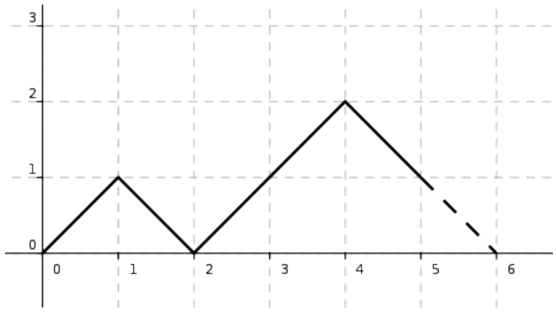
Devoir Maison
Problème de dépouillement.

Le problème ci-dessous se propose de répondre à la question suivante :
Dans une élection où le vainqueur a recueilli s voix de plus que le vaincu, sur un total de n suffrages exprimés, quelle est la probabilité pour que le vainqueur ait toujours été en tête (au sens strict, c'est-à-dire avec toujours plus d'une voix d'avance sauf au tout début) lors du dépouillement ? On supposera qu'il n'y qu'une seule urne et que les bulletins sont ouverts les uns après les autres.

1. On note p le nombre de voix obtenues par le vainqueur et q celui du vaincu. Exprimez p et q en fonction de n et s.

On associe à un dépouillement possible un chemin de la façon suivante : on part du point (0,0). Lorsqu'on dépouille un bulletin du vainqueur V, on avance d'un cran à droite, et on monte d'un cran. Quand on dépouille un bulletin du perdant P, on avance à droite, et on descend d'un cran. Si par exemple le début du dépouillement donne V-P-V-V-P, on a le chemin :



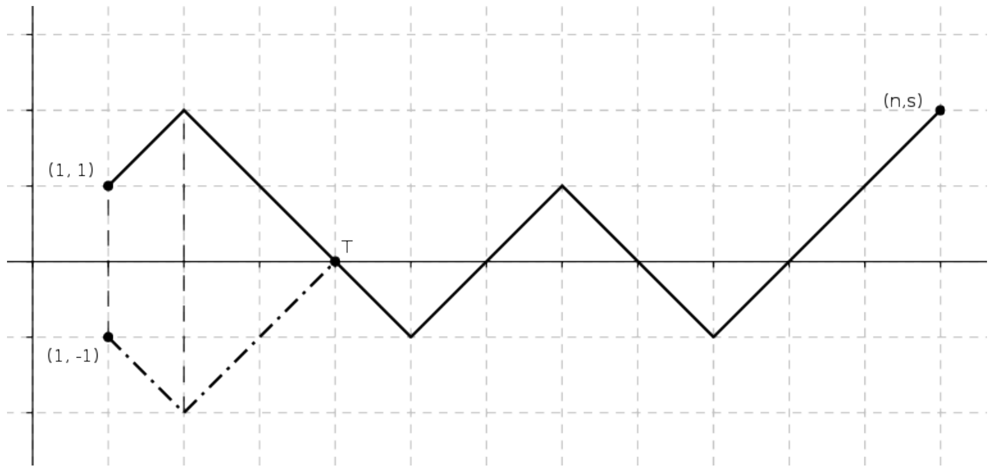
Si le point de coordonnées (x,y) est sur le chemin, x représente le nombre de bulletins dépouillés, et y la différence entre le nombre de voix obtenus par le vainqueur et le vaincu à cet instant du dépouillement. Le premier point du chemin est (0,0), le dernier le point (n,s).

2. Dessiner le chemin α où toutes les premières voix vont au vainqueur (et donc toutes les dernières au vaincu), puis le chemin β où toutes les premières voix vont au perdant (et donc...), ainsi que deux autres chemins au choix. Comment se situent tous les chemins par rapport aux deux chemins α et β ?

Notre problème est de comptabiliser le nombre de chemins allant de (0,0) à (n,s), et se situant, mis à part le point (0,0), strictement au-dessus de l'axe horizontal.

3. Quel est le second point (après l'origine) d'un tel chemin ?
4. Quel est le nombre de chemin totaux qui vont de $(1, 1)$ à (n, s), en coupant ou non l'axe des origines *(il faut donc $(p - 1)$ montées parmi...)* ?

Pour compter le nombre de chemins de $(1, 1)$ à (n, s) qui touchent ou traversent l'axe horizontal, on utilise le principe de réflexion suivant :
Lemme : Si $s > 0$, le nombre de chemins qui vont de $(1, 1)$ à (n, s) qui touchent ou traversent l'axe horizontal vaut le nombre total de chemins allant de $(1, -1)$ à (n, s).



5. Essayer d'expliquer pourquoi le lemme est vrai en vous aidant de la figure ci-dessus.
6. Calculer alors le nombre de chemins de $(1,1)$ à (n,s) touchant l'axe des abscisses.
7. Montrer que $C_{p+q-1}^{p-1} - C_{p+q-1}^{p} = \frac{p-q}{p+q} C_{p+q}^{p}$.
8. Calculer alors le nombre de chemins de $(1,1)$ à (n,s) ne touchant pas l'axe des abscisses. En déduire la probabilité recherchée.
9. Application numérique : Quelle est la probabilité que le gagnant ait toujours été en tête s'il a remporté l'élection avec 53% des suffrages.
10. * Pour $s = 0$, la formule précédente donne une probabilité nulle. C'est normal, car dans ce cas, il y a égalité à la fin. Pourtant on peut calculer le nombre de chemin de $(1,1)$ à $(n-1,1)$ ne touchant pas l'axe des abscisses. Combien vaut-il ? En déduire la probabilité que le vainqueur ait toujours été en tête (sauf au début et à la fin) dans ce cas.
11. * On cherche la probabilité que le vainqueur ait toujours été en tête, mais cette fois-ci au sens large (les égalités sont autorisées). Quelle est la droite que le chemin ne doit pas croiser cette fois-ci ? Et que vaut alors la nouvelle probabilité ?