Structure symplectique sur l'espace modulaire et Ergodicité de l'action du groupe modulaire

Frédéric Palesi

Rapport de stage de M2R

Stage effectué de fevrier à Juillet 2006

A l'Université Joseph Fourier (Grenoble))

Sous la direction de Louis Funar

Table des Matières

Théorie ergodique sur les espaces modulaires

Introduction

La physique théorique a eu depuis toujours une grande in uence sur la recherche mathématique, en tant que source d'inspiration tout autant que récipient et utilisateur des nouvelles techniques dévelopées par les mathématicien(ne)s. Le rôle primordial joué par les mathématiques dans l'avénement des théories physiques avancées - pour ne citer que la théorie des cordes - est bien connu.

Les théories quantiques de champs topologiques ont fait leur apparition sur le devant de la scène mathématique par les travaux d' E.Witten à la fin des années quatre-vingt. Les invariants construits par Witten et Reshetikhin-Turaev proviennent des théories de Chern-Simons ayant comme groupe de jauge un groupe de Lie compact, par exemple SU(2). Les objets mathématiques qui surgissent dans ces théories sont des objets bien connus, qui ont suscité l'intérêt de grand nombre de mathématicien(ne)s et physicien(ne)s : les espaces de représentations de groupes de surfaces dans des groupes de Lie, et en particulier l'espace de Teichmüller.

Considérons une surface de Riemann M de genre g avec m composantes de bord (des cercles). On note $\{C_1, ..., C_m\} \subset \pi_1(M)$ les elements du groupe fondamental correspondant à ces m composantes. L'espace $\mathrm{Hom}(\pi, SU(2))$ est une variété algébrique sur laquelle $SU(2)$ agit à droite par conjugaison. L'espace quotient correspondant à cette action est l'espace modulaire

$$\mathcal{X}(M) = \mathrm{Hom}(\pi_1(M), SU(2))/SU(2)$$

On peut également définir la variété relative $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M)$ en assignant à chaque C_i une classe de conjugaison c_i dans $SU(2)$. Des définitions et propriétés plus précises sont données dans le chapitre I.A

Il est possible de construire une structure symplectique (dont on rapelle les propriétés principales dans le chapitre I.B) sur l'espace $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M)$. Ce sera l'objet de la partie I.C où on travaillera sur un groupe de Lie quelconque et non sur $SU(2)$. Une fois la structure construite, il est facile d'exhiber un système intégrable sur cet espace. Ce système intégrable joue un rôle central dans la démonstration du théorème principal du à Goldman [10] :

Théorème I : *Soit M une surface fermée orientée. Soit $G = SU(2)$. Alors l'action de Γ_M sur $\mathcal{X}(M)$ est ergodique.*
Si M est une surface à bords, alors pour une composantes de bord $\mathcal{C}$ fixée, l'action de Γ_M sur $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M)$ est ergodique.

La démonstration de ce théorème passe tout d'abord par une étude détaillée de plusieurs cas particuliers. Tout d'abord le cas dela sphère à trois trous dans le chapitre II.A et l'étude des représentations dans $SU(2)$, qui va nous permettre de comprendre la structure globale de l'espace modulaire en découpant la surface en pantalons (c'est-à-dire exactement des sphères à trois trous) dans la partie II.D . Ensuite l'étude détaillée du tore à un trou et de la sphère à quatre trous dans la partie II.B et II.C va nous permettre de montrer le théorème I dans ces deux cas particuliers. Le coeur de la démonstration se trouve dans la partie II.E . On découpe la surface en pantalons $\mathcal{P} = (P_1, ..., P_N)$, et on note $\mathcal{B}$ l'ensemble des $\partial P_i \cap \partial P_j$. Grace à un lemme de théorie de la mesure, on montre qu'une fonction $f : \mathcal{X}_\mathcal{C}(M) \to \mathbb{R}$ mesurable qui est Γ-invariante ne depend que des fonctions traces s_i qui forment un système intégrable sur l'espace modulaire. On élimine finalement les variables s_i une par une en recollant selon le bord $b_i \in \mathcal{B}$, et en constatant que le recollement des deux surfaces ayant b_i comme frontière commune forment soit un tore à un trou, soit une sphère à quatre trous. On arrive donc à la conclusion que la fonction f est constante presque partout, ce qui montre l'ergodicité de l'action de Γ_M et ainsi le théorème I .

I - Une structure symplectique sur l'espace modulaire

A. Groupe modulaire et espace modulaire

I.A.1 Groupes modulaires

Soit M une surface orientée fermée de genre $g > 1$ et π son groupe fondamental. Le groupe modulaire de M est par definition $\Gamma_M = \pi_0 \operatorname{Diff}(M)$, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isotopie des difféomorphismes préservant l'orientation. D'aprés le théorème de Nielsen, le groupe modulaire est isomorphe aux groupe des automorphismes exterieurs

$$\Gamma_M = \operatorname{Out}(\pi) = \operatorname{Aut}(\pi)/\operatorname{Inn}(\pi).$$

Un twist de Dehn par rapport à une courbe simple α sur M est une application sur un voisinage tubulaire de α, qui est réalisé en coupant selon α, puis en faisant tourner (twister) un des bords sur un tour et enfin reconnecter la surface selon α. Cette application notée τ_α est un element de Γ_M. Pour tout $g \geq 1$, il existe un ensemble générateur de Γ_M formé de twists de Dehn.

Dans le cas d'une surface à bord M avec m composantes de bord. Γ_M est alors par définition l'ensemble des classes d'isotopie de difféomorphismes dont la restriction à ∂M est l'identité. On peut noter que dans le cas $m = 1$, $\pi_1(S_{g,1})$ est un groupe libre à $2g$ générateurs, et donc l'élément homotope au bord $\mathcal{C}$ est conjugué à la relation R de la présentation de $\pi_1(S_{g,0})$. De cette façon il y a une identification

$$\Gamma_{g,1} \cong \Gamma_{g,0} = \Gamma_g$$

D'un autre point de vue, Γ_M est le sous-groupe de $\mathrm{Out}(\pi)$ qui préserve la classe de conjugaison de chaque $\pi_1(C_j) \subset \pi_1(M)$.

I.A.2 Cas d'une surface sans bord

Nous rapellons ici, les faits basiques concernant les espaces modulaires de représentations. Pour plus de détails consulter [1],[6],[9],[10],[11].

Soit K un groupe de Lie compact. On peut donner à K la structure d'un groupe de Lie algébrique réel, c'est-à-dire, un sous-groupe Zariski-fermé de GL $(n,\mathbb{R})$. On note $K_\mathbb{C}$ sa complexification, qui est un sous-groupe algébrique de GL $(n,\mathbb{C})$. Pour un groupe de type fini π, l'ensemble $\mathrm{Hom}(\pi, K_\mathbb{C})$ a la structure d'une variété complèxe affine. La variété réelle $\mathrm{Hom}(\pi, K)$ est le sous-ensemble qui est formé des $\mathbb{R}$-points.

Soit G un groupe algébrique reductif défini sur un corps $\mathfrak{k}$. Une description explicite de $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ necessite un choix de générateurs. Si $\gamma_1, ..., \gamma_N \in \pi$ est un ensemble générateur, alors l'application d'évaluation

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(\pi, G) & \to & G^N \\ \rho & \mapsto & (\rho(\gamma_1), ..., \rho(\gamma_N)) \end{array}$$

est injective et son image consiste en tous les $(g_1, ..., g_N) \in G^N$ satisfaisant $R(g_1, ..., g_N) = I$ où R est la relation satisfaite par les générateurs $\gamma_1, ..., \gamma_N \in \pi$. L'équation est une équation polynomiale en les coefficients matriciels de $(g_1, ..., g_N)$ et donc l'image de l'évaluation est Zariski fermée dans G^N.

Le produit cartésien $\mathrm{Aut}(\pi) \times \mathrm{Aut}(G)$ agit sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ par composition :

$$\begin{array}{rcl} (\mathrm{Aut}(\pi) \times \mathrm{Aut}(G)) \times \mathrm{Hom}(\pi, G) & \to & \mathrm{Hom}(\pi, G) \\ (\psi, \phi) \cdot \rho & \mapsto & \phi \circ \rho \circ \psi \end{array}$$

En particulier G agit à droite sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ par automorphismes interieurs de G. En général, l'espace quotient $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ n'est pas une variété algébrique. En fait, il existe un sous-ensemble Zariski-ouvert G-invariant noté $\mathrm{Hom}(\pi, G)^-$ (qui consiste en l'ensemble des représentations semi-simples) tel que l'ensemble des orbites $\mathrm{Hom}(\pi, G)^-/G$ est l'ensemble des $\mathfrak{k}$-points d'une variété affine $\mathrm{Hom}(\pi, G)//G$ (la *variété caractère*) dont l'anneau des coordonnées est égal au sous-anneau des fonctions G-invariantes dans l'anneau des coordonnées de $\mathrm{Hom}(\pi, G)$. En pratique, $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ va consister en l'ensemble de représentations semi-simples. Dans le cas d'un groupe compact K, l'application Hom $(\pi, K)/K \longrightarrow \mathrm{Hom}(\pi, K_\mathbb{C})/K_\mathbb{C}$ induite par l'inclusion $K \hookrightarrow K_\mathbb{C}$ est une bijection sur une composante de l'ensemble des $\mathbb{R}$-points.

