Feuille de TD n°4

Anneaux

Exercice 64. Montrer que $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire non intègre.

Exercice 65. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif. et $x, y \in A$.
Montrer que xy est inversible si et seulement si x et y sont inversibles.

Exercice 66. Soit A un anneau unitaire, $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$.
Montrer que $(1_A - x)$ est inversible. (Indication : Utiliser $(1 + x + ... + x^k)$)

Exercice 67.
Trouver toutes les structures d'anneaux possibles (en écrivant les tables) sur des ensembles à 2 ou 3 éléments.

Exercice 68. Soit $(G, +)$ un groupe abélien. On note A l'ensemble des endomorphismes de $(G, +)$. On munit l'ensemble A de la loi d'addition induite par $(G, +)$, c'est à dire

$$\forall \psi, \phi \in A, \forall g \in G, (\phi + \psi)(g) = \phi(g) + \psi(g)$$

(1) Montrer que $(A, +, \circ)$ est un anneau unitaire
(2) En posant $G = \mathbb{R}[X]$ le groupe des polynomes, trouver ϕ et $\psi \in A$ non inversibles tels que $\phi \circ \psi$ est inversible. En déduire que l'hypothèse de commutativité de l'exercice 2 est nécessaire.

Exercice 69 (Anneau produit)**.**
Soit A_1 et A_2 deux anneaux A. On munit l'ensemble $A_1 \times A_2$ des deux lois $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$\forall (a, b), (a', b') \in A_1 \times A_2, \begin{cases} (a, b) \oplus (a', b') = (a + a', b + b') \\ (a, b) \otimes (a', b') = (aa', bb') \end{cases}$$

(1) Montrer que $(A_1 \times A_2, \oplus, \otimes)$ est un anneau.
(2) Montrer que si A_1 et A_2 sont non nuls, alors cet anneau n'est pas intègre.

Exercice 70 (Elements nilpotents)**.** Soit A un anneau et $x \in A$. on dit que x est *nilpotent* si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. On se place tout d'abord dans le cas A commutatif. Soit x et y deux éléments nilpotents de A.

(1) Montrer que x n'est pas inversible.
(2) Montrer que xy est nilpotent.
(3) Montrer que $x + y$ est nilpotent.
(4) Trouver deux éléments nilpotents u et v dans un anneau non-commutatif avec uv qui n'est pas nilpotent. Faire de même avec $u + v$ non nilpotent.
(5) Montrer que même dans le cas non-commutatif, on a l'équivalence : (xy nilpotent $\Leftrightarrow$ yx nilpotent)

Exercice 71. Soit $\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n} | a \in Z, n \in \mathbb{N} \right\}$.
Montrer que $\mathbb{D}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Déterminer l'ensemble des inversibles de $\mathbb{D}$.

Exercice 72. Déterminer l'ensemble des inversibles, des diviseurs de 0 et des nilpotents de l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Exercice 73. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau.
(2) On définit la fonction $N(a+b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on a $N(xy) = N(x)N(y)$
(3) En déduire que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

Exercice 74 (Anneau de Boole)**.**
Soit A un anneau non nul tel que pour tout $x \in A$ on a $x^2 = x$. (on appelle A un *anneau de Boole*

(1) Si A est unitaire, montrer que le seul élément inversible est 1_A.
(2) Montrer $\forall x \in A, x + x = 0$.
(3) Montrer que A est commutatif.
(4) Soit $x, y \in A$. Calculer $xy(x+y)$. En déduire que si A contient plus de 3 éléments alors A n'est pas intègre.

Exercice 75 (Morphismes)**.**
Soit A, B deux anneaux unitaires et $\phi : A \to B$ un morphisme unitaire.

(1) Montrer que si A est inversible dans A alors $f(a)$ est inversible dans B.
(2) En déduire que $\phi_{|A^\times} : A^\times \to B^\times$ est un morphisme de groupe.
(3) Montrer qu'il n'y a pas de morphisme unitaire de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Exercice 76 (Polynômes)**.**
On considère l'anneau des polynomes $(\mathbb{R}[X], +, \times)$. Déterminer si les applications suivantes sont des morphismes d'anneaux :

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto P'(0) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \psi : \mathbb{R}[X] &\to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P &\mapsto \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ 0 & P(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exercice 77 (Anneau intègre fini)**.** Soit A un anneau fini.

(1) Soit $x \in A$. Montrer que si x n'est pas diviseur de 0 alors x est inversible
(2) En déduire que si A est intègre alors A est un corps
(3) Montrer que la caractéristique de A est non nulle.
(4) Montrer que si A est intègre alors la caractéristique de A est un nombre premier.

Exercice 78.
Soit A un anneau unitaire et I un idéal de A.

(1) Montrer que $I = A$ si et seulement si I contient un élément inversible.
(2) Dans le cas A commutatif, en déduire que A est un corps si et seulement si A n'a pas d'idéal non-trivial.

Exercice 79.
Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux et J un idéal de B. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A.

Exercice 80. Soit A un anneau commutatif et unitaire. On note $A[i]$ le produit $A \times A$ lorsqu'il est muni des opérations somme et produit définies, comme pour les complexes, par

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \qquad \text{et} \qquad (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + a'b).$$

(1) Vérifier que $A[i]$ est un anneau commutatif et unitaire.
(2) Montrer que l'ensemble des couples $(a, 0)$ forme un sous-anneau unitaire de $A[i]$, isomorphe à A. On notera a, au lieu de $(a, 0)$, un tel couple.
(3) On note i le couple $(0, 1)$. Vérifier qu'on a $i^2 = -1$ et que le couple (a, b) peut s'écrire $a + ib$.

