Anneaux

Exercice 52 (Anneau produit)**.**
Soit $(A_1,+,\cdot)$ et $(A_2,+,\cdot)$ deux anneaux. On munit l'ensemble $A = A_1 \times A_2$ des deux lois $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$\forall (a_1,a_2),(b_1,b_2) \in A_1 \times A_2, \left\{ \begin{array}{l} (a_1,a_2) \oplus (b_1,b_2) = (a_1+b_1, a_2+b_2) \\ (a_1,a_2) \otimes (b_1,b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \end{array} \right.$$

(1) Montrer que $(A,\oplus,\otimes)$ est un anneau.
(2) Montrer que si A_1 et A_2 sont tous les deux non réduits à $\{0\}$, alors A n'est pas intègre.

Exercice 53. Soit $(A,+,\cdot)$ un anneau commutatif. et $x, y \in A$.
Montrer que xy est inversible si et seulement si x et y sont inversibles.

Exercice 54. Soit $(G,+)$ un groupe abélien. On note A l'ensemble des endomorphismes de $(G,+)$. On munit l'ensemble A de la loi d'addition induite par $(G,+)$, c'est à dire

$$\forall \psi, \phi \in A, \forall g \in G, (\phi+\psi)(g) = \phi(g) + \psi(g)$$

(1) Montrer que $(A,+,\circ)$ est un anneau unitaire.
(2) On se place dans le cas où $G = (\mathbb{R}[X],+)$ le groupe des polynômes. On définit les fonctions $\phi : P \mapsto P'$ et $\psi : P \mapsto Q$ avec Q la primitive de P s'annulant en 0.
  (a) Justifier que ϕ et ψ sont des éléments de A non inversibles.
  (b) Montrer que $\phi \circ \psi$ est inversible et comparer avec l'exercice précédent.

Exercice 55 (Elements nilpotents)**.** Soit A un anneau et $x \in A$. on dit que x est *nilpotent* si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. On se place tout d'abord dans le cas A commutatif. Soit x et y deux éléments nilpotents de A.

(1) Montrer que x n'est pas inversible.
(2) Montrer que xy est nilpotent.
(3) Montrer que $x+y$ est nilpotent.
(4) Donner un exemple d'anneau non-commutatif avec u et v nilpotents et uv et $u+v$ non nilpotent.
(5) Si A est non-commutatif, montrer : (xy nilpotent $\Leftrightarrow$ yx nilpotent)
(6) Si A est unitaire (non nécessairement commutatif), montrer que $(1-x)$ est inversible.

Exercice 56. Déterminer l'ensemble des inversibles, des diviseurs de 0 et des nilpotents de l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Exercice 57. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times)$ est un anneau.
(2) On définit la fonction $N(a+b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on a $N(xy) = N(x)N(y)$
(3) En déduire que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

Exercice 58 (Anneau intègre fini)**.** Soit A un anneau unitaire fini.

(1) Soit $x \in A$. Montrer que si x n'est pas diviseur de 0 alors x est inversible
(2) En déduire que si A est intègre alors A est un corps
(3) Montrer que la caractéristique d'un anneau unitaire fini intègre est un nombre premier.

Exercice 59 (Polynômes)**.**
On considère l'anneau des polynomes $(\mathbb{R}[X], +, \times)$. Déterminer si les applications suivantes sont des morphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{rl} \phi : \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R} \\ P & \mapsto P'(0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} \psi : \mathbb{R}[X] & \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ 0 & P(0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Idéaux, Quotients

Exercice 60. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux et J un idéal de B. Montrer que $f^{-1}(J)$ est un idéal de A.

Exercice 61 (Opération sur les idéaux)**.**
Soit I et J deux idéaux d'un anneau A. On définit les deux ensembles

$$I + J = \{x + y \mid x \in I, y \in J\}$$
$$I \cdot J = \left\{ z = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \,\middle|\, n \in \mathbb{N}, x_k \in I, y_k \in J \right\}$$

(1) Montrer que $(I \cap J)$, $(I + J)$ et $(I \cdot J)$ sont tous des idéaux de A
(2) Montrer que $I \cdot J \subset I \cap J$
(3) Montrer que $(I + J) \cdot (I \cap J) \subset I \cdot J$
(4) En déduire que si $I + J = A$ alors $I \cdot J = I \cap J$
(5) Trouver un exemple où $I \cdot J$ n'est pas égal à $I \cap J$ (regarder les $n\mathbb{Z}$).