Définition I.A.1 : *L'espace modulaire (ou variété caractère)* est l'espace quotient :

$$\mathcal{X}(M) = \mathrm{Hom}(\pi, G)/G$$

Puisque le sous-groupe $\mathrm{Inn}(\pi)$ de $\mathrm{Aut}(\pi)$ des automorphismes interieurs $\pi \to \pi$ préserve chaque G-orbite de $\mathrm{Hom}(\pi, G)$, il agit trivialement sur l'espace quotient $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G =$

$\mathcal{X}(M)$, l'espace modulaire. Donc l'action de $\mathrm{Aut}(\pi)$ induit une action du groupe quotient $\mathrm{Out}(\pi) = \Gamma_M$ sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G = \mathcal{X}(M)$.

I.A.3 Cas d'une surface à bord

Dans le cas d'un surface à bord M de genre $g \geq 0$ avec les composantes de bord $C_1, ..., C_m$. Supposons que $\chi(M) = 2 - 2g - m < 0$. Pour chaque i l'application

$$f_i : \mathrm{Hom}(\pi, G) \to G$$
$$\phi \mapsto \phi(c_i)$$

est surjective et induit une application sur les classes de représentation $[\phi]$. Notons par $[G]$ l'ensemble des classes de conjugaison de G. Pour $r \in [G]$, l'ensemble $f_i^{-1}(r)$ corresponds à l'ensemble des classes de représentation avec la classe de conjugaison de l'holonomie de la composante de bord $\mathcal{C}_i$

Pour chaque $j = 1, ..., m$ on choisit un point base $x_j \in C_j$. L'inclusion $C_j \hookrightarrow M$ induit un monomorphisme $\pi_1(C_j, x_j)) \to \pi_1(M, x_j)$ et donc on regarde chaque groupe $\pi_1(C_j)$ comme un sous-groupe cyclique infini de $\pi_1(M)$. On note par σ_j le générateur de $\pi_1(C_j) \subset \pi_1(M)$. Choisissons une collection $\sigma_1, ..., \sigma_m, \alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_g, \beta_g$ de lacets simples. Alors $\pi_1(M)$ admet une présentation :

$$\pi_1(M) \cong \langle \sigma_1, ..., \sigma_m, \alpha_1, \beta_1, ..., \alpha_g, \beta_g | \sigma_1 ... \sigma_m [\alpha_1, \beta_1] ... [\alpha_g, \beta_g] = I \rangle$$

On note que dans $SU(2)$ une classe de conjugaison est determinée par sa trace. Donc spécifier une classe de conjugaison revient à choisir un nombre dans $[-2, 2]$. A chaque C_i on associe une classe de conjugaison $c_i \in [-2, 2]$ dans $SU(2)$ et on note $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_m)$.

Définition I.A.2 : La *variété caractère relative* à $\mathcal{C}$ est l'ensemble :

$$\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M) = \{[\rho] \in M | \mathrm{tr}(\rho(\sigma_j)) = c_i, \forall i \in [1, ..., m]\}$$

Remarque : Pour $m \geq 1$, l'espace modulaire d'une surface de genre g à n composantes de bord et $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_m, \pm 2, ... \pm 2)$ peut etre identifié à l'espace modulaire d'une surface de genre g à m composantes de bord et $\mathcal{C}' = (c_1, ..., \pm c_m)$.

Il est clair que Γ_M agit sur $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M)$, puisque Γ_M préserve le bord. Dans le deuxième paragraphe, les actions que nous étudierons sont exactement les actions du groupe modulaire sur l'espace modulaire et sur la variété caractère relative.

B. Rappel de géométrie sympletique

Nous rapellons ici les bases de la géométrie symplectique qui nous serons necessaires pour la suite. Pour plus de détails consulter [2], [13], [16].

I.B.1 Structure symplectique

Définition I.B.1 : Une *forme symplectique* sur une variété M est une 2-forme fermée sur M, qui est non dégénérée en chaque point de M. Une *variété symplectique* est une paire (M, ω) où M est une variété et ω est une forme symplectique sur M.

Remarque : Une variété symplectique est toujours de dimension paire $2n$.

ω associe à chaque fonction f, un champ de vecteurs X_f appelé *champ de vecteur hamiltonien de f*, dual à la differentielle, c'est à dire :

$$\omega(X_f, \cdot) = df(\cdot)$$

Ce qui nous permet de definir un crochet $\{\ ,\ \}$ sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ qui est une dérivation en chaque terme, par la formule :

$$\{f, g\} = X_f \cdot g = dg(X_f).$$

Ici la 2-forme est fermée, donc le crochet satisfait l'identité de Jacobi et definit ainsi une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{C}^\infty(M)$.

I.B.2 Systèmes intégrables

Définition I.B.2 : Un *système intégrable* sur une variété symplectique de dimension $2n$ est un ensemble de n fonctions indépendantes (fonctionnellement) $f_1, ..., f_n$ qui commutent deux-à-deux, i.e. $\forall i, \forall j,\ \{f_i, f_j\} = 0$

Le fait que les fonctions soient indépendantes veut dire que les champs de vecteurs hamiltoniens $X_{f_1}, ..., X_{f_n}$ sont indépendant en tout point d'un ouvert dense de M. En un tel point, ils engendrent un sous-espace isotrope de T_xM . Donc n est le nombre maximum possible de fonctions indépendantes commutant deux à deux sur M.

Théorème I.B.3 *(Arnold-Liouville)* **:** *Soit $f_1, ..., f_n$ un système intégrable sur M. Soit $c = (c_1, ..., c_n)$ une valeur régulière de $f := (f_1, ..., f_n)$. L'ensemble de niveau correspondant $f^{-1}(c) = \mathcal{T}_c$ est une sous-variété lagrangienne.*

(a) *Soit $x \in \mathcal{T}_c$. Si les flots des champs de vecteurs $X_{f_1}, ..., X_{f_n}$ partant de x sont complets, la composante connexe de x dans $\mathcal{T}_c$ est un espace homogène de $\mathbb{R}^n$. En particulier,* *il y a des coordonnées* $(\phi_1, ...\phi_n)$ *dans lesquelles* X_{f_i} *s'ecrit :*

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^i(a) \frac{\partial}{\partial \phi_j}$$

(b) *Si la composante connexe de* x *dans* $\mathcal{T}_c$ *est compacte alors c'est un tore et il y a des coordonnées* $(\phi_1, ...\phi_n, I_1, ..., I_n)$ *dans un voisinage de cette composante telles que la forme symplectique s'ecrit :*

$$\omega = \sum_i dI_i \wedge d\phi_i$$

et le champ de vecteur X_{f_i} *s'ecrit :*

$$\sum_{j=1}^{n} A_j^i(Is) \frac{\partial}{\partial \phi_j}$$

Preuve : Voir [2].

Sur $\mathcal{T}_c$, le flot de hamiltonien $H = f_i$ definit un mouvement quasi-périodique. Les variables I sont appelées variables d'action, les variables ϕ sont les variables angulaires. Ensemble elles forment elles forment dans un voisinage de $\mathcal{T}_c$ un système de coordonées canoniques action-angle. Dans ces variables le flot de hamiltonien $H = f_1$, satisfait les equations differentielles :

$$\frac{dI}{dt} = 0, \ \frac{d\phi}{dt} = v(I)$$

.

Définition I.B.4 : Une *action* d'un groupe de Lie sur une variété M est un homomorphisme de groupe

$$\begin{array}{rcl} \psi : G & \rightarrow & \mathrm{Diff}(M) \\ g & \mapsto & \psi_g \end{array}$$

Si (M, ω) est une variété symplectique et $\mathfrak{g}^*$ est le dual de $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie du groupe G, une action ψ est *hamiltonienne* si il existe une application :

$$\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$$

qui satisfait les deux conditions :

- Pour chaque $X \in G$, on pose $\mu^X : M \rightarrow \mathbb{R}, \mu^X(p) := \langle \mu(p), X \rangle$ et $X^\sharp$ le champ de vecteurs sur M engendré par le sous-groupe à un paramètre $\exp tX | t \in \mathbb{R} \subseteq G$. Alors μ^X est le hamiltonien du champ de vecteur $X^\sharp$
- L'application μ est equivariante par l'action ψ et par l'action coadjointe Ad^* de G sur $\mathfrak{g}^*$.

Dans ce cas μ est appelée *application moment* du G-espace hamiltonien (M, ω, G, μ)

C. Construction de la structure symplectique

I.C.1 La variété $\mathrm{Hom}(\pi, G)$

Nous suivons ici essentiellement les idées [9], pour montrer que $\mathcal{X}(M) = \mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ admet une structure symplectique lorsque M est fermée. Voir aussi [1],[4],[12].

Lorsque G est un groupe de Lie compact, on peut donner à G la strcture d'un groupe de Lie algébrique réel (c'est-à-dire la structure d'un sous-groupe Zariski fermé de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$). Dans le cas où π est le groupe fondamental d'une surface finiement engendré, on peut faire une description explicite de $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ par un choix de générateur. Soit $\gamma_1, ..., \gamma_N \in \pi$ un système générateur, alors l'application d'évaluation

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(\pi, G) & \to & G^N \\ \rho & \mapsto & (\rho(\gamma_1), ..., \rho(\gamma_N)) \end{array}$$

est injective et son image consiste en tous les $(g_1, ..., g_N) \in G^N$ satisfaisant $R(g_1, ..., g_N) = I$ où R est la relation satisfaite par les générateurs $\gamma_1, ..., \gamma_N \in \pi$. L'équation est une équation polynomiale en les coefficients matriciels de $(g_1, ..., g_N)$ et donc l'image de l'évaluation est Zariski fermée dans G^N.

