

FEUILLE DE TD N°2

Groupes finis (suite)

Exercice 27 (Petit théorème de Fermat).

Soit p un nombre premier. On se place dans le monoïde $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \times)$.

- (1) Montrer que tous les éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont inversibles pour la multiplication.
- (2) En déduire que pour tout $a \in \mathbb{Z}$, le nombre p divise $a^p - a$. (petit théorème de Fermat)

Exercice 28 (Groupe d'exposant 2).

Soit G un groupe fini tel que $\forall x \in G, x^2 = e$

- (1) Montrer que G est commutatif.
- (2) Soit H un sous-groupe strict de G et $x \notin H$. On note K le sous-groupe engendré par $H \cup \{x\}$. Montrer que $|K| = 2|H|$.
- (3) En déduire que $|G|$ est une puissance de 2.

Exercice 29 (Groupes d'ordre 6).

Le but de l'exercice est de trouver tous les groupes d'ordre 6, à isomorphisme près. Soit G un groupe d'ordre 6.

- (1) Supposons que G est commutatif.
 - (a) Montrer que G ne peut pas être constitué uniquement d'éléments d'ordre 2. (utiliser l'exercice précédent.)
 - (b) Montrer que G ne peut pas être constitué uniquement d'éléments d'ordre 3.
 - (c) En déduire que G possède un élément d'ordre 6. (donc G est cyclique)
- (2) Supposons que G n'est pas commutatif
 - (a) Montrer que G n'a pas d'éléments d'ordre 6.
 - (b) Montrer que G ne peut pas être constitué uniquement d'éléments d'ordre 2. (utiliser l'exercice précédent.)
 - (c) En déduire qu'il existe x d'ordre 2 et y d'ordre 3 tels que $G = (\langle y \rangle) \cup (x\langle y \rangle)$.
- (3) En déduire qu'il n'y a que deux groupes d'ordre 6 à isomorphisme près.

Exercice 30 (Groupe d'ordre ab).

Soit G un groupe commutatif fini d'ordre ab avec $a \wedge b = 1$.

On pose $A = \{x \in G | x^a = e\}$ et $B = \{x \in G | x^b = e\}$.

- (1) Montrer que A et B sont des sous-groupes de G .
- (2) Montrer que $A \cap B = \{e\}$ et $AB = G$.

Exercice 31 (Groupes d'ordre pq).

Soient p, q deux nombres premiers et G un groupe abélien tel que $|G| = pq$. Montrer que G est cyclique.

Exercice 32 (Théorème de Cayley).

Soit $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ un groupe fini d'ordre n . On note $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations sur n éléments (c'est à dire l'ensemble des bijections de $\{1, \dots, n\}$ dans $\{1, \dots, n\}$).

- (1) Montrer que le groupe des $\text{Bij}(G)$ des bijections de G dans G est isomorphe au groupe $\mathcal{S}_n$.
- (2) Soit $g \in G$. Soit l'application suivante

$$\begin{aligned}\varphi_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gx\end{aligned}$$

Montrer que φ_g est bijective.

- (3) Considérons maintenant l'application suivante

$$\begin{aligned}\Phi : G &\longrightarrow \text{Bij}(G) \\ g &\longmapsto \varphi_g\end{aligned}$$

Montrer que Φ est un morphisme de groupes.

- (4) Montrer que Φ est injective et en déduire que tout groupe fini est isomorphe à un sous-groupe de $\mathcal{S}_n$.

Sous-groupes distingués, groupe quotient

Exercice 33 (Groupes distingués).

Soit H et K deux sous-groupes distingués du groupe G .

- (1) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de G .
- (2) Dans le cas où $H \cap K = \{e\}$, montrer que $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe distingué de G .

Exercice 34. Montrer que l'image réciproque d'un sous-groupe distingué par un morphisme est un sous-groupe distingué. Que dire de l'image directe d'un sous-groupe distingué ?

Exercice 35. Montrer qu'un sous-groupe d'indice 2 dans G est distingué dans G .

Exercice 36. Soit H un sous-groupe de G . On suppose que le produit de deux classes à gauche modulo H est une classe à gauche modulo H , c'est à dire :

$$\forall x, y \in G, \exists z \in G, (xH)(yH) = \{xh_1yh_2 | h_1, h_2 \in H\} = zH$$

Montrer que H est distingué

Exercice 37 (Groupes simples).

Un groupe est dit *simple* si il ne possède pas de sous-groupe distingué non trivial. Soit G un groupe simple.

- (1) Soit H un groupe quelconque. Montrer que tout morphisme $f : G \rightarrow H$ est soit injectif, soit constant.

- (2) Montrer que si G est simple abélien et fini alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Exercice 38.

Soit $H \triangleleft G$ avec $[G : H] = n$.

- (1) Montrer que pour tout $a \in G$, $a^n \in H$.
- (2) Donner un exemple de groupe G avec un sous-groupe H non distingué pour lequel la conclusion précédente est fausse.

