TRAVAUX DIRIGÉS DE STRUCTURES ALGÈBRIQUES

FRÉDÉRIC PALESI

Groupes

Exercice 1 (Loi de composition interne).

- (1) Sur $\mathbb{R}$, on définit la loi de composition interne $*$: $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, x * y = x + y - xy$.
Etudier les propriétés de la loi $*$.
- (2) Sur $\mathbb{R}$, on définit la loi $\square$: $\forall(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \square y = kxy + k'(x + y)$, avec k et k' deux réels donnés. Déterminer (k, k') pour que $\square$ soit associative.

Exercice 2 (Sommes de carrés).

Soit $E = \{p^2 + q^2, (p, q) \in \mathbb{N}\}$.

- (1) Montrer que la multiplication usuelle est une loi de composition interne sur E .
- (2) $(E, \cdot)$ est-il un monoïde ? un groupe ?

Exercice 3 (Un groupe fini d'ordre 4).

Soient les quatre applications de $\mathbb{C}^*$ dans $\mathbb{C}^*$:

$$f_1(z) = z, f_2(z) = \frac{1}{z}, f_3(z) = -z, f_4(z) = -\frac{1}{z}$$

Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi $\circ$.

Exercice 4 (Exemples de groupes).

Montrer que les lois suivantes munissent l'ensemble G indiqué d'une structure de groupe, et préciser s'il est abélien

- (1) Sur $G =]-1, 1[$, la loi $\star$: $(x \star y) = \frac{x + y}{1 + xy}$.
- (2) Sur $G = \mathbb{R}^2$, la loi $\odot$: $(x, y) \odot (x', y') = (x + x', ye^{x'} + y'e^x)$.

Exercice 5 (Tous les éléments sont réguliers).

Soit E un ensemble fini muni d'une loi de composition interne $\star$ associative. On suppose que tous les éléments de E sont réguliers, et on fixe $a \in E$.

- (1) Démontrer qu'il existe $e \in E$ tel que $a \star e = a$.
- (2) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $e \star x = x$.
- (3) Démontrer que, pour tout $x \in E$, on a $x \star e = x$.
- (4) Démontrer que $(E, \star)$ est un groupe.
- (5) Le résultat subsiste-t-il si E n'est pas fini ?

Exercice 6 (Exemples de sous-groupes).

Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-groupes de G .

- (1) $Z(G) = \{x \in G \mid \forall y \in G, x \cdot y = y \cdot x\}$. ($Z(G)$ s'appelle le centre de G .)
- (2) $aHa^{-1} = \{x \in G \mid \exists h \in H, x = a \cdot h \cdot a^{-1}\}$ avec H un sous-groupe de G .

Exercice 7 (Groupe produit).

Soit $(G, \star)$ et $(H, \square)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\circ$ définie par :

$$(x, y) \circ (x', y') = (x \star x', y \square y')$$

- (1) Montrer que $(G \times H, \circ)$ est un groupe.
- (2) Si G est d'ordre 2, dresser la table de $G \times G$.

Exercice 8 (Groupes de rotations du plan).

- (1) Soit ABC un triangle équilatéral du plan. Déterminer l'ensemble des rotations laissant invariant $\{A, B, C\}$. Montrer que c'est un groupe pour la loi $\circ$.
- (2) Faire de même pour un carré $ABCD$.

Exercice 9 (Translations surjectives).

Soit G un ensemble non-vide muni d'une loi de composition interne $\cdot$ associative telle que :

$$\forall a, b \in G, \exists x, y \in G \text{ tq } a = x \cdot b = b \cdot y$$

Montrer que $(G, \cdot)$ est un groupe.

Exercice 10 (Produit de deux sous-groupes).

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et A, B deux sous-groupes. On note $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$.

- (1) Montrer que $A \cdot B$ est un sous-groupe de G si et seulement si $A \cdot B = B \cdot A$.
- (2) On suppose que A et B sont finis et que $A \cap B = \{e\}$. Montrer que $A \cdot B$ est fini et que $|A \cdot B| = |A| \times |B|$.

Exercice 11 (Image réciproque, image directe de sous-groupe).

Soient $(G, \cdot)$ et $(G', \cdot)$ des groupes et $f \in \text{Hom}(G, G')$.

- (1) Montrer que si H' est un sous-groupe de G' , alors $f^{-1}\{H'\}$ est un sous-groupe de G .
- (2) Montrer que si H est un sous-groupe de G alors $f(H)$ est un sous-groupe de G' .
- (3) Retrouver que $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont des sous-groupes de G et G' .

Exercice 12 (Un endomorphisme).

Soit le morphisme $\phi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par

$$\begin{aligned} \phi(f) : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) + f(-x) \end{aligned}$$

- (1) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +)$.
- (2) Déterminer son noyau et son image.

Exercice 13 (Loi Δ).

Soit E un ensemble et $G = \mathcal{P}(E) = \{A \subset E\}$ l'ensemble des parties de E . On rappelle que si $A, B \in G$, la différence symétrique est $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

- (1) Montrer que (G, Δ) est un groupe commutatif.

