Feuille de TD 3

Sous-groupes distingués, groupe quotient

Exercice 27. Montrer que l'image réciproque d'un sous-groupe distingué par un morphisme est un sous-groupe distingué. Que dire de l'image directe d'un sous-groupe distingué ?

Exercice 28 (Groupes distingués)**.**
Soit H et K deux sous-groupes distingués du groupe G.

(1) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de G.
(2) Dans le cas où $H \cap K = \{e\}$, montrer que $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 29 (Groupes simples)**.**
Soit G un groupe tel que G ne contient aucun sous-groupe distingué non trivial. (Un tel groupe est appelé groupe *simple*)

(1) Soit H un autre groupe quelconque. Montrer que tout morphisme $f : G \to H$ est soit injectif, soit constant.
(2) Montrer que si G est un groupe fini abélien et simple, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Exercice 30.

(1) Soit $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \mathbb{R}^*_+$. Décrire le groupe quotient G/H.
(2) Montrer que le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$. (Pour l'addition)

Exercice 31. Montrer que si $G/Z(G)$ est engendré par un seul élément, alors G est abélien.

Exercice 32.
Soit $(G, +)$ le groupe quotient $(\mathbb{Q}, +)$ par $\mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, on note $x + \mathbb{Z} \in G$ la classe de x dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(1) Montrer que $\frac{35}{6} + \mathbb{Z} = \frac{5}{6} + \mathbb{Z}$. En déduire l'ordre de $\frac{35}{6} + \mathbb{Z}$ dans G.
(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe $\alpha(x) \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ tel que $x + \mathbb{Z} = \alpha(x) + \mathbb{Z}$.
(3) Montrer que tout élément de G est d'ordre fini.
(4) Montrer que G n'est pas d'exposant fini. ($\nexists n \in \mathbb{N}, \forall x \in G, n \times x = e$)

Exercice 33.
Soit $G = (\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \times)$ le groupe des matrices inversibles. On note

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | n \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que H est un sous-groupe abélien de G.
(2) Montrer que H est engendré par un seul élément. Est-ce que H est distingué dans G ?
(3) Déterminer l'ordre de A et de B dans G.
(4) Montrer que H est contenu dans le sous-groupe engendré $K = \langle A, B \rangle$.
(5) Que pensez-vous des deux assertions suivantes ?
    - Un groupe engendré par des éléments d'ordre fini est fini.
    - Un groupe engendré par des éléments d'ordre fini ne contient que des éléments d'ordre fini.

Action de Groupe

Exercice 34. On considère le sous groupe $G < \mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ suivant :

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R}^* \right\}$$

On considère l'action naturelle de G sur $\mathbb{R}^2$.

(1) Déterminer le stabilisateur de $x = (1, 0)$ et le fixateur de $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(2) Décrire toutes les orbites de cette action.

Exercice 35 (Isométries du dodécaèdre)**.** Le dodécaèdre est un solide régulier avec 12 faces pentagonales, 20 sommets et 30 arêtes.

On considère le groupe de symétrie du dodécaèdre.

(1) G agit naturellement sur l'ensemble $\mathcal{F}$ des faces.
- Justifier que G agit transitivement sur $\mathcal{F}$
- Déterminer le stabilisateur d'une face donnée et son cardinal.
- En déduire le cardinal de G.

(2) Refaire les questions précédentes en considérant l'ensemble $\mathcal{S}$ des sommets.

(3) Refaire encore la même choses, en considérant cette fois l'ensemble des arêtes.

Exercice 36.

L'action de $M \in \mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ sur une base $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ est donnée par $M \cdot \mathcal{B} = \{M \cdot e_1, \ldots, M \cdot e_n\}$

Montrer que l'action de $\mathrm{GL}(\mathrm{n}, \mathbb{R})$ sur l'ensemble des bases de $\mathbb{R}^n$ est transitive.

Exercice 37 (Action)**.**

Soit $G = (\mathbb{R}, +)$ et $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ le cercle unité. On définit l'application

$$\begin{array}{lll} G & \times S & \longrightarrow S \\ \lambda & , (x, y) & \longmapsto (x\cos(\lambda) + y\sin(\lambda), -x\sin(\lambda) + y\cos(\lambda)) \end{array}$$

(1) Montrer que cette application définit bien une action de G sur S.

(2) Déterminer le stabilisateur et l'orbite de $(1, 0) \in S$.

(3) En déduire que S est en bijection avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 38 (Des actions subtiles)**.**

Soient $(G, *)$ et $(H, \star)$ deux groupes. On note $X = \mathrm{Hom}(H, G)$ l'ensemble des morphismes de groupes de H dans G.

(1) Pour $g \in G$ et $\rho \in X$, on définit :

$$\begin{array}{rl} (g \cdot \rho) : H & \longrightarrow G \\ h & \longmapsto g * \rho(h) * g^{-1} \end{array}$$

Montrer que cela définit une action de G sur X.

(2) On note $\Gamma = \mathrm{Aut}(H)$ l'ensemble des automorphismes de H. Pour $\tau \in \Gamma$ et $\rho \in X$ on définit $\tau \cdot \rho := (\rho \circ \tau^{-1})$.

Montrer que cela définit une action de Γ sur X.

Exercice 39. Un groupe a 15 éléments agit sur un ensemble à 7 éléments. Montrer qu'il y a au moins un point fixe.