

Mathématiques Générales I

PLANCHE 6

NOMBRES RÉELS. SUITES RÉELLES.

Nombres réels.

Exercice 1. Mettre sous forme irréductible p/q les rationnels suivants (les chiffres soulignés se répètent indéfiniment) :

$$0, \underline{111} \dots \quad 0, \underline{2323} \dots \quad 0, 142857\underline{142857} \dots \quad 0, \underline{999} \dots$$

Exercice 2. Montrez que, si $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Exercice 3. Dessiner l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

- $\max(|x|, |y|) \leq 1$.
- $|x| + |y| \leq 1$.
- $1 \leq ||x + y| - |x - y|| \leq 2$.

Exercice 4.

- Soient A, B deux parties non vides de \mathbb{R} , avec B majorée et $A \subset B$. Montrer que A est majorée et que $\sup(A) \leq \sup(B)$.
- Soient A et B deux parties non vides majorées de \mathbb{R} . Soit $A + B = \{x + y, (x, y) \in A \times B\}$. Que peut-on dire de $\sup(A \cup B)$? de $\sup(A + B)$?

Exercice 5. Soient E un ensemble et f, g deux applications de E dans \mathbb{R} telles que $f(E)$ et $g(E)$ soient des parties majorées de \mathbb{R} . On note $\sup f$ la borne supérieure de l'ensemble $f(E)$. Que peut-on dire de $\sup(f + g)$?

Exercice 6. Dire si les ensembles suivants admettent majorant, minorant, borne supérieure, borne inférieure plus grand élément ou plus petit élément.

- $[-1, 1[\cup \{2\}$
- $\{\frac{1}{x} | x \in \mathbb{R}_+^*\}$
- $\{1 - \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}_+^*\}$
- $([-2, 2[\cup \{3\}) \cap \{-1 + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} | k \in \mathbb{N}\}$
- $\{x^2 + y^2 | (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } xy \leq 1\}$
- $\{(-1)^n + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^*\}$
- $\{n + \frac{1}{p}; (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$

Suites réelles.

Exercice 7. Ecrire à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes :

- La suite $(u_n)_n$ est bornée à partir d'un certain rang.
- La suite $(u_n)_n$ ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.
- La suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Exercice 8. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Si oui, le démontrer, sinon donner un contre-exemple. Dans tout l'exercice $(u_n)_n$ désigne une suite réelle.

- Si $(u_n)_n$ est à termes positifs et converge vers zéro, alors $(u_n)_n$ est décroissante.
- Si une suite réelle est encadrée par deux suites convergentes alors elle est convergente.
- Si $(|u_n|)_n$ converge vers l , alors $(u_n)_n$ converge vers l ou vers $-l$.
- Si $\lim u_n = l$ avec $l > 0$ alors $(u_n)_n$ est positive à partir d'un certain rang.
- Le produit d'une suite qui converge vers 0 et d'une suite quelconque converge vers 0.
- La relation $(x_n)_n \mathcal{R}(y_n)_n \Leftrightarrow \lim(x_n - y_n) = 0$ est une relation d'équivalence.

Exercice 9. Déterminer si les suites suivantes sont croissantes ou décroissantes

- $u_n := 2n + \sin(n)$.
- $v_n := \frac{2^n}{n^2}$.
- $w_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
- $z_0 := 16, \quad z_{n+1} := \sqrt{z_n}$.
- $a_n := \sqrt{n} + (-1)^n$.

Exercice 10. Etudier la convergence des suites suivantes et déterminer les limites (si existentes!)

- $n \sin(1/n)$.
- $n^4(\cos(n) - 2)$.
- $2 \cos(n) + 3(-1)^n - 3n$.
- $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.
- $\frac{3n+5(-1)^n}{2n}$.
- $\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}; n \geq 1$.
- $\frac{\sqrt{(1-n)^2+1}}{1-n}, n \geq 2$.
- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}; n \geq 1$.

Exercice 11. (Suite géométrique)

Déterminer la convergence ou la divergence de la suite

$$u_n := a^n, \quad a \in \mathbb{R},$$

en fonction de la valeur de a .

Exercice 12. Soit $(u_n)_n$ la suite, définie par

$$u_0 := 5, \quad u_{n+1} := 2u_n - 3.$$

Exprimer u_n en fonction de n .

Exercice 13. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par:

$$\forall x > 0, f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

Soit $u_0 \geq \sqrt{2}$. On définit la suite (u_n) :

$$\forall n \geq 0, u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Étudier la fonction f . Vérifier en particulier: $\forall x \geq \sqrt{2}, f(x) \geq \sqrt{2}$.
2. Montrer par récurrence que: $\forall n \geq 0, u_n \geq \sqrt{2}$.
3. Montrer par récurrence que $(u_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante.
4. Conclure que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.
5. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 14. Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1 \text{ et } 0 \leq v_n \leq 1, \\ \text{et} \\ \lim u_n v_n = 1. \end{array} \right.$$

Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes et que $\lim u_n = \lim v_n = 1$.

Exercice 15. Soient $(u_n)_n = (\sqrt{n})_n$ et $(v_n)_n = (\ln n)_n$. Montrer que u et v tendent vers $+\infty$ et que $\lim(u_{n+1} - u_n) = \lim(v_{n+1} - v_n) = 0$.

En conclure que $\lim(a_{n+1} - a_n) = 0$ n'est pas une condition suffisante pour que $(a_n)_n$ soit convergente.

Exercice 16. Soit $(u_n)_n$ une suite convergente à valeurs dans \mathbb{Z} . Montrer que $(u_n)_n$ est stationnaire à partir d'un certain rang.

