

Mathématiques Générales 1

DEVOIR SURVEILLÉ N° 4

Exercice 1 Majorants, bornes sup, ... (2 points)

Soit X une partie non vide majorée de \mathbb{R} . Montrez que, pour tout $x \in X$,

$$\sup X = \sup(X \cap [x, +\infty[).$$

Exercice 2 Polynômes (5 points)

1. Décomposer en facteurs irréductibles sur \mathbb{R} et sur \mathbb{C} le polynôme $X^4 - 3X^3 + 7X^2 - 5X$
2. Même question pour le polynôme $X^6 + 64$.
3. Effectuer la division euclidienne de $X^6 + 64$ par $X^2 + 4$. En déduire les racines du polynôme $X^4 - 4X^2 + 16$.

Exercice 3 Suites (3 points)

1. Donner la définition avec les quantificateurs de la proposition : la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$.
2. Démontrer que si une suite $(u_n)_n$ est minorée par une suite $(v_n)_n$ qui tend vers $+\infty$, alors $(u_n)_n$ tend aussi vers $+\infty$
3. En déduire que la suite de terme général $w_n = (n+1)(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ tend vers $+\infty$.

Exercice 4 Suites (6 points)

On considère la suite définie par $u_0 = 3/2$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5 .
2. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.
3. Supposons que $(u_n)_n$ converge vers ℓ . Quelle équation vérifie ℓ ? Que vaut ℓ ?
On se propose de montrer que $(u_n)_n$ converge. On définit la suite $(v_n)_n$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - \ell.$$

4. Montrez que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = -\frac{1}{\ell u_n} v_n.$$

5. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leq \left(\frac{2}{3\ell}\right)^n |v_0|.$$

6. En déduire que $(v_n)_n$ converge vers 0. Conclure.

Exercice 5 Groupes (6 points)

1. Donner la définition d'un groupe.
2. Soit $(G, *)$ un groupe.
 - (a) Soient a, b, c trois éléments de G . Montrez que si $a * b = a * c$ alors $b = c$.
 - (b) Montrer que l'application $\varphi : G \rightarrow G$ définie par $\varphi(x) = a * x$ est une bijection. Est-ce un morphisme de groupe ?
3. On considère l'ensemble $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ muni de la multiplication, c'est à dire définie par la formule $\bar{x} \times \bar{y} = \overline{x \times y}$.
 - (a) Donner la table de multiplication de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$.
 - (b) Quel est l'élément neutre ?
 - (c) Quels sont les éléments inversibles de $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})$ pour la loi \times ?
 - (d) L'ensemble $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}) \setminus \{\bar{0}\}$ est-il un groupe ?
 - (e) L'ensemble des éléments inversibles est-il un groupe ?