Exercice 39. Soit G un groupe fini et H un sous-groupe distingué. On suppose $|H| = k$ et $[G : H] = m$ avec $k \wedge m = 1$. En utilisant l'exercice précédent, montrer que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre k .

Exercice 40. Montrer que si $G/Z(G)$ est monogène, alors G est abélien.

Exercice 41.

Soit G le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, on note $\Psi(x)$ la classe de x dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

- (1) Montrer que $\Psi\left(\frac{35}{6}\right) = \Psi\left(\frac{5}{6}\right)$. En déduire l'ordre de $\Psi\left(\frac{35}{6}\right)$.
- (2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe $\alpha(x) \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ tel que $\Psi(x) = \Psi(\alpha(x))$.
- (3) Montrer que tout élément de G est d'ordre fini.
- (4) Montrer que G n'est pas d'exposant fini.

Exercice 42. Soit $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \mathbb{R}_+^*$ le sous-groupe des réels strictement positifs. Décrire le groupe quotient G/H .

Exercice 43. Montrer que $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$.

Exercice 44 (Automorphismes intérieurs).

Soit G un groupe. Pour tout $g \in G$ on note φ_g l'application de G dans lui-même donnée par $\varphi_g(h) = ghg^{-1}$.

On note $\text{Int}(G) = \{\varphi_g | g \in G\}$.

- (1) Montrer que $\text{Int}(G)$ est un sous-groupe distingué de $\text{Aut}(G)$.
- (2) Soit f l'application $G \rightarrow \text{Int}(G)$ donnée par $f(g) = \varphi_g$. Montrer que f est un morphisme et déterminer $\text{Ker } f$.
- (3) En déduire que $G/Z(G)$ est isomorphe à $\text{Int}(G)$.

Exercice 45 (Groupe Diédral).

Soit P_n un polygone régulier à n coté dans le plan avec $n \geq 3$. On note D_n le groupe des isométries du plan qui laissent invariant P_n . On rappelle qu'une isométrie du plan ayant un point fixe est soit une rotation (autour du point fixe), soit une symétrie (selon une droite passant par le point fixe).

- (1) Montrer que D_n possède un sous-groupe D_n^+ qui est cyclique d'ordre n .
- (2) Montrer que D_n possède un sous-groupe d'ordre 2.
- (3) Montrer que D_n est d'ordre $2n$, en déduire que D_n^+ est distingué.
- (4) Montrer que D_n est isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 46. Montrer que le groupe des matrices $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ est isomorphe au produit semi-direct $\text{SL}(2, \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}^*$.

Exercice 47.

Soient N et H deux groupes et $\phi : N \rightarrow \text{Aut}(H)$ un morphisme. On considère $G = N \rtimes_{\phi} H$

- (1) Montrer que G est commutatif si et seulement si N et H sont commutatifs et ϕ est trivial.
- (2) Plus généralement, décrire le centre du groupe G en fonction de ϕ et des centres $Z(N)$ et $Z(H)$.

Exercice 48 (Commutateurs et groupe dérivé).

Soit G un groupe et $x, y \in G$. On appelle *commutateur* de x et y l'élément $[x, y]$ défini par $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. On note D le sous-groupe de G engendré par tous les commutateurs.

- (1) Que vaut D lorsque G est abélien.
- (2) Montrer que D est un sous-groupe distingué.
- (3) Soit H un sous-groupe distingué de G et $x, y \in G$. On note $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les classes de x et y dans G/H . Montrer

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \bar{y} \cdot \bar{x} \Leftrightarrow [x, y] \in H$$

- (4) En déduire que G/H est commutatif si et seulement si H contient D .

Exercice 49.

Soit $G = (\text{GL}(2, \mathbb{R}), \times)$ le groupe des matrices inversibles. On note

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) Montrer que H est un sous-groupe abélien de G .
- (2) Montrer que H est monogène. Est-ce que H est distingué dans G .
- (3) Déterminer l'ordre de A et B dans G .
- (4) Montrer que H est contenu dans le sous-groupe engendré $K = \langle A, B \rangle$.
- (5) Que pensez-vous des deux assertions suivantes ?
 - Un groupe engendré par des éléments d'ordre fini est fini.
 - Un groupe engendré par des éléments d'ordre fini ne contient que des éléments d'ordre fini.

Exercice 50 (Deuxième théorème d'isomorphisme).

Soit $N \triangleleft G$ et $H < G$.

- (1) Montrer que $H \cap N$ est distingué dans H .
- (2) Montrer que HN est un groupe et que N est distingué dans HN .
- (3) On considère le morphisme $f : H \rightarrow HN/N$ définie par $f(h) = hN$ (avec hN la classe à gauche modulo N de l'élément $(h \cdot e) \in HN$).
 - Montrer que f est surjectif.
 - Montrer que $\text{Ker } f = H \cap N$
- (4) En déduire que $H/(H \cap N)$ est isomorphe à HN/N . (Deuxième théorème d'isomorphisme)