# Feuille de TD n°3

## Action de Groupe

---

**Exercice 51.** On considère le sous groupe $G < \mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$ suivant :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}^* \right\}$$

On considère l'action naturelle de $G$ sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Déterminer le stabilisateur de $x = (1,0)$ et le fixateur de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Décrire toutes les orbites de cette action.

**Exercice 52.**

(1) Montrer que l'action de $\mathrm{GL(n,\mathbb{R})}$ sur $\mathbb{R}^n$ n'est pas transitive.

(2) Montrer que l'action est transitive sur l'ensemble des bases. (l'action de $M \in \mathrm{GL(n,\mathbb{R})}$ sur une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est donnée par $M \cdot \mathcal{B} = \{M \cdot e_1, \ldots, M \cdot e_n\}$)

**Exercice 53** (Action)**.**
Soit $G = (\mathbb{R}, +)$ et $S = \{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité. On définit l'application

$$\begin{array}{lll} G & \times S & \longrightarrow S \\ \lambda & ,(x,y) & \longmapsto (x\cos(\lambda) + y\sin(\lambda), -x\sin(\lambda) + y\cos(\lambda)) \end{array}$$

(1) Montrer que cette application définit bien une action de $G$ sur $S$.

(2) Déterminer le stabilisateur et l'orbite de $(1,0) \in S$.

(3) En déduire que $S$ est en bijection avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

**Exercice 54.** Un groupe a 15 éléments agit sur un ensemble à 7 éléments. Montrer qu'il y a au moins un point fixe.

**Exercice 55.** Un groupe a 35 éléments agit sur un ensemble à 19 éléments sans point fixe. Déterminer le nombre d'orbites.

**Exercice 56.** Soit un groupe $G$ d'ordre $p^n$ avec $p$ premier qui agit sur un ensemble fini. On note Fix(G) l'ensemble des points fixes pour l'action, i.e. $\mathrm{Fix(G) = \{x \in X | \forall g \in G, g \cdot x = x\}}$.
Montrer que $\mathrm{Card(Fix(G)) \equiv |X| \bmod (p)}$.

**Exercice 57.**
Soit $G$ un groupe d'ordre $n$, et $h$ un élément d'ordre $q$. On fait agir $G$ sur lui-même par conjugaison. Montrer que $|\mathcal{O}(h)|$ divise $\frac{n}{q}$

**Exercice 58.**
On fait agir $G$ sur lui-même par conjugaison.

(1) Soit $x \in G$. Montrer que $|Z(G)|$ divise $|G_x|$.

(2) SI $G$ est non commutatif et $x \notin Z(G)$, montrer que $|Z(G)| < |G_x| < |G|$.

(3) En déduire que si $|G| = pq$ avec $p$ et $q$ premiers (non forcément distincts) alors $Z(G) = \{e\}$ ou $Z(G) = G$.

**Exercice 59** (Re-Théorème de Lagrange).
Soit $G$ un groupe et $H$ un sous-groupe de $G$. On fait agir $H$ sur $G$ par multiplication à droite, c'est à dire

$$\forall h \in H, \forall g \in G, h \cdot g = gh$$

Montrer que toutes les orbites ont le même cardinal. Retrouver le théorème de Lagrange.

**Exercice 60** (Isométries du cube).
On cherche le nombre d'élément du groupe $G < \mathrm{Isom}(\mathbb{R}^3)$ qui préserve le cube unité $[-1,1]^3 \subset \mathbb{R}^3$. On note $X = \{A, B, \dots, H\}$ l'ensemble des huit sommets du cube de telle sorte que $A$ et $B$ sont reliés par une arête (Faire un dessin). On a une action naturelle de $G$ sur $X$.

(1) Se convaincre que l'action de $G$ est transitive sur $X$.
(2) Montrer que $|G| = 8 \times |G_A|$
(3) Montrer que $|G_A| = 3 \times |G_A \cap G_B|$
(4) En déduire que $G$ est un groupe d'ordre 48. (Penser au point $(0,0,0)$)

**Exercice 61** (Centre d'un $p$-groupe).
Soit $p$ un nombre premier et soit $G$ un groupe d'ordre $p^n$ avec $n \geq 1$. On considère l'action de $G$ par conjugaison sur lui-même.

(1) Montrer que si $x \in G$ n'est pas un élément de $Z(G)$ alors $p$ divise $|\mathcal{O}(x)|$
(2) En déduire que $p$ divise $|Z(G)|$.
(3) Dans le cas où $n = 2$. montrer que $G$ est commutatif (Utiliser l'exercice 58).
(4) Donner la liste des groupes d'ordre $p^2$

**Exercice 62** (Groupes d'ordre 15).
On veut montrer ici que tout groupe d'ordre 15 est commutatif. on considère l'action de $G$ sur lui-même par conjugaison.

(1) Montrer que les orbites sont de cardinal 1, 3 ou 5.
(2) Supposons que $Z(G) = \{e\}$. Montrer qu'il y a forcément cinq orbites. L'orbite de $\{e\}$, trois orbites de cardinal 3 et une orbite de cardinal 5.
(3) Déterminer les ordres des éléments dans chacune de ces orbites et arriver à une contradiction.
(4) En déduire que $G$ est commutatif (Utiliser l'exercice 58).

**Exercice 63.** Soit $G$ un groupe. On fait agir $G$ sur lui-même par conjugaison. On appelle une orbite de cette action une *classe de conjugaison*. Soit $\mathcal{N}_G$ le nombre de classes de conjugaison de $G$

(1) Déterminer tous les groupes tels que $\mathcal{N}_G = 1$ ou $\mathcal{N}_G = 2$.
(2) Montrer que si $G$ est commutatif alors $\mathcal{N}_G = |G|$
(3) Soit $G$ un groupe d'ordre $n$ tel que $\mathcal{N}_G = 3$. Montrer qu'alors il existe $a \geq b > 0$ divisant $n$ tels que $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
(4) Montrer que les seules solutions sont $(n, a, b) = (3,3,3)$ ou $(4,4,2)$ ou bien $(6,3,2)$. (Montrer que $b \leq 3$ et faire au cas par cas.)
(5) En déduire tous les groupes avec $\mathcal{N}_G = 3$.