Comme π est le groupe fondamental d'une surface orientée fermée de genre $g > 1$, il admet une presentation :

$$\pi = \langle A_1, B_1, ..., A_g, B_g \,|\, [A_1, B_1]...[A_g, B_g] = I \rangle$$

Ainsi $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ s'identifie avec l'ensemble de tous les

$$(a_1, b_1, ..., a_g, b_g) \in G^{2g}$$

qui satisfont l'équation (dans G) :

$$[a_1, b_1]...[a_g, b_g] = I$$

L'espace $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ est generalement une variété algébrique singulière et l'action de G sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ rend $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ encore plus singulier. On va donc tout d'abord étudier quels sont les points non-singuliers de la variété $\mathrm{Hom}(\pi, G)$, et en particulier la structure locale prés d'une representation $\phi \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$. Considérons un chemin ϕ_t dans $\mathrm{Hom}(\pi, G)$, qui depend de façon differentiable du paramètre t. On peut ecrire pour $x \in \pi$ et t dans un intervalle dependant de x que :

$$\phi_t(x) = \exp(tu(x) + O(t^2))\phi(x)$$

où u est une application de $\pi \to \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ \phi}$. Le π-module $\mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ \phi}$ etant defini par l'action de π sur $\mathfrak{G}$ (l'algèbre de Lie de G) par la composition $\pi \xrightarrow{\phi} G \xrightarrow{Ad} \mathrm{Aut}(\mathfrak{G})$. C'est à dire l'action

$$\begin{array}{ll} \pi \times \mathfrak{G} & \longrightarrow \mathfrak{G} \\ (\gamma, \zeta) & \longmapsto [\mathrm{Ad}\ \phi(\gamma)](\zeta) \end{array}$$

ϕ_t satisfait la condition d'homomorphisme :

$$\begin{aligned}
\phi_t(xy) &= \phi_t(x)\phi_t(y) \\
\phi_t(xy) = \exp(tu(xy) + O(t^2))\phi(xy) &= \exp(tu(x) + O(t^2))\phi(x)\exp(tu(y) + O(t^2))\phi(y) \\
\exp(tu(xy) + O(t^2))\phi(x)\phi(y) &= \exp(tu(x) + O(t^2))\phi(x)\exp(tu(y) + O(t^2))\phi(y) \\
\exp(t(u(xy) - u(y)) + O(t^2))\phi(x) &= \phi(x)\exp(tu(y) + O(t^2)) \\
\exp(t(u(xy) - u(y)) + O(t^2)) &= \phi(x)\exp(tu(y) + O(t^2))(\phi(x))^{-1} \\
t(u(xy) - u(y)) + O(t^2) &= \mathrm{Ad}\ (\phi(x))(tu(y) + O(t^2)))
\end{aligned}$$

Finalement on arrive à la condition de cocycle sur u

$$u(xy) = u(x) + \mathrm{Ad}\ (\phi(x))u(y)$$

Reciproquement si u est un 1-cocycle $\pi \to \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}$, (i.e. satisfait la condition de cocycle) alors tout ϕ_t satisfaisant la condition de cocycle satisfait la condition d'homomorphisme. Il vient donc que l'espace Zariski-tangent à $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ en ϕ est l'espace $Z^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$ des 1-cocycles à valeurs dans $\mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}$.

On admet la proposition suivante (pour une démonstration voir [10]) :

Proposition I.C.1 : *Si G est un groupe de Lie qui préserve une forme bilinéaire non dégénérée sur son algèbre de Lie. Alors :*

$$\forall \phi \in \mathrm{Hom}(\pi, G), \dim\ Z^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}) = (2p-1)\dim\ G + \dim\ \zeta(\phi)$$

où $\zeta(\phi)$ est le centralisateur de $\phi(\pi)$ dans G. En particulier dim $Z^1(\pi; \mathfrak{G}_{Ad\ (\phi)})$ est minimal pour les représentations ϕ satisfaisant l'égalité :

$$\dim\ \zeta(\phi)/\zeta(G)$$

Il vient donc que $\phi \in \mathrm{Hom}(\pi, G)$ est un point simple si et seulement si il satisfait l'égalité I.C.1 . On note alors $\mathrm{Hom}(\pi, G)^-$ la variété constituée de tous les ϕ satisfaisant cette égalité.

I.B.2 La variété caractère $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$

On peut maintenant étudier l'action de G sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ par automorphismes interieurs, et ainsi exhiber l'espace tangent à une orbite G_ϕ. Pour cela on considère une déformation ϕ_t qui est triviale par l'action de G, c'est à dire qu'il existe un chemin g_t dans G tel que :

$$\phi_t(x) = g_t^{-1}\phi(x)g_t$$

On peut ecrire au premier ordre que $g_t = \exp(tu_0 + O(t^2))$, avec $u_0 \in \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}$. Alors on peut calculer le cocycle $u : \pi \to \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}$ correspondant à ϕ_t :

$$\begin{aligned}
\exp(tu(x) + O(t^2))\phi(x) &= g_t^{-1}\phi(x)g_t \\
\exp(tu(x) + O(t^2))\phi(x) &= \exp(-tu_0 + O(t^2))\phi(x)\exp(tu_0 + O(t^2)) \\
\exp(t(u(x) + u_0) + O(t^2)) &= \phi(x)\exp(tu_0 + O(t^2))\phi(x)^{-1} \\
t(u(x) + u_0) + O(t^2) &= \mathrm{Ad}\ (\phi(x))(tu_0 + O(t^2)) \\
u(x) &= \mathrm{Ad}\ \phi(x)u_0 - u_0
\end{aligned}$$

C'est à dire que u correspond au cobord δu_0. Récoproquement à partir d'un tel cobord on definit un chemin g_t dans G comme voulu, à conjugaison prés par un élement de $\zeta(\phi)$. Il vient immediatement que l'espace $B^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$ des 1-cobords est isomorphe en tant qu'espace vectoriel au quotient $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}(\phi)$, où $\mathfrak{Z}(\phi)$ est l'algèbre de Lie de $\zeta(\phi)$. Il vient donc que $G/\zeta(G)$ agit localement librement seulement sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)^-$. En d'autres termes, les points de $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ où l'action de G n'est pas localement libre sont précisement les singularités de $\mathrm{Hom}(\pi, G)$.

On peut donc deduire de cette discussion que "l'espace Zariski tangent" à $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ en une classe d'équivalence $\{\phi\}$ est représenté par le groupe quotient

$$Z^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})/B^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}) = H^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$$

qui est le groupe de cohomologie $H^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$ de la surface dans le π-module $\mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}$. On cherche maintenant une condition necessaire et suffisante pour qu'une classe de cohomologie $\xi \in H^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$ soit tangente à un chemin $\{\phi_t\}$ dans $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$. Ou de façon équivalente, une condition pour qu'on cocycle $u \in Z^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$ representant ξ est tangent à un chemin differentiable ϕ_t dans $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$. En écrivant :

$$\phi_t(x) = \exp(tu(x) + t^2u_2(x) + O(t^3))\phi(x)$$

et en appliquant la condition d'homomorphisme, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\exp(tu(x) + t^2u_2(x) + O(t^3))\phi(x)\exp(tu(y) + t^2u_2(y) + O(t^3))\phi(y) \\
&= \exp(tu(xy) + t^2u_2(xy) + O(t^3))\phi(xy)
\end{aligned}$$

En developpant à l'ordre 2 et en utilisant l'identité que satisfait u, on arrive à :

$$\begin{aligned}
u_2(x) - u_2(xy) + \mathrm{Ad}\ \phi(x)u_2(y) &= \frac{u(xy)^2}{2} - \frac{u(x)^2}{2} + u(y) - u(y)u(x) - \frac{1}{2}(u(xy) - u(x))u(y) \\
&= \frac{1}{2}[u(x), u(xy) - u(x)] \\
&= \frac{1}{2}[u(x), \mathrm{Ad}\ \phi(x)u(y)]
\end{aligned}$$

I.C.3 Construction de la forme symplectique

Il est facile de verifier que pour tout $u \in Z^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$ l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2}[u(x), \mathrm{Ad}\ \phi(x)u(y)]$$

definit un 2-cocycle dans $Z^2(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$. Sur le degré de cohomologie cette opération est simplement le produit

$$[\xi, \xi] : H^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}) \times H^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}) \to H^2(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$$

qui est le produit dans π utilisant le crochet de Lie de $\mathfrak{G}$ comme homomorphisme de coefficient.

Trouver un terme d'ordre 2 u_2 tel que ϕ_t soit un homomorphisme, revient à resoudre l'équation

$$u_2(x) - u_2(xy) + \mathrm{Ad}\ \phi(x)u_2(y) = 0$$

C'est à dire résoudre l'équation $[\xi, \xi] = 0$. En fait, $[\xi, \xi] = 0$ est la première d'une suite infinie d'obstructions (une pour chaque coefficient de la série de Taylor $\phi(x)^{-1}\phi_t(x)$). Chaque solution est défninie par les termes au degré précédent, et chaque solution est dans $H^2(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$. Il s'en suit donc que si chacune des obstructions disparait, alors ξ est tangent à une déformation ϕ_t définie pour des petites valeurs de t.

En général $H^2(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$ est difficile à calculer. Cependant dans le cas qui nous interresse, lorsque π est un groupe fondamental de surface, la dualité de Poincaré nous permet un calcul effectif.

Si V est un π-module, et V^* son dual, il existe un dual pairing naturel

$$H^i(\pi; V) \times H^{2-i}(\pi; V^*) \to H^2(\pi; R) = \mathbb{R}$$

donnée par le produit dans π et utilisant le dual pairing $V \times V^* \to \mathbb{R}$ comme homomorphisme de coefficient. Il vient en prenant $i = 2$ que $H^2(\pi; V) \cong H^0(\pi; V^*)^*$ et $H^0(\pi; V^*)$ est simplement l'espace des π-invariants dans V^*.