Exercice 81. Soit K un corps et $K[i]$ l'anneau des couples $(a, b) = a + ib$, muni des opérations analogues aux complexes, comme dans l'exercice précédent [Exercice 80].

(1) Montrer que z est inversible dans $K[i]$ si et seulement si $a^2 + b^2 \neq 0$. (Penser à utiliser le *conjugué*, $\overline{z} = a - ib$).
(2) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
   - $K[i]$ est un corps
   - L'équation $a^2 + b^2 = 0$ a une unique solution $a = b = 0$
   - -1 n'est pas un carré dans K.
   - $K[i]$ est un anneau intègre.
(3) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau intègre mais n'est pas un corps.
(4) Montrer que $\mathbb{Q}[i]$ est un corps.

Exercice 82. Soient A un anneau intègre et $\alpha \in A$. Soit P un polynome de degré n à coefficients dans A. On dit que α est *racine de l'équation* (*de degré* n) $P(x) = 0$, si on a $P(\alpha) = 0$.

(1) Montrer qu'une équation de degré 1, $ax + b = 0$, a au plus une racine. Dans le cas où A est un corps, déterminer cette racine.
(2) Soient α et β deux racines distinctes d'une équation $P(x) = 0$, de degré n. Montrer, en mettant $(\beta - \alpha)$ en facteur dans l'expression $P(\beta) - P(\alpha)$, que β est racine d'une équation de degré $n - 1$ qu'on écrira.
(3) Montrer, par récurrence sur n, qu'une équation de degré n a au plus n racines.

Exercice 83. Soit K un corps fini.

(1) Si x est un élément non nul de K, montrer qu'il existe un entier d tel que $x^d = 1$.
(2) Déduire de l'exercice précédent [Exercice 82] que, pour tout d, il existe au plus d éléments de K tels que $x^d = 1$.
(3) Conclure que le groupe multiplicatif K^* des éléments non nuls de K est cyclique.

Exercice 84. Soit A un anneau commutatif unitaire de caractéristique p premier, $p \neq 0$. Montrer les assertions suivantes.

(1) Tout élément non nul de A est d'ordre p dans le groupe $(A, +)$
(2) Pour tout entier n et tout couple (a, b) d'éléments de A, on a
$$(a + b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}.$$
(3) Pour tout entier n, l'application $\sigma_n \colon A \to A$, définie par $\sigma_n = a^{p^n}$, est un morphisme d'anneaux unitaires.

Idéaux, Quotients

Exercice 85 (Suites réelles)**.** On considère l'anneau A des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur réelles, muni de l'addition et de la multiplication usuelle (c'est à dire les opérations $(u+v)_n = u_n + v_n$ et $(uv)_n = u_n v_n$). On considère les sous-ensembles suivants : $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites bornées, $\mathcal{C}$ l'ensemble des suites qui convergent vers 0 et $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites stationnaires. Autrement dit

$$\mathcal{B} = \{u \in A \mid \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M\}$$
$$\mathcal{C} = \left\{u \in A \mid \lim_{n\to\infty} u_n = 0\right\}$$
$$\mathcal{S} = \{u \in A \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, u_n = a\}$$

(1) Montrer que $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-anneaux de A. Déterminer si ce sont des idéaux de A.
(2) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont inclus dans $\mathcal{B}$. Déterminer si ce sont des idéaux de $\mathcal{B}$.
(3) Montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ est un idéal de A.
(4) Est-ce que cet idéal est principal ?

Exercice 86 (Opération sur les idéaux)**.**
Soit I et J deux idéaux d'un anneau A. On définit les deux ensembles

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$
$$I \cdot J = \left\{ z = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, x_i \in I, y_i \in J \right\}$$

(1) Montrer que $I + J$ et $I \cdot J$ sont des idéaux de A.
(2) Montrer que $I \cdot J \subset I \cap J$.
(3) Montrer que $(I + J).(I \cap J) \subset I \cdot J$.
(4) En déduire que si $I + J = A$ alors $I.J = I \cap J$. (on dit dans ce cas que I et J sont étrangers)
(5) Trouver un exemple où $I \cdot J$ n'est pas égal à $I \cap J$. (regarder les $n\mathbb{Z}$.)

Exercice 87. Soit $(G, +)$ un groupe abélien (son élément neutre est noté 0), et $(A, +, \circ)$ l'anneau des endomorphismes de G, tel qu'il est défini dans l'exercice 68. Soit $g \in G$ fixé, on pose

$$I_g = \{\phi \in A \mid \phi(g) = 0\}$$

(1) Montrer que I_g est un sous-anneau.
(2) Est-ce que I_g est un idéal ? (si oui le montrer, sinon donner un contre-exemple)

Exercice 88 (pgcd et ppcm)**.**
Soient m et n dans $\mathbb{Z}$.

(1) Montrer que si $m \wedge n = 1$ on a $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
(2) En déduire que si $m \wedge n = d$ on a $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.
(3) Montrer que $(m\mathbb{Z}) \cdot (n\mathbb{Z}) = (m \vee n)\mathbb{Z}$ où la notation $(m \vee n)$ est le ppcm(m,n).