Exercice 40. Un groupe a 35 éléments agit sur un ensemble à 19 éléments sans point fixe. Déterminer le nombre d'orbites.

Exercice 41 (Plan hyperbolique)**.**

Soit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im(z)} > 0\}$, et soit $G = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \mathrm{ad} - \mathrm{bc} = 1 \right\}$. On définit l'opération suivante :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$$

(1) Montrer que ceci définit bien une action de G sur $\mathbb{H}$.
(2) Montrer que l'action est transitive
(3) Montrer que le stabilisateur de i est le groupe

$$\mathrm{Stab}_G(i) = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

(4) En déduire que $\mathbb{H}$ est en bijection avec $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})/\mathrm{SO}(2, \mathbb{R})$.

Exercice 42 (Centre)**.**

On fait agir G sur lui-même par conjugaison.

(1) Soit $x \in G$. Montrer que $|Z(G)|$ divise $|\mathrm{Stab}_G(x)|$.
(2) Si G est non commutatif et $x \notin Z(G)$, montrer que $|Z(G)| < |\mathrm{Stab}_G(x)| < |G|$. (Montrer indépendamment chacune des deux inégalités strictes)
(3) En déduire que si $|G| = pq$ avec p et q premiers (non forcément distincts) alors $Z(G) = \{e\}$ ou $Z(G) = G$.

Exercice 43 (Centre d'un p-groupe)**.**

Soit p un nombre premier et soit G un groupe d'ordre p^n avec $n \geq 1$. On considère l'action de G par conjugaison sur lui-même.

(1) Montrer que si $x \in G$ n'est pas un élément de $Z(G)$ alors p divise $|\mathcal{O}(x)|$
(2) En déduire que p divise $|Z(G)|$. (En particulier, $Z(G)$ n'est pas réduit à l'élément neutre).
(3) Dans le cas où $n = 2$. montrer que G est commutatif (Utiliser l'exercice précédent).
(4) Donner la liste des groupes d'ordre p^2.

Exercice 44 (Groupes d'ordre 15)**.**

On veut montrer ici que tout groupe d'ordre 15 est commutatif. on considère l'action de G sur lui-même par conjugaison.

(1) Montrer que les orbites sont de cardinal 1, 3 ou 5.
(2) Supposons que $Z(G) = \{e\}$. Montrer qu'il y a forcément cinq orbites. L'orbite de $\{e\}$, trois orbites de cardinal 3 et une orbite de cardinal 5.
(3) Déterminer les ordres des éléments dans chacune de ces orbites et arriver à une contradiction.
(4) En déduire que G est commutatif (en utilisant un exercice précédent).

Exercice 45. Déterminer le nombre de groupes abéliens d'ordre 32, d'ordre 72, et d'ordre 210. (les trois questions sont indépendantes).

Exercice 46 (Groupes abéliens d'ordre 600)**.**

(1) Montrer que si n et m sont premiers entre eux, alors $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_{mn}$.

(2) Dans la liste suivante, déterminer quels groupes sont isomorphes entre eux :

$$\mathbb{Z}_{600} \ ; \ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{300} \ ; \ \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{200} \ ; \ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{150} \ ; \ \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{120} \ ; \ \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{100}$$

$$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{75} \ ; \ \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{60} \ ; \ \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{50} \ ; \ \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{40} \ ; \ \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{30} \ ; \ \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{25}$$

(3) Existe t'il d'autres groupes abéliens d'ordre 600 que ceux de la liste ?

Exercice 47 (Applications des théorèmes de Sylow)**.**

(1) Montrer qu'un groupe d'ordre 63 ne peut pas être simple.
(2) Donner un exemple de groupe d'ordre 63 ne possédant pas d'élément d'ordre 9. Montrer qu'un tel groupe possède toujours un sous-groupe isomorphe à $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$.
(3) Montrer qu'un groupe d'ordre 56 ne peut pas être simple.
(4) Soit G un groupe d'ordre 75. Montrer que le nombre d'éléments d'ordre 3 est soit 50 soit 2.

Exercice 48 (Théorème de Wilson)**.**
Soit p un nombre premier, et $G = \mathcal{S}_p$ le groupe symétrique.

(1) Montrer que les éléments d'ordre p sont exactement les cycles de longueur p.
(2) Justifier qu'il y a $(p-1)!$ cycles distincts de longueur p.
(3) Montrer que les p-Sylow de G sont d'ordre p.
(4) Déterminer le nombre de p-Sylow de G.
(5) En déduire que $(p-1)!+1$ est divisible par p. (C'est le théorème de Wilson)

Exercice 49 (Groupes simples)**.** Soit G un groupe simple d'ordre n. Soit un ensemble fini X de cardinal k sur lequel G agit.

(1) Montrer que si l'action n'est pas triviale, alors n divise $k!$. (Considérer une action comme un morphisme $\theta : G \to \mathrm{Bij}(X)$).
(2) Soit p un nombre premier divisant n. Soit n_p le nombre de p-Sylow de G. Montrer que soit G est un p-groupe, soit n divise n_p!
(3) Utiliser ce résultat pour montrer que les groupes d'ordre 24 ou 36 ne sont jamais simples.

Exercice 50 (Groupes d'ordre 12)**.** Soit G un groupe non commutatif d'ordre 12.

(1) Justifier qu'il existe un élément d'ordre 3 dans G. Soit H le sous-groupe engendré par cet élément.
(2) On regarde l'action de G par translation à gauche sur l'ensemble quotient G/H.
   - Justifier que si H est distingué, alors H agit trivialement sur G/H.
   - Montrer que si H n'est pas distingué, alors l'action de G est fidèle (le seul élément qui agit trivialement est l'élément neutre).
   - En déduire que dans ce cas, G est isomorphe à $\mathcal{A}_4$ (le groupe alterné d'indice 2 dans $\mathcal{S}_4$)
(3) Supposons que maintenant que H est distingué.
   (a) Si G ne possède pas d'élément d'ordre 4. Montrer qu'alors il existe un élément d'ordre 6. En déduire que dans ce cas $G \cong D_6$.
   (b) Si G possède un élément d'ordre 4, notons le b. Soit a un générateur de H. Montrer que $bab^{-1} = a^{-1}$. (Indication : par l'absurde, sinon G serait commutatif)
(4) Conclure qu'il existe trois groupes non-commutatifs d'ordre 12 à isomorphisme près.