On peut appliquer ce resultat au π-module $V = \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}$ pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}(\pi, G)/G$. Si G est reductif (ce qui sera le cas dans la suite) alors il existe une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée $B : \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \to \mathbb{R}$ invariante par la représentation adjointe. Ceci definit un isomorphisme $\mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)} \cong \mathfrak{G}^*_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}$. Il y a donc des isomorphismes :

$$H^2(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}) \cong H^0(\pi; \mathfrak{G}^*_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})^* \cong H^0(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})^*$$

On a donc trouvé un dual pairing

$$H^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}) \times H^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}) \longrightarrow H^2(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)}) = \mathbb{R}$$

Si on regarde maintenant $H^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\ (\phi)})$ comme l'espace Zariski tangent à $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$ en $\{\phi\}$, on peut voir cette application comme un 2-tenseur $\omega^{(B)} = \omega^{(B)}_\phi$ sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$. On arrive donc au théorèle voulu

Théorème I.C.2 : $\omega^{(B)}$ *est une 2-forme extérieure fermée non-dégénérée sur* $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$

Preuve : La non-dégénéréscence provient de la dualité de Poincaré sur M et la non-dégénérescence de B. De même $\omega^{(B)}$ est alternée car le cup-produit est alterné et B est symétrique. Pour une démontration du fait que $\omega^{(B)}$ est fermée, on renvoie le lecteur à [3]. L'application ω definit une structure symplectique sur l'espace modulaire.

Dans le cas où M n'est pas fermée, et a m composantes de bord.

$$\partial(M) = \mathcal{C} = \bigsqcup_{i=1}^{m} \mathcal{C}_i$$

Pour chaque i l'application

$$\begin{aligned} f_i : \mathrm{Hom}(\pi, G) &\to G \\ \phi &\mapsto \phi(c_i) \end{aligned}$$

est surjective et induit une application sur les classes de représentation $[\phi]$. Notons par $[G]$ l'ensemble des classes de conjugaison de G. Pour $r \in [G]$, l'ensemble $f_i^{-1}(r)$ corresponds à l'ensemble des classes de représentation avec la classe de conjugaison de l'holonomie de la composante de bord $\mathcal{C}_i$

D. Un système intégrable sur l'espace modulaire

On a donc construit une structure sympléctique sur l'espace modulaire $\mathrm{Hom}(\pi, G)/G$. On donne maintenant une description d'un système intégrable sur l'espace modulaire (voir [4], [8], [15]). On se place à partir de maintenant dans le cas $G = SU(2)$.

Soit $\alpha \subset M$ une courbe simple fermée correspondant à un element $\alpha \in \pi$. L'application

$$\begin{array}{rcl} s_\alpha : \mathrm{Hom}(\pi, G) & \longrightarrow & [-2, 2] \\ \rho & \longmapsto & \mathrm{tr}(\rho(\alpha)) \end{array}$$

est invariante par les automorphismes interieurs de G agissant sur $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ et definit donc une fonction s_α sur le quotient $\mathcal{X}(M) = \mathrm{Hom}(\pi, G)/G$. Pour toute courbe fermée simple, cette application définit un flot hamiltonien grâce à la structure symplectique definie precedemment.

Proposition I.D.1 : *Si α et β sont des courbes simples fermées disjointes sur M, alors on a*

$$\{s_\alpha, s_\beta\} = 0$$

où $\{\cdot, \cdot\}$ est le crochet defini par la structure symplectique sur $\mathcal{X}(M)$ définie precedement.

Preuve : On peut en fait calculer le produit $\{s_\alpha, s_\beta\}$ dans le cas général où α, β peuvent être d'intersection non-vide Soit $[\phi] \in \mathcal{X}(M)$. Alors l'espace tangent à Xo en $[\phi]$ est $H^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\,(\phi)})$, et donc le flot hamiltonien relatif à $[s_\alpha]$ associe à $[\phi]$ un vecteur tangent dans $H^1(\pi; \mathfrak{G}_{\mathrm{Ad}\,(\phi)})$. Soient $\alpha, \beta \in \pi$ deux courbes fermées qui se croisent aux points $p_1, ..., p_k$. Pour chaque p_i on choisit un représentant de $[\phi]$:

$$\phi_i : \pi_1(M; p_i) \to G$$

Alors

$$\begin{aligned} \{s_\alpha, s_\beta\} &= \Omega(X_{s_\alpha}, X_{s_\beta}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \epsilon(p_i; \alpha, \beta) B(F(\phi_i(\alpha_i)), F(\phi_i(\beta_i))) \end{aligned}$$

où $\epsilon(p_i; \alpha, \beta)$ est le nombre d'intersection orienté de α et β en p_i. B est la forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{G}$ et $F : G \to \mathfrak{G}$ est la fonction définie par la differentielle de f caractérisé par :

$$\frac{d}{dt}|_{t=0} f(P \exp(tX)) = B(F(P), X)$$

En particulier si α, β sont disjointe alors $\{s_\alpha, s_\beta\} = 0$.

Pour trouver un système intégrable il suffit donc de trouver le bon nombre de fonctions commutant 2 à 2.

Si M est une surface fermée de genre g avec m composantes de bords, alors le nombre maximal de courbes disjointes sur M est $3g-3+2m$. Ces courbes exhibent une decomposition en pantalon de la surface M (un "pantalon" etant une sphère à trois trous). Ici notre variété symplectique est $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M)$, les m traces des composantes de bord sont fixées, donc on ne les prends pas en compte. On a donc trouvé $N = 3g - 3 + m$ fonctions commutant sur $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M)$. La dimension de $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M)$ est $6g-6+2m$ (lorsque $G = SU(2)$), en effet π a $2g+m$ générateurs et une relation. Donc $\mathrm{Hom}(\pi, G)$ est de dimension $(2g+m-1)\dim G$. En passant au quotient par G il vient que la dimension de $\mathcal{X}(M)$ est $(2g+m-1)\dim G - \dim G$. Ici $\dim G = \dim SU(2) = 3$ donc $\dim \mathcal{X}(M) = 6g - 6 + 3m$. Donc en fixant les m classes de conjugaison sur les bords il vient que $\dim \mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M) = 6g - 6 + 2m = 2N$. Avec la décomposition en pantalons, On a donc trouvé N fonctions commutant deux à deux sur $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M)$ qui est une variété symplectique de dimension $2N$. C'est donc un système intégrable, on va donc pouvoir appliquer les resultats de la partie I.A pour étudier le comportement de ce système intégrable pour comprendre l'action de Γ_M sur l'espace modulaire.

II - Ergodicité de l'action du groupe modulaire

Le but de cette partie est de démontrer le théorème I .

A. La sphère à trois trous

Pour comprendre la structure de l'espace modulaire d'une surface quelconque, on doit d'abord comprendre la structure de l'espace modulaire d'une sphère à trois trous (un pantalon). Le resultat suivant sur les représentations de son groupe fondamental, qui est un groupe libre à deux générateurs, est discuté dans [11] :

Proposition II.A.1 : *Si M est une sphère à trois trous, et A, B, C ses composantes de bord. Alors l'application trace*

$$\begin{array}{rcl} \chi : \mathcal{X}(M) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \rho & \longmapsto & \begin{bmatrix} \text{tr } (\rho(A)) \\ \text{tr } (\rho(B)) \\ \text{tr } (\rho(C)) \end{bmatrix} \end{array}$$

identifie $\mathcal{X}(M)$ avec l'ensemble

$$\mathcal{B} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | -2 \le a,b,c \le 2, a^2+b^2+c^2-abc \le 4\}$$

Les caractères des représentations reductibles forment le bord

$$\partial\mathcal{B} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | -2 \le a,b,c \le 2, a^2+b^2+c^2-abc = 4\}$$

Preuve : On remarque tout d'abord que π est un groupe libre à 2 générateurs A et B. On peut donc identifier $\text{Hom}(\pi, G)$ à G^2 grace à la fonction d'évaluation $\rho \mapsto (\rho(A), \rho(B))$. D'aprés la combinatoire des matrices dans $SL(2, \mathbb{C}$ (cf [14]), la fonction $\theta : (X,Y) \in SL(2,\mathbb{C})^2 \mapsto (\text{tr } (X), \text{tr } (Y), \text{tr } (XY)) \in \mathbb{C}^3$ est surjective. D'autre part en notant le polynome

$$\kappa(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-xyz-2$$

on a $\kappa(\theta(X,Y)) = \text{tr } ([X,Y])$. Et surtout on a le fait que si $\kappa(\theta(X,Y)) = 2$ la représentation linéaire générée par X et Y est reductible.

Finalement si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est telle que $\kappa(x,y,z), |x|, |y|, |z|$sont tous < 2, il existe $X, Y \in SU(2)$ tels que $\theta(X,Y) = (x,y,z)$. De plus tous les X, Y satisfaisant cette égalité sont $SU(2)$-conjugués (cf [8]), ce qui nous amène au résultat souhaité.

Finalement, ce lemme montre que dans le cas où $M = S_{0,3}$,la variété caractère relative $\mathcal{X}_\mathcal{C}(M)$ est triviale. De même le groupe modulaire est trivial. Ce qui prouve le premier cas trivial du théorème II.

