Verlag, 1994.
- [7] Thurston W. P. *The Geometry and Topology of 3-manifolds*, Princeton University mimeographed notes, 1979.
- [8] Deruelle A. , Mémoire de DEA, 1997.