Exercice 17. Soit A un partie non vide majorée de \mathbb{R} . Montrer l'équivalence

$$m = \sup A \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \text{ est un majorant de } A \\ \text{et} \\ \text{il existe une suite d'élément de } A \text{ qui converge vers } m. \end{array} \right.$$

Exercice 18. On considère la suite $(u_n)_n$, définie pour $n \geq 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

a. Montrer que $(u_n)_n$ est croissante.

b. Montrer qu'il existe c un nombre réel strictement positif que l'on précisera tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2n} - u_n \geq c.$$

c. En déduire que $(u_n)_n$ converge vers $+\infty$.

Exercice 19. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$ et $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites définies par:

$$a_0 = a, b_0 = b, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

a. Démontrer que $(a_n)_n$ est bien définie et croissante.

b. Prouver que $(b_n)_n$ est décroissante.

c. Démontrer que $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont convergentes et que $\lim(a_n) = \lim(b_n)$. (*Cette limite commune est appelé moyenne arithmético-géométrique des nombres a et b .*)

Exercice 20. Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Montrer les résultats suivants :

- Si $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite, alors $(u_n)_n$ converge vers la limite commune.
- Si $(u_{2n})_n$, $(u_{2n+1})_n$ et $(u_{3n})_n$ convergent vers l , l' , l'' , alors $l = l' = l''$ et $(u_n)_n$ converge.

Exercice 21. Soit $(v_n)_n$ une suite strictement positive, croissante, qui converge vers $+\infty$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{v_k} = \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} - \dots + \frac{(-1)^n}{v_n}.$$

- Montrer que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
- Conclure la convergence de la suite $(u_n)_n$.

Exercice 22. On considère les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies par

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}.$$

Montrer qu'elles sont adjacentes. En déduire que la suite $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!})_n$ converge.

Exercice 23. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.

- Justifier que $(u_n)_n$ est bien définie.
- Montrer que $(u_n)_n$ ne peut converger que vers un seul nombre l que l'on déterminera.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq l$.
- Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{P(u_n)}{\sqrt{1+u_n+u_n}}$, où P est un polynôme du second degré que l'on déterminera et dont on étudiera le signe. En déduire que la suite $(u_n)_n$ est croissante.
- Prouver que $(u_n)_n$ est convergente et donner sa limite.

Exercice 24. Soit x un réel. On définit $E(x)$ par:

$$E(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \leq x\}$$

- Calculer $E(3)$, $E(1,5)$, $E(-1/10)$, $E(e)$.
- Tracer le graphe de la fonction E .
- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nE\left(\frac{1}{n}\right)$.
- Démontrer que $E(x) \leq x < E(x) + 1$.
- En déduire un encadrement de $E(x)$ en fonction de x .
- Soit $x \in \mathbb{R}$; calculer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E(x) + E(2x) + E(3x) \cdots + E(nx)}{n^2}.$$

- Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la suite $(E(u_n))_n$ converge.

Plus difficile

Exercice 25. Soit $x \in \mathbb{R}$. On note $E(x)$ la partie entière de x . Montrez que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E(x+1) = E(x) + 1$, que $x \in \mathbb{R} \mapsto E(x) \in \mathbb{R}$ est croissante, et que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $E(x+y) \geq E(x) + E(y)$. Montrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $|\frac{E(nx)}{n} - x| \leq \frac{1}{n}$.

Exercice 26. Soient a, b deux réels tels que $a < b$, et soient, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$. Soit $\ell = b - a$. Montrez qu'il existe i, j dans $\{1, \dots, n\}$ tels que $i \neq j$ et tels que $|x_i - x_j| < \frac{\ell}{n-1}$.

Exercice 27. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant $\{kx - E(kx), k \in \{0, 1, \dots, n\}\}$, montrez qu'il existe un entier relatif p et un entier naturel q compris entre 1 et n tels que $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{nq}$.

Exercice 28. Soit (x_n) une suite bornée de réels. On pose :
$$\begin{cases} y_n = \sup\{x_p, p \geq n\} \\ z_n = \inf\{x_p, p \geq n\}. \end{cases}$$

a) Montrer que les suites (y_n) et (z_n) convergent.

b) Montrer que (x_n) converge si et seulement si (y_n) et (z_n) ont même limite.

Exercice 29. a) Soit $(u_n)_n$ une suite qui converge vers un nombre réels l . Montrer que la suite $\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ converge vers l .

b) Donner un exemple de suite $(u_n)_n$ tel que $(u_n)_n$ diverge et $\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ converge.

c) Soit $(u_n)_n$ une suite telle que $(u_{n+1} - u_n)_n$ converge vers l . Montrer que $(\frac{u_n}{n})_n$ converge vers l .

Exercice 30.

Etant donné α un nombre réel, on considère les deux suites $(u_n)_n = (\sin n\alpha)_n$ et

$(v_n)_n = (\cos n\alpha)_n$.

a) Expliciter ces suites si $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$.

b) On suppose dans cette question que $(u_n)_n$ converge vers un nombre réel l non nul. En utilisant la suite $(u_{n+1})_n$, démontrer que $(v_n)_n$ converge et, à l'aide de $(u_{2n})_n$, que sa limite est $\frac{1}{2}$. En utilisant la suite $(v_{2n})_n$, conclure que cela est impossible.

c) On suppose dans cette question que $(u_n)_n$ converge vers 0. Montrer que $(v_n)_n$ converge vers 0. Justifier que cela encore est impossible.

d) Conclure quant à la convergence de $(u_n)_n$. Puis à celle de $(v_n)_n$.