B. Le tore à un trou

II.B.1 Système de coordonnées

Soit M une sruface compacte de genre 1 avec une composante de bord, un tore à un trou. Son groupe fondamental est un groupe libre de rang 2 (comme dans le cas de la sphère à trois trous) et admet la presentation suivante :

$$\langle X, Y, K | XYX^{-1}Y^{-1} = K \rangle$$

où K correspond au générateur de $\pi_1(\partial M)$. Si on note les coordonnées :

$$x = \text{tr }(\rho(X)), y = \text{tr }(\rho(Y)), z = \text{tr }(\rho(XY))$$

. En utilisant la proposition II.A.1, on a que les classes d'équivalence des représentations $\rho : \pi_1(M) \to SU(2)$ satisfont les relations :

$$-2 \leq x, y, z \leq 2, x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 \leq 2$$

On remarque que $k = \text{tr }(\rho(K)) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$, et donc pour un $\mathcal{C} = k \in [-2, 2]$, on a la variété caractère relative :

$$\mathcal{X}_k(M) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | -2 \leq x, y, z \leq 2, x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 = k$$

L'espace modulaire complet est :

$$\mathcal{X}(M) = \bigcup_{-2 \leq k \leq 2} \mathcal{X}_k(M).$$

II.B.2 Action d'un twist de Dehn

Le groupe modulaire du tore à un trou est engendré par les twists de Dehn selon X et Y. Pour prouver l'ergodicité de l'action du groupe modulaire, on étudie donc l'action de ces twists sur les coordonées de la variété caractère relative.
Le txist de Dehn τ_X par rapport à X est donné par l'automorphisme de $\pi_1(M)$:

$$X \mapsto X, Y \mapsto YX$$

Cet automorphisme induit l'application suivante sur $\mathcal{X}(M)$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ z \\ xz - y \end{bmatrix}$$

Il est clair que x et k sont des fonctions invariantes par τ_X. Donc pour des valeurs fixées de x, k l'intersection

$$\begin{aligned}
E_{x,k} &:= \mathcal{X}_k(M) \cap (\{x\} \times \mathbb{R}^2) \\
&= \{x\} \times \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2 = k\} \\
&= \{x\} \times \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 | \frac{2+x}{4}(y+z)^2 + \frac{2-x}{4}(y-z)^2 = 2 + k - x^2\}
\end{aligned}$$

est une ellipse préservée par τ_X. Par le changement de coordonées linéaire en y, z suivant :

$$\begin{aligned}
\tilde{x} =& x \\
\tilde{y} =& \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}}{2} y + \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{2} z \\
\tilde{z} =& \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{2} y + \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}}{2} z
\end{aligned}$$

on peut transformer $E_{x,k}$ en le cercle dans les nouvelles coordonnées :

$$E_{x,k} = \{(\tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^2 | \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 = 2 + k - x^2\}.$$

On peut maintenant voir comment agit τ_X sur ce cercle. Si on note

$$\lambda^+ = \frac{\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}}{2}, \ \lambda^- = \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{2}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}
\tau_X(\tilde{y}) &= \lambda^+ z + \lambda^-(xz - y) \\
&= \lambda^+ z - \lambda^- y + \frac{\lambda^-}{2} xz - \frac{\lambda^-}{2} xz + \frac{\lambda^+}{2} xy - \frac{\lambda^+}{2} xy \\
&= \frac{x}{2}(\lambda^+ y + \lambda^- z) - (\lambda^- y + \lambda^+ xy) + (\lambda^+ z + \lambda^- xz) \\
&= \frac{x}{2}\tilde{y} + \frac{(2-x)\sqrt{2+x} - (2+x\sqrt{2-x}}{4} y + \frac{(2+x)\sqrt{2-x} + (2-x\sqrt{2+x}}{4} z \\
&= \frac{x}{2}\tilde{y} + \frac{\sqrt{(2+x)(2-x)}}{2}(\lambda^- y + \lambda^+ z) \\
&= \frac{x}{2}\tilde{y} + \frac{\sqrt{(2+x)(2-x)}}{2}\tilde{z}
\end{aligned}$$

De même

$$\tau_X(\tilde{z}) = -\frac{\sqrt{(2+x)(2-x)}}{2}\tilde{y} + \frac{x}{2}\tilde{z}$$

Or on sait que $\frac{\sqrt{(2+x)(2-x)}}{2} = \sin^{-1}(\cos(x/2))$.
On voit directement que τ_X agit comme la rotation d'angle $\theta = \cos^{-1}(x/2)$:

$$\tau_X : \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}$$

En particulier, lorsque θ est est un multiple irrationnel de π, l'automorphisme τ_X est ergodique sur $E_{x,k}$. Comme $\theta = \cos^{-1}(x/2)/\pi$ est iraationnel pour presque tout $x \in [-2,2]$, une fonction mesurable $f : \mathcal{X}_k(M) \to \mathbb{R}$ invariante par τ_X, doit être presque partout égale à une fonction dépendant uniquement de x.
De la même façon, on peut appliquer cette méthode au twist de Dehn τ_Y selon Y sur $E_{y,k}$. On en deduit qu'une fonction τ_Y invariante doit etre presque partout égale à une fonction dependant uniquement de y.
Un fonction Γ-invariante étant en particulier τ_X-invariante et τ_Y-invariante, on en deduit donc qu'une fonction γ-invariante $f : \mathcal{X}_k(M) \to \mathbb{R}$ doit être constante presque partout. Ceci établit le Théorème II dans le cas du tore à 1 trou.

C. La sphère à quatre trous

II.C.1 Système de coordonnées

On va demontrer le théorème II dans le cas de la sphère à 4 trous, de la même manière que pour le tore à 1 trou. Soit donc M une telle sphère.
Le groupe fondamental de M admet la présentation suivante

$$\pi_1(M) = \langle A, B, C, D | ABCD = I \rangle$$

où A, B, C, D correspondent aux quatre composantes de bord. On note par $X = AB$, $Y = BC$, $Z = CA$. Pour une représentation $\rho : \pi_1(M) \to SU(2)$, les fonctions a, b, c, d, x, y, z (où $x = \mathrm{tr}\ (\rho(X))$ par exemple) satisfont l'équation (*) :

$$(x^2 + y^2 + z^2 + xyz) = (ab + cd)x + (ad + bc)y + (ac + bd)z - (a^1 + b^2 + c^2 + d^2 + abcd - 4)$$

Pour une composante de bord $k = (a, b, c, d)$ la variété caractère relative $\mathcal{X}_k(M)$ est l'ensemble des $(x, y, z) \in [-2, 2]^3$ qui satisfont cette équation.
Si $x \neq \pm 2$, on peut réécrire l'équation (*) sous la forme :

$$\frac{2+x}{4}\left((y+z) - \frac{(a+b)(c+d)}{2+x}\right)^2 + \frac{2-x}{4}\left((y-z) - \frac{(a-b)(d-c)}{2-x}\right)^2$$

$$= \frac{(x^2 - abx + a^2 + b^2 - 4)(x^2 - cdx + c^2 + d^2 - 4}{4 - x^2}$$

Pour un $x \in]-2, 2[$, le terme de gauche de l'équation est une fonction quadratique en y, z avec des coefficients dominants positifs. D'autre part, si on coupe M selon X on obtient deux sphère à trois trous P et P', dont les composantes de bord sont respectivement A, B, X et C, D, X. Donc les triplets (a, b, x) et (c, d, x) sont les caractères de représentations de $\pi_1(P)$ et $\pi_1(P')$ dans $SU(2)$. Donc d'aprés la proposition I.C.2, on obtient :

$$x^2 + a^2 + b^2 - abx - 4 \leq 0$$

$$x^2 + c^2 + d^2 - cdx - 4 \leq 0$$

Donc le terme de droite de l'équation est positif ou nul, et il est strictement positif lorsque les représentations de $\pi_1(P)$ et $\pi_1(P')$ sont irreductibles. On peut donc réécrire (*) sous la forme :

$$Q_x(y - y_0(x), z - z_0(x)) = \frac{(x^2 - abx + a^2 + b^2 - 4)(x^2 - cdx + c^2 + d^2 - 4}{4 - x^2}$$

où

$$y_0(x) = ad + bc$$
$$z_0(x) = ac + bd - x(ad + bc)$$

et

$$\begin{aligned} Q_x(\eta, \zeta) &= \frac{2+x}{4}\left(\frac{\eta+\zeta}{2+x}\right)^2 + \frac{2-x}{4}\left(\frac{\eta-\zeta}{2-x}\right)^2 \\ &= \frac{\eta^2 + \zeta^2 - x\eta\zeta}{4 - x^2} \end{aligned}$$

est une forme quadratique définie positive pour tout $-2 < x < 2$. Ceci paramètre $\mathcal{X}_k(M)$ comme une famille d'ellipses $E_x(a, b, c, d)$ paramétrées par (a, b, c, d, x).

II.C.2 Action d'un twist de Dehn

On peut maintenant étudier l'action du twist de Dehn τ_X selon $X = AB$ sur $\mathcal{X}_k(M), k = (a, b, c, d)$. τ_X est l'automorphisme de $\pi_1(M)$ défini par :

$$\begin{aligned} A &\mapsto A \\ B &\mapsto B \\ C &\mapsto ABCB^{-1}A^{-1} \\ D &\mapsto ABDB^{-1}A^{-1} \end{aligned}$$

Cet automorphisme agit sur les courbes $X = AB, Y = BC, Z = CA$ par :

$$\begin{aligned} AB &\mapsto AB \\ BC &\mapsto BABCB^{-1}A^{-1} \\ CA &\mapsto ABCB^{-1} \end{aligned}$$

La transformation de $\mathcal{X}_k(M)$ induite par τ_X préserve $k = (a, b, c, d)$ et laisse invariante la fonction $x : \mathcal{X}_k(M) \to [-2, 2]$, mais agit sur y, z de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (ad + bc) - x(ac + bd) + x(xy + z) - y \\ (ac + bd) - (xy + z) \end{bmatrix}$$

Ce qui donne en remplacant par $y_0(x), z_0(x)$:

$$\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} y_0(x) \\ z_0(x) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x^2 - 1 & x \\ -x & -1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_0(x) \\ z_0(x) \end{bmatrix} \right)$$

On reconnait donc la rotation d'angle $2\cos^{-1}(x/2)$ sur l'ellipse $E_x(a, b, c, d)$ définie precedement. En particulier, lorsque $2\cos^{-1}(x/2)$ n'est pas un multiple rationnel de π (c'est à dire pour presque tout x), l'action de τ_X sur $E_x(a,b,c,d)$ est ergodique.