Exercice 62 (pgcd et ppcm)**.** Soient m et n dans $\mathbb{Z}$.
(1) Montrer que $(m\mathbb{Z}) \cdot (n\mathbb{Z}) = (mn)\mathbb{Z}$.
(2) Montrer que si $m \wedge n = d$ on a $m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$.
(3) Montrer que $(m\mathbb{Z}) \cap (n\mathbb{Z}) = (m \vee n)\mathbb{Z}$ où la notation $(m \vee n)$ est le ppcm(m,n).

Exercice 63 (Suites réelles)**.** On considère l'anneau A des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeur réelles, muni de l'addition et de la multiplication usuelle (terme à terme). On considère :

$$\begin{array}{ll} \mathcal{B} = \{u \in A \mid \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M\} & \text{les suites bornées} \\ \mathcal{C} = \left\{u \in A \mid \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0\right\} & \text{les suites convergeant vers 0} \\ \mathcal{S} = \{u \in A \mid \exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \geq n_0, u_n = a\} & \text{les suites stationnaires} \end{array}$$

(1) Montrer que $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont des sous-anneaux de A. Déterminer si ce sont des idéaux de A.
(2) Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{S}$ sont inclus dans $\mathcal{B}$. Déterminer si ce sont des idéaux de $\mathcal{B}$.
(3) Montrer que $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ est un idéal de A.
(4) Est-ce que cet idéal est principal ?

Exercice 64 (Quotient de polynômes)**.** On se place dans l'anneau des polynômes. Pour un polynome P, on notera $\mathbb{R}[X]/(P)$ l'anneau quotient de $\mathbb{R}[X]$ par l'idéal engendré par P.
(1) Montrer que $\mathbb{R}[X]/(X - 1)$ et $\mathbb{R}[X]/(X + 1)$ sont tous les deux isomorphes à $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 1)$ est isomorphe à l'anneau produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(3) Montrer que l'anneau $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.
(4) Montrer que $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ n'est pas isomorphe à l'anneau $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.
(5) On définit la loi de composition $\otimes$ sur $\mathbb{R}^2$ par $(a,b)\otimes(a',b')=(aa'+bb',ab'+ba')$. Montrer que $(\mathbb{R}^2,+,\otimes)$ est un anneau puis qu'il est isomorphe à $\mathbb{R}[X]/(X^2)$.

Exercice 65. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$ des entiers de Gauss.

(1) Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
Soit ϕ l'application définie par :

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{Z}[i] &\longrightarrow \mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\\ (a+ib) &\longmapsto \bar{a}+3\bar{b}\end{aligned}$$

(2) Montrer que ϕ est un morphisme d'anneau.
(3) Montrer que $\mathbb{Z}[i]/(1+3i)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$

Exercice 66 (Théorème chinois)**.** Soient I et J deux idéaux d'un anneau commutatif unitaire. On suppose que I et J sont étrangers, c'est à dire $I+J=A$.

(1) Montrer que $(A/I)\times(A/J)$ est isomorphe à $A/(I\cdot J)$.
(2) Soit $J_1,\dots,J_k$ des idéaux. Montrer que si I est étranger avec chacun des $J_1,\dots,J_k$, alors il est étranger avec $(J_1\cdots J_k)$.
(3) En déduire que si $I_1,\dots,I_k$ sont des idéaux étrangers deux à deux on a $(A/I_1)\times\cdots\times(A/I_k)$ est isomorphe à $A/(I_1\cdots I_k)$
(4) Retrouver le *Théorème des restes chinois* : Si $n_1,\dots,n_k\in\mathbb{Z}$ sont premiers entre eux, alors on a un isomorphisme d'anneaux :

$$(\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z})\times\cdots\times(\mathbb{Z}/n_k\mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}/(n_1\cdots n_k)\mathbb{Z}$$

Exercice 67. Dans $\mathbb{Z}[X]$, l'anneau des polynomes à coefficients entiers. On considère le sous-ensemble $I=\{P\in\mathbb{Z}[X]|P(0)\text{ est divisible par }5\}$

(1) Montrer que I est un idéal mais n'est pas principal
(2) Déterminer deux polynomes P et Q tels que $I=(P,Q)$.
(3) En déduire que l'idéal principal (X) est premier mais n'est pas maximal.