- (2) Pour $a \in E$ on définit $\phi_a : G \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par $\phi_a(X) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \notin X \\ 1 & \text{si } a \in X \end{cases}$.

Montrer que ϕ_a est un morphisme de groupes de (G, Δ) vers $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

- (3) On prends $E = \{1, \dots, n\}$ et on note

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \\ X &\longmapsto (\phi_1(X), \dots, \phi_n(X)). \end{aligned}$$

Montrer que ϕ est un Isomorphisme de groupes

Exercice 14 (Endomorphismes d'ensembles de nombres).

- (1) Trouver tous les endomorphismes et les automorphismes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.
- (2) Trouver tous les endomorphismes du groupe $(\mathbb{Q}, +)$.
- (3) Trouver tous les endomorphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 15 (Vrai ou Faux).

- (1) Les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$ sont infinis.
- (2) Soit l'application

$$\begin{aligned} f : G &\rightarrow G \\ x &\mapsto x^{-1} \end{aligned}$$

- (a) f est un morphisme de groupe.
- (b) f est bijective.
- (c) $\{f^n | n \in \mathbb{Z}\}$ est un groupe fini.
- (3) La réunion de deux sous-groupes n'est jamais un sous-groupe
- (4) L'application

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +) &\longrightarrow (\mathbb{R}, +) \\ f &\longmapsto f(0) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupe ? l'application est-elle injective ?

Exercice 16 (Petit théorème de Lagrange).

Soit $(G, \cdot)$ un groupe commutatif fini et $g \in G$. Montrer que l'ordre de g divise le cardinal de G . On pourra considérer $\prod_{h \in G} (gh)$.

Exercice 17 (Ordre d'un élément).

- (1) Soient G, H deux groupes et $f \in \text{Hom}(G, H)$. Soit $x \in G$. Comparer l'ordre de x et de $f(x)$.
- (2) Soient $x, g \in G$. Comparer l'ordre de x et de gxg^{-1} .
- (3) Soient $a, b \in G$. Comparer l'ordre de ab et de ba .

Exercice 18 (Ordre de ab).

Soit $x, y \in G$ tels que x est d'ordre a et y est d'ordre b avec $a \wedge b = 1$. De plus $xy = yx$.

Déterminer l'ordre de ab .

Exercice 19 (Pas de sous-groupe).

Soit G un groupe n'ayant pas de sous-groupe non-trivial.

- (1) Montrer que G est monogène.
- (2) Montrer que G est fini.
- (3) Montrer que $|G|$ est un nombre premier.

Exercice 20 (Groupe du pentagone).

On considère le groupe P du pentagone régulier, composé des 5 rotations d'angles $2k\pi/5$ avec $k = 0 \dots 4$ et des cinq symétries par rapport aux droites joignant le centre à un sommet du pentagone.

- (1) Dessiner le pentagone avec les axes de symétries.
- (2) Trouver tous les sous-groupes de P
- (3) Montrer que tous les sous-groupes sont cycliques.
- (4) Est-ce que P est cyclique ?

Exercice 21 (Groupes de cardinal premier).

Soit p un nombre premier et G un groupe de cardinal p .

- (1) Montrer que G est cyclique.
- (2) En déduire que tous les groupes de cardinal p sont isomorphes.

Exercice 22 (Générateurs des groupes cycliques).

Soient $n \geq 2$ et $k \geq 1$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

- (1) k est un générateur de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- (2) k est inversible (pour la multiplication) dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- (3) n et k sont premiers entre eux.

Exercice 23 (Sous-groupes d'un groupe cyclique).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ et $d = \text{pgcd}(k, n)$.

- (1) Déterminer l'ordre de k dans G .
- (2) Montrer que k et d engendrent le même sous-groupe de G .
- (3) En déduire que pour tout diviseur d de n , il existe un unique sous-groupe C_d d'ordre d .
- (4) Quels sont tous les sous-groupes de G ?

Exercice 24 (Groupe d'ordre pair et impair).

- (1) Soit G un groupe fini de cardinal pair. Montrer qu'il existe un élément d'ordre 2.
- (2) Soit G un groupe fini de cardinal impair. Montrer que $\forall x \in G, \exists! y \in G, x = y^2$

Exercice 25 (Groupe de similitude).

Pour $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in \mathbb{C}$, on note $f_{\alpha, \beta} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \alpha z + \beta$.

- (1) Montrer que l'ensemble des fonctions $f_{a,b}$ est un groupe pour la loi $\circ$.
- (2) Ce groupe est-il commutatif
- (3) A quelle(s) condition(s) sur α et β , l'élément $f_{\alpha, \beta}$ est-il d'ordre fini.

Exercice 26 (Groupes d'ordre 4).

Montrer qu'il n'existe que deux groupes d'ordre 4 à isomorphisme près. (Raisonnement sur l'exposant du groupe)