On peut faire de même avec le twist τ_Y selon $Y = BC$ qui induit l'automorphisme de $\pi_1(M)$ défini par :

$$\begin{aligned} A \mapsto& \quad BCBCC^{-1}B^{-1} \\ B \mapsto& \quad B \\ C \mapsto& \quad C \\ BC \mapsto& \quad BCDC^{-1}B^{-1} \\ AB \mapsto& \quad BCAC^{-1} \\ BC \mapsto& \quad BC \\ CA \mapsto& \quad CBCAC^{-1}B^{-1} \end{aligned}$$

La transformation de $\mathcal{X}_k(M)$ induite par τ_Y préserve $k = (a,b,c,d)$ et laisse invariante la fonction $y : \mathcal{X}_k(M) \to [-2,2]$, mais agit sur z, x de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} (ba+cd) - y(bd+ca) + y(yz+x) - z \\ (bd+ca) - (yz+x) \end{bmatrix}$$

Par des changements de coordonnées similaires à ceux utilisés pour X, on peut parametrer $\mathcal{X}_k(M)$ comme une famille d'ellipses $E_y(a,b,c,d)$ paramétrées par (a,b,c,d,y) sur laquelle la transformation τ_Y agit comme la rotation d'angle $2\cos^{-1}(y/2)$. Donc pour presque tout y l'action de τ_Y sur $E_y(a,b,c,d)$ est ergodique. Il vient donc qu'une fonction $f : \mathcal{X}(M) \to \mathbb{R}$ invariante par τ_X et τ_Y doit être une fonction qui depend uniquement de (a,b,c,d). Comme Γ_M est engendré par τ_X et τ_Y, il vient qu'une fonction Γ_M-invariante sur $\mathcal{X}_k(M)$ est constante presque partout. Ce qui établit le théorème II dans le cas de la sphère à quatre trous.

D. Décomposition de la surface et espace modulaire

Pour demontrer le Théorème II dans le cas général, nous allons utiliser la décomposition en pantalons de M. En coupant la surface le long de courbes simple et en considérant la surface coupée le long de cette courbe, on va pouvoir utiliser les resultats deja connus, puis on va recoller la surface le long des courbes pour pouvoir obtenir la surface de depart.

Soit $C \subset M$ une courbe simple fermée non null-homotope. Soit $M|C$ la surface coupée le long de C , définie comme la surface à bord $M|C$ pour laquelle il y a une application d'identification $i_C : M|C \to M$ qui satisfait :

• La restriction de i_C à $i_C^{-1}(M \setminus C)$ est un difféomorphisme.

• $i_C^{-1}(C)$ consiste en deux composantes $C_+, C_- \subset \partial(M|C)$. LA restriction de i_C à chacune de ces composantes étant un difféomorphisme sur C.

L'espace modulaire $\mathcal{X}(M|C)$ est plus simple que $\mathcal{X}(M)$ et $\mathcal{X}(M)$ peut être reconstruit à partir de $\mathcal{X}(M|C)$. Il existe deux cas, selon que la courbe C est *séparante* ou *non-séparante* .

II.D.1 Le cas non-séparant

Supposons que C est non-séparante, c'est à dire que $M|C$ est connexe. Alors M est obtenue en recollant deux composantes de bord C_+, C_- de $A = M|C$. L'application d'identification $i_C : A \to M$ est injective sur $A \backslash (C_- \cup_a lpha_+$ et l'image d'un élément de $C_- \cup C_+$ admet deux antécedent (un dans C_- l'autre dans C_+. Alors $\pi_1(M)$ est obtenu à partir de $\pi_1(A$ par la construction suivante :
$\pi_1(M)$ est le quotient du produit libre $\pi_1(A) \ltimes \langle\tau\rangle$ de $\pi_1(A)$ avec un groupe cyclique $\langle\tau\rangle \cong \mathbb{Z}$, quotienté par le sous-groupe distingué engendré par l'ensemble

$$\{i_-(\gamma)^{-1}\tau i_+(\gamma)^{-1}\tau^{-1}|\gamma \in \pi_1(C)\} \subset \pi_1(A) \ltimes \langle\tau\rangle$$

où

$$i_\pm : \pi_1(C) \to \pi_1(C_\pm) \overset{(i_C)_*}{\to} \pi_1(M)$$

représente les applications induites par les inclusions $C \hookrightarrow C_\pm \hookrightarrow M$. LE nouveau générateur τ correspond à une boucle dans M qui intersecte C. Sa préimage dans A est un arc α avec une extrémité sur C_+ et l'autre sur C_-. On choisit comme point base x_0 l'extrémité de α sur C_-.

Soit γ_- l'element de $\pi_1(A, x_0)$ correspondant à C_-, et soit γ_+ l'element correspondant à la boucle $\alpha^{-1} \star C_+ \star \alpha$, où C_+ est vue comme la boucle dont le point base est l'extrémité de α sur C_+. Une représentation $\rho : \pi_1(A) \to G$ se prolonge en une représentation sur $\pi_1(M)$ si et seulement si il existe un $t \in G$ tel que

$$\rho(\gamma_-) = t\rho(\gamma_+)t^{-1} \ (*)$$

c'est-à-dire si $\rho(\gamma_-)$ est conjugué à $\rho(\gamma_+)$. Comme deux elements de G sont conjugués si et seulement si ils ont la même trace, l'image de la restriction $\mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(A)$ consiste en l'ensemble des $[\rho]$ tels que

$$\mathrm{tr}\ (\rho(\gamma_-)) = \mathrm{tr}\ (\rho(\gamma_+)).$$

La fibre de $\mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(A)$ s'identifie avec l'ensemble de tous les $t \in G$ satisfaisant $(*)$. L'ensemble de tous les t est un sous-ensemble du centralisateur $\zeta(\rho(\gamma_-))$. En particulier $\zeta(\rho(\gamma_-))$ agit simplement transitivement sur les fibres de $\mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(A)$ par l'action définie par

$$z \cdot \rho : \begin{cases} \alpha & \mapsto \rho(\alpha) \quad \text{pour } \alpha \in \pi_1(A) \\ \gamma & \mapsto \rho(\gamma)z \end{cases}$$

II.D.2 Le cas séparant

Supposons que C est séparante, c'est à dire que M est une surface compacte décomposée en sous-surfaces A et B le long de la courbe simple fermée $C = A \cup B$. On suppose que $\chi(A) < 0$ et $\chi(B) < 0$. Alors les inclusions

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & M \end{array}$$

induisent les monomorphismes

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(C) & \longrightarrow & \pi_1(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_1(B) & \longrightarrow & \pi_1(M) \end{array}$$

Et $\pi_1(M)$ est ainsi représenté par le produit libre amalgamé

$$\pi_1(M) = \pi_1(A) \coprod_{\pi_1(C)} \pi_1(B)$$

.

On definit $\mathcal{X}(M; A, B, C)$ comme le tiré-en-arrierre dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}(C) & \longleftarrow & \mathcal{X}(A) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{X}(B) & \longleftarrow & \mathcal{X}(M; A, B, C) \end{array}$$

c'est à dire que $\mathcal{X}(M; A, B, C)$ consiste en toutes les paires $([\alpha], [\beta]) \in \mathcal{X}(A) \times \mathcal{X}(B)$ telles que

$$[\alpha|_{\pi_1(C)}] = [\beta|_{\pi_1(C)}] \in \mathcal{X}(C)$$

L'application naturelle $j : \mathcal{X}(M; A, B, C) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ est surjective. Si $[\rho] \in \mathcal{X}(M)$, pour une représentation ρ, alors les restrictions de ρ à $\pi_1(A)$ (respectivement $\pi_1(B)$) sont équivalentes à des représentations ρ_A (respectivement ρ_B) telles que $[\rho_A] \in \mathcal{X}(A)$ et $[\rho_B] \in \mathcal{X}(B)$ et $\rho_A|_{\pi_1(C)} = \rho_B|_{\pi_1(C)}$. Soit maintenant une paire

$$([\alpha], [\beta]) \in \mathcal{X}(M; A, B, C)$$

et ρ une représentation telle que

$$\rho_{\pi_1(A)} \equiv \alpha, \ \rho_{\pi_1(B)} \equiv B$$

Les elements z du centralisateur $\zeta(\rho, C)$ de $\rho(\pi_1(C))$ agissent sur les fibres $j^{-1}([\alpha], [\beta])$ de la façon suivante :

$$z \cdot \rho : \gamma \longmapsto \begin{cases} \alpha(\gamma) & \text{pour } \gamma \in \pi_1(A) \\ z\beta(\gamma)z^{-1} & \text{pour } \gamma \in \pi_1(B) \end{cases}$$

avec $\rho \in j^{-1}([\alpha], [\beta])$.