Exercice 68 (Divisibilité dans les entiers de Gauss)**.**
On se place dans l'anneau des entiers de Gauss $\mathbb{Z}[i]=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{Z}\}$.
Pour $z=a+ib\in\mathbb{Z}[i]$ On définit $N(z)=|z|^2=a^2+b^2$.

(1) En utilisant le fait que $N(xy)=N(x)N(y)$, déterminer tous les inversibles de $\mathbb{Z}[i]$.
(2) Montrer que si $N(z)$ est un nombre premier alors z est irreductible.
(3) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{Z}[i]$, on a $N(z)\neq 3$. En déduire que 3 est irreductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
(4) Montrer que 5 n'est pas un irreductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
(5) Parmi les nombres $2,3,5,7,11,13,17,19$ (qui sont premiers dans $\mathbb{Z}$), déterminer lesquels sont irréductibles dans $\mathbb{Z}[i]$.

Exercice 69.
Soit A un anneau intègre commutatif et unitaire.

(1) Montrer que les inversibles de $A[X]$ sont les polynômes constants $P(X)=a$ avec a inversible dans A.
(2) Montrer que tout élément irreductible de A est un élément irreductible de $A[X]$.

(3) Lorsque $A = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, déterminer un polynome de $A[X]$ qui soit non constant et inversible.

Exercice 70. On regarde l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{10}] = \{a + b\sqrt{10} | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que $a + b\sqrt{10}$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$ si et seulement si $a^2 - 10b^2 = \pm 1$.
(2) Montrer que l'équation $a^2 - 10b^2 = 2$ n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$.
(3) En déduire que 2 est irreductible dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$.
(4) En écrivant 10 de deux façons différentes dans $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$, montrer que 2 n'est pas premier.

Exercice 71. Soit Soit A, B deux anneaux commutatifs unitaires, et $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux unitaire. Soit J un idéal de B et $I = f^{-1}(J)$ (on rappelle que I est également un idéal).

(1) Montrer que si J est premier alors I est premier.
(2) On se place dans le cas où f est surjective et J est maximal.
   (a) Montrer que si $x \notin I$ alors il existe $y \in A$ tel que $f(xy) - 1 \in J$.
   (b) En déduire que $\overline{x}$ est inversible dans A/I.
   (c) Conclure que I est maximal.
(3) Trouver un exemple avec J maximal, et $f^{-1}(J)$ n'est pas maximal. (Penser à $\mathbb{Z}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$)

Exercice 72. Soit A un anneau commutatif non nul tel que tout idéal différent de A est premier. Montrer que A est un corps.

Exercice 73. Soit P un idéal premier non nul d'un anneau A. On suppose que P est principal. Soit I un anneau principal tel que $P \subset I$. Montrer que $I = P$ ou bien $I = A$.

Exercice 74 (L'anneau des entiers de Gauss est Euclidien)**.**

On va montrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien. Soit $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ avec $y \neq 0$.

(1) Montrer qu'il existe $q \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $\left| q - \frac{x}{y} \right| < 1$.
(2) En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $|r| < |y|$ et $x = qy + r$.
(3) Conclure que $\mathbb{Z}[i]$ est euclidien.

Exercice 75. Soit A un anneau commutatif et unitaire.

Montrer que $A[X]$ est principal si et seulement si A est un corps.

Exercice 76. [Nombre de racines d'un polynôme]

Soit $\mathbb{K}$ un corps, $a \in K$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

(1) Montrer que le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ est $P(a)$.
(2) En déduire que $P(a) = 0$ si et seulement si P est dans l'idéal engendré par $(X - a)$.
(3) Supposons que $P \neq 0$. Montrer qu'il existe au plus $d^\circ(P)$ éléments x de $\mathbb{K}$ tels que $P(x) = 0$.
(4) En considérant l'*exposant* du groupe des unités, montrer la proposition suivante.
   Si p est premier alors $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique d'ordre $p - 1$.
(5) Lorsque $A = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ (qui n'est pas un corps), montrer que le polynôme $P = X^2 - 1 \in A[X]$ possède 4 racines.