E. Le cas général

II.E.1 Décomposition en pantalons

Soit M une surface de genre g avec m composantes de bord. Sa caractéristique d'Euler est $\chi(M) = 2 - 2g - m$. On décompose M en pantalons P_i, des sphères à trois trous. On note par $\mathcal{P}$ l'ensemble des pantalons de la décomposition. Comme la caractéristique d'Euler de chaque pantalon est de -1, le cardinal de $\mathcal{P}$ est $2g - 2 + m$. L'union $\mathcal{B}$ de tous les ∂P_i $(i = 1, ..., 2g - 2 + 2m)$ consiste en

$$N = 3g - 3 + 2m$$

courbes fermées simples disjointes. Pour chaque $b_i \in \mathcal{B}$, on considère l'application

$$\begin{aligned} s_i : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ [\rho] &\longmapsto \text{tr } (\rho)(b_i) \end{aligned}$$

Et on note par $s_{\mathcal{P}}$ l'application

$$\mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

définie par $s_{\mathcal{P}} = (s_1, ..., s_N)$.

Lemme II.E.1 : *L'image $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$ de $s_{\mathcal{P}}$ consiste en tous les $t \in [-2,2]^N$ tels que*

$$t_i^2 + t_j^2 + t_k^2 - t_i t_j t_k - 2 \leq 2$$

pour chaque $P_l \in \mathcal{P}$ tel que $\partial P_l = \{b_i, b_j, b_k\}$.

Preuve : Le caractère (t_i, t_j, t_k) de la restriction de ρ à $\pi_1(P_l)$ est dans $\mathcal{X}(P_l)$. On peut donc utiliser la proposition II.A.1, pour montrer que le triplet (t_i, t_j, t_k) satisfait l'inégalité voulue.
Réciproquement supposons que $t \in [-2,2]^N$ satisafit l'inégalité pour chaque triplet (i, j, k) correspondant à un pantalon $P_l \in \mathcal{P}$. On choisit une représentation $\rho_l : \pi_1(P_l) \to G$ dont le caractère est (t_i, t_j, t_k). Alors pour tout $b_i = \partial P_l \cap \partial P_q$ il existe g_i tel que $\rho_l(b_i) = g_i \rho_q(b_i) g_i^{-1}$, c'est à dire que la classe de conjugaison de $\rho_l(b_i)$ et de $\rho_q(b_i)$ est la même. Donc tr $(\rho)_l(b_i) =$ tr $(\rho)_q(b_i)$. On continue de cette façon pour chaque pantalon dans $\mathcal{P}$. $\square$

On applique le lemme II.A.1 à l'application $s_{\mathcal{P}}$. La classe d'équivalence d'une representation de chaque $\pi_1(P_l)$ est determinée par les trois traces des composantes de bord t_i, t_j, t_k. La fibre $s_{\mathcal{P}}^{-1}(t)$ corresponds aux differentes amalgamation des $\pi_1(P_l)$ et $\pi_1(P_q)$, où P_l et P_q sont des surfaces adjacentes dans la decomposition en pantalons. Soit

$$b_j = \partial P_l \cap \partial P_q \in \mathcal{B}$$

alors les inclusions $b_j \hookrightarrow P_l$ et $b_j \hookrightarrow P_q$ induisent des monomorphismes de $\pi_1(b_j) \to \pi_1(P_l)$ et $\pi_1(b_j) \to \pi_1(P_q)$ respectivement. On note les elemnts de $\pi_1(P_l)$ et $\pi_1(P_q)$ correspondant au générateur de $\pi_1(b_j)$ par γ_j. Par le théorème de Van Kampen, le groupe fondamental de $P_l \cup P_q$ admet la décomposition

$$\pi_1(P_l \cup P_q) = \pi_1(P_l) \coprod_{\gamma_j} \pi_1(P_q)$$

Soit ρ_l et ρ_q les représentations de $\pi_1(P_l)$ et $\pi_1(P_q)$ respectivement dans G telles que $\rho_l(\gamma_j) = \rho_q(\gamma_j)$. Les elements du centralisateur $\zeta(\rho(\gamma_j))$ de $(\rho(\gamma_j))$ determinent les classes d'équivalence $[\rho]$ des représentations $\rho : \pi_1(P_l \cup P_q) \to G$ telles que les restrictions de $[\rho]$ sur $\pi_1(P_l)$ et $\pi_1(P_q)$ soient égales à $[\rho_l]$ et $[\rho_q]$ respectivement. Pour tout $z \in \zeta(\rho(\gamma_j))$, l'application

$$\gamma \longmapsto \begin{cases} \rho(\gamma) & \text{pour } \gamma \in \pi_1(P_l) \\ z\rho(\gamma)z^{-1} & \text{pour } \gamma \in \pi_1(P_l) \end{cases}$$

definit une représentation

$$z \cdot \rho : \pi_1(P_l \cup P_q) \longrightarrow G$$

De plus cette représentation definit une action de $\zeta(\rho(\gamma_j))$ sur $\mathcal{X}(P_l \cup P_q)$. Cette action est triviale sur le centre $\zeta(G) = \zeta(SU(2) = \{\pm I\}$. L'action resultante de $\zeta(\rho(\gamma_j))/\zeta(G)$ est effective sir les restrictions de ρ à $\pi_1(P_l)$ et $\pi_1(P_q)$ sont irreductibles. Si $\rho(\gamma_j) \neq \pm I$, alors $\zeta(\rho(\gamma_j))$ est l'unique sous-groupe à un paramètre (un tore maximal dans $SU(2)$) contenant $\rho(\gamma_j)$. Ainsi le produit sur $\mathcal{B}$

$$\prod_{i=1}^{N} \zeta(\rho(\gamma_i)) = \mathbb{T}^N$$

est isomorphe à un N-tore. L'action resultante de $\mathbb{T}^N$ sur la fibre $s_{\mathcal{P}}^{-1}(t)$ est siplement transitivve pour presque tout $t \in \mathcal{I}_{\mathcal{P}}$.

II.E.2 Décomposition ergodique

Pour démontrer le cas général, nous allons avoir besoin du lemme suivant qui vient de la théorie de la mesure :

Lemme II.E.2 : *Soit $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, Y, Z des espaces de Borel, et $F : X \longrightarrow Y$ une application mesurable. On suppose que Γ est un gruope d'automorphismes de $(X, \mathfrak{B}, \mu)$ tel que F est Γ-invariant. Soit μ_y la famille de mesure sur $F^{-1}(y)$ obtenue en désintégrant μ par rapport à F. Soit $h : X \longrightarrow Z$ une fonction mesurable Γ invariante.*

On suppose que l'action de Γ est ergodique pour presque tout $y \in Y$ (par rapport à la mesure poussée en avant par $F_*\mu$) sur chaque fibre $(F^{-1}(y), \mu_y)$.

Alors il existe une fonction mesurable $H : Y \longrightarrow Z$ telle que $h = H \circ F$ presque partout.

Preuve : La preuve vient directement de la théorie de la désintégration (voir [7] pour plus de détails). La décomposition de la mesure μ sur X en composantes Γ-ergodiques est précisement la désintégration de μ par rapport à h. On rappelle que cela veut dire qu'il existe une famille μ_y de mesures, paramétrées par $y \in Y$, telle que μ_y est une mesure sur $F^{-1}(y)$, et il existe une mesure $F_*\mu$ (le poussé en avant de μ par F), de tele sorte que pour toute fonction mesurable f sur Y :

$$\int_X f\, d\mu = \int_Y \left(\int_{F^{-1}(y)} f\, d\mu_y \right) d(F_*\mu)$$

Dans ce cas μ est définie comme *l'intégrale directe* des mesures μ_y, et est écrite :

$$\mu = \int_Y \mu_y\, d(F_*\mu)$$

Dans le cas qui nous interresse, ce lemme nous donne le théorème suivant qui nous allons démontrer.

Théorème II.E.3 : *Soit α une collection de courbes simples fermées non-triviales et homotopiquement distinctes sur M. Pour presque tout $t \in [-2,2]^n$, $s_\alpha^{-1}(t)$ est une orbite de la $\mathbb{R}^n$-action hamiltonienne difféomorphe à un n-tore et Γ_α est ergodique sur $s_\alpha^{-1}(t)$. Pour toute fonction Γ_α-invariante mesurable $f : \mathcal{X}(M) \to \mathbb{R}$, il existe une fonction mesurable $f' : \mathcal{X}(M|\alpha) \to \mathbb{R}$ telle que $f = f' \circ (s_\alpha)_*$ presque partout.*

En fait les fonction s_α definissent des coordonées sur $\mathcal{X}(M)$. En appliquant les twists de Dehn selon les courbes α, on peut montrer qu'une fonction mesurable invariant est une fonction ne dependant que des coordonnées s_α.

II.E.3 Automorphismes de la décomposition en pantalon

Le stabilisateur $\Gamma_\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ dans Γ_M est engendré par les twists de Dehn τ_i selon b_i. Ce groupe libre abélien a une base $\tau_1, ..., \tau_N$. Evidemment $s_\mathcal{P} : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{I}_\mathcal{P}$ est $\Gamma_\mathcal{P}$ invariante. On résume les résultats précedents :

Lemme II.E.4 : *Soit $t \in \mathcal{I}_\mathcal{P}$. On suppose que $t_j \neq \pm 2$ pour $j = 1, ..., N$. On note $\theta_j = \cos^{-1}(t_j/2)$. Alors il existe un homomorphisme $\Gamma_\mathcal{P}$-équivariant*

$$h : s_\mathcal{P}^{-1}(t) \longrightarrow T^N$$

tel que pour tout $\xi \in s_\mathcal{P}^{-1}(t)$, et pour tout $(n_1, ..., n_N) \in \mathbb{Z}^N$,

$$h : \tau_1^{n_1} ... \tau_N^{n_N}\, \xi \longmapsto \begin{bmatrix} e^{in_1\theta_1} h_1 \\ \vdots \\ e^{in_N\theta_N} h_N \end{bmatrix}$$

où

$$h(\xi) = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}$$

De plus h envoie la mesure obtenue en desintégrant le volume symplectique de $\mathcal{X}$ sur $s_\mathcal{P}^{-1}(t)$ par l'application $s_\mathcal{P} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^N$ sur un multiple de la mesure de Haar sur T^N.

L'application $s_\mathcal{P} : \mathcal{X}(M) \to \mathbb{R}^N$ est une application moment (comme definie en I.A) pour une $\mathbb{R}^N$-action. C'est une submersion sauf sur le sous-ensemble formé des $[\rho] \in \mathcal{X}(M)$ tels que $s_j(\rho) = \pm 2$ pour un $j = 1, ..., N$. Ses orbites sont des tores de dimension N (théorème I.B.3).
Le groupe d'isotropie de l'orbite dans la fibre $s_\mathcal{P}^{-1}(t)$ est le reseau

$$\left\{(n_1 \sin^{-1}(t_1/2), ..., n_N \sin^{-1}(t_N/2)) | n_1, ..., n_N \in \mathbb{Z}\right\}$$

Aprés avoir éliminé de $\mathcal{X}(M)$ un ensemble de mesure nulle, on obtient un ensemble $\mathcal{X}'(M)$ tel que la restriction $s_{\mathcal{P}} : \mathcal{X}'(M) \to [-2,2]^N$ satisfait :

- les fibres $s_{\mathcal{P}}^{-1}(t)$ sont toutes des tores de dimension N ;
- L'action de $\Gamma_{\mathcal{P}}$ sur $s_{\mathcal{P}}^{-1}(t)$ est ergodique.

De façon précise on définit :

$$\mathcal{X}_{\mathbb{Q}} = \left\{ [\rho] \in \mathcal{X}(M) \mid \frac{\cos(s_j([\rho]))}{2} \in \mathbb{Q} \right\}$$

Pour chaque $[\rho] \notin \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$, l'application $s_{\mathcal{P}}$ est une submersion et ainsi la fibre $s_{\mathcal{P}}^{-1}(t)$, où $t = s_{\mathcal{P}}([\rho])$, est une variété lisse de dimension N invariant sous la $\mathbb{R}^N$-action hamiltonienne localement libre. Comme $s_{\mathcal{P}}^{-1}(t)$ est compact, cette action est transitive et la fibre est un tore. De plus, comme $[\rho] \notin \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$, l'action de $\Gamma_{\mathcal{P}}$ est un produit cartésien de rotations irrationnelles. De cette façon, l'action de $\Gamma_{\mathcal{P}}$ sur $s_{\mathcal{P}}^{-1}(t)$ est ergodique. Comme $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ est une union dénombrable de sous-variétés de dimension inférieure, $\mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ est de mesure nulle. On remplace donc $\mathcal{X}(M)$ par le sous-ensemble $\Gamma_{\mathcal{P}}$-invariant $\mathcal{X}'(M) = \mathcal{X}(M) \setminus \mathcal{X}_{\mathbb{Q}}$ de mesure pleine. En appliquant le lemme II.E.1, on obtient :

Théorème II.E.5 : *Soit $f : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable $\Gamma_{\mathcal{P}}$-invariante. Alors il existe une fonction $F : \mathcal{I}_{\mathcal{P}} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = F \circ s_{\mathcal{P}}$ presque partout*

Le théorème II.E.3 suit immédiatement puisque tout système de courbe α peut être étendu à un système de courbes $\mathcal{B}$ venant d'une décomposition en pantalons.

F. Conclusion de la preuve

Nous avons maintenant tous les ingrédients en main pour prouver le théorème II. LA reduction associée à une décomposition en pantalon se conjugue avec l'analyse des cas du tore à un trou et de la sphère à quatre trous.

Soit M une surface de genre g et avec m composantes de bords. On pose $N = 3g-3+2m$. On choisit une décomposition en pantalon $\mathcal{P}$ qui découpe M en $2g-2+m$ pantalon, et qui définit égalementun ensemble $\mathcal{B}$ de N courbes fermées simples disjointes dont m correspondent aux composantes de bord (on notera les m courbes correspondantes comme $b_{N-m+1}, ..., b_N$ (le choix de la décomposition en pantalon est arbitraire). On définit

$$s_{\mathcal{P}} : \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathbb{R}^N$$

comme dans le paragraphe précedent.

Soit $f : \mathcal{X}(M) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable Γ_M-invariante. f est donc invariante par le sous-groupe $\Gamma_{\mathcal{P}} \subset \Gamma_M$. On en deduit donc d'aprés le théorème II.E.5 que f ne depend que des traces $s_1, ..., s_N$ des courbes de $\mathcal{B}$. De façon précise, il existe une fonction F définie sur $\mathcal{I}_{\mathcal{P}}$, l'image de $s_{\mathcal{P}}$, telle que

$$f([\rho]) = F(s_1([\rho]), ..., s_N([\rho]))$$

On applique maintenant des twists de Dehn ne préservant pas la décompostition en pantalon (c'est à dire n'appartenant pas à $\Gamma_{\mathcal{P}}$) pour montrer que la fonction f est indépendante des fonctions s_j. On choisit une courbe $b_j \in \mathcal{B}$ qui ne correspond pas à une composante de bord. Soit alors $P, P' \in \mathcal{P}$ les deux sous-surfaces dont le bord contient b_j et notons $S = P \cup P' \subset M$ la sous-surface de M formée par le recollement de P et P'. Deux cas se présentent alors :

- b_j est non séparante, dans ce cas $P = P'$ et S est alors un tore à un trou ;
- b_j est séparante, auquel cas S est une sphère à quatre trous.

Dans chacun des deux cas, Γ_S s'injecte comme un sous-groupe de Γ_M. L'application restriction $\mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(S)$ est Γ_A équivariante.

Nous allons maintenant procéder par induction sur $j = 1, ..., 3g-3+m = N'$. Soit $j \in 1, ..., N'$ Supposons que F ne depend que des fonctions $s_j, ..., s_N$, on va montrer que F est indépendant de s_j. Pour cela, on désintègre la mesure sur $\mathcal{X}(M)$ par l'application $(s_1, ..., s_{j-1})$, et on suppose que F est presque partout constant sur chaque ligne de niveau de s_k pour $1 \leq k < j$. Les cas particuliers du théorème II dans le cas du tore à un trou et de la sphère à quatre trous impliquent que Γ_S est ergodique sur presque toute ligne de niveau de l'application $(s_1, ..., s_{j-1}, s_{j+1}, ..., s_N)$. Par hypothèse d'induction, F est donc presque partout constante sur presque toute ligne de niveau de $(s_{j+1}, ..., s_N)$. C'est à dire exactement que F ne depend que de $s_{j+1}, ..., s_N$. Donc on peut continuer par induction jusqu'à $j = N'$, et on obtient donc le resultat

Lemme II.F.1 : *Soit $f : \mathcal{X}(M) \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable Γ_M-invariante. Alors il existe une fonction $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f([\rho]) = F(s_{N'+1}, ..., s_N)$$

On peut maintenant en deduire le théorème II en distinguant le cas où $m = 0$ du cas $m \neq 0$. Dans le cas $m \neq 0$, pour une composante de bord fixée $\mathcal{C}$, on se place sur la variété caractère relative $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M)$, et on voit donc que f est constante sur $\mathcal{X}_{\mathcal{C}}(M)$ puisqu'elle ne depend que des traces des composantes de bord qui sont fixées. Dans le cas $m = 0$, c'est encore plus simple puisque F est alors une fonction constante, donc f également. Ce qui termine la preuve du théorème II.

Références

1. Alekseev A., Malkin A.Z. *Symplectic structure of the moduli space of flat connection on a Riemann surface*, Comm. Math. Phys. **169**, 99-119 (1995)
2. Arnold *Mathematical methods methods of classical mechanics*
3. Atiyah M., Bott R. *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces* Publi. Trans. Roy. Soc. London A **308**, 523-615 (1982)
4. Audin M. *Lectures on gauge theory and integrable systems*
5. Audin M. *The topology of torus actions on symplectic manifolds*, Progr. Math. **93**, Birkuser, Basel, (1991)
6. Brown R. J. *Anosov mapping class actions on the SU(2)-representation variety of a punctured torus*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **18**, 539-554 (1998)
7. Furstenberg H. *REcurence in Ergodic Theory and combinatorial number Theory*, Princeton University Press, (1981)
8. Goldman W. *Topological components of spaces of representations*, Iventiones Mathematicae **93**, 577-607,(1988)
9. Goldman W. *The symplectic nature of fundamental groups of surfaces*, Adv. Math. **54**, 200-225, (1984)
10. Goldman W. *Ergodic Theory on moduli spaces* , Ann. of Math. **146**, 475-507 (1997)
11. Horowitz R.D. *Characters of free groups represented in the two-dimensional special linear group*, Comm. Pure and Appl. Math. , **25**, 635-649 (1972)
12. Jeffrey L. et Weitsman J. *Torus actions, moment maps, and the symplectic structure geometry of flat connections on a two-manifold*, Contempory Math., **175**, 149-159 (1994)
13. Libermann P., Marle C.M. *Symplectic geometry and analytic mechanics*, Math. Appl. **35**, Reidel, Boston, (1987)
14. Magnus W. *The use of 2 by 2 matrices in combinatorial group theory. A survey* Result. Math. **4**, 171-192 (1981)
15. Previte J., Xia E. *Topological dynamics on moduli spaces I and II*, Pacific Journal of mathematics (1999)
16. Ratcliffe J. *Foundations of hyperbolic manifolds* , Graduate Texts in Mathematics **149**, Springer-Verlag (1994)