Exercices de géométrie différentielle

L3 2015-2016

N. Bédaride

1 Rappels utiles

Exercice 1. Donner une équation paramétrique du plan passant par les points

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. Pour les vecteurs suivants, calculer le produit vectoriel $\langle u, v \rangle$ et le produit scalaire $u \wedge v$. Calculer ensuite la projection orthogonale sur la droite $\mathbb{R}u$ du vecteur v .

1.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2.

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère les trois vecteurs suivants. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^3$, et trouver la base orthonormée de même orientation obtenue via Gram Schmidt.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4. Soient u, v, w trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^3$. Montrer les formules suivantes

$$\|u \wedge v\|^2 = \|u\|^2 \times \|v\|^2 - \langle u, v \rangle^2.$$

$$\det(u, v, w) = \langle u \wedge v, w \rangle.$$

Exercice 5. La fonction suivante est elle différentiable ?

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } xy \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 6. Calculer le domaine de définition, les dérivées partielles du premier et deuxième ordre et la différentielle des fonctions suivantes

1. $f(x, y, z) = (x^2y + \ln \frac{y}{z}, \sqrt{x^2 - y^2})$.
2. $f(x, y) = (x + y + \sin x, y + \sin x)$. Montrer que c'est un difféomorphisme.
3. $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}} + e^{x+2y}$.

Exercice 7.

1. Montrer qu'il existe une fonction f et un voisinage de 0 sur lequel $y = f(x)$ si on a $e^x + e^y + x + y = 2$.
2. Donner le développement limité de f à l'ordre 2.

Exercice 8. Soit $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$.

1. Trouver $m_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(m_0) = 0$.
2. Montrer qu'il existe un intervalle contenant x_0 et une application φ_0 définie sur cet intervalle tels que

$$\varphi_0(x_0) = (y_0, z_0), f(x, \varphi_0(x)) = 0.$$

Exercice 9. On considère la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \left(\frac{t}{1+t^4}, \cos t\right) \end{aligned}$$

1. En quel point cette fonction est elle une immersion ?
2. Calculer la tangente en un tel point.
3. Écrire le développement de Taylor à l'ordre 3 au voisinage de $t = 0$.

2 Courbes paramétrées planes

Exercice 10. Donner une représentation paramétrique

1. d'une droite,
2. d'une ellipse,
3. d'un cercle au moyen de fractions rationnelles.
4. d'une branche d'hyperbole.

Exercice 11. Calculer la longueur des courbes suivantes

1. Le cercle de centre m et de rayon R .
2. La branche de parabole $\{(x, 2x^2) | x \in [0, 1]\}$.
3. L'arc de la courbe $\{(t \cos t, t \sin t) | t \in [0, 2\pi]\}$

Exercice 12. Étudier la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto ((1-t^2)e^t, 2(1-t)e^t) \end{aligned}$$

Exercice 13. Étudier la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t) \end{aligned}$$

Exercice 14. Étudier la courbe paramétrée

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (\sin 2t, \cos t) \end{aligned}$$

Exercice 15. Étudier la courbe en polaire

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto \rho = \sin(2\theta/3) \end{aligned}$$

Exercice 16. Étudier la courbe en polaire

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto \rho = \frac{1}{\cos \theta + \cos 4\theta} \end{aligned}$$

Exercice 17. Donner la courbure des courbes suivantes :

1. Une droite.
2. Un cercle.
3. Au sommet d'une ellipse.
4. Au sommet d'une parabole.
5. Pour $x^2 - y^3 = 3$.

Exercice 18. Donner les rayons de courbure et le repère de Frenet des courbes des exercices précédents.

3 Courbes paramétrées gauches

Exercice 19. Donner la courbure et la torsion des courbes suivantes :

1. $(a \cos t, a \sin t, t)$ avec $a > 0$.
2. $(t, \frac{t^2}{2}, \frac{t^3}{6})$.
3. $(\sin t \cos t, \cos^2 t, \sin t)$.

Exercice 20. Donner le repère de Frenet et la courbure pour

$$\left(\frac{\cos t}{\operatorname{sht}}, \frac{\sin t}{\operatorname{sht}}, \frac{cht}{\operatorname{sht}} \right).$$

Montrer que le plan osculateur en un point est tangent à une sphère fixe.

Exercice 21. On considère la sphère paramétrée par

$$(\theta, \varphi) \mapsto (\cos \theta \sin \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \varphi)$$

On définit alors une courbe paramétrée sur la sphère donnée par la formule où $\alpha \in [0, \pi]$ est fixe

$$\varphi(\theta) = 2 \arctan(e^{-\theta \tan \alpha}).$$

Calculer le repère de Fenet. Que remarque t on ?

4 Surfaces

Exercice 22. Déterminer l'équation du plan tangent des surfaces paramétrées suivantes. Calculer ensuite les courbures.

1. $(u + v, u^2v, v^3)$.
2. $(u, v, (u^2 + v^2)^u)$.
3. $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Exercice 23. Calculer la première et la seconde forme fondamentale pour les surfaces suivantes

1. $(x, y, 2\sqrt{1 - x^2 - y^2})$.
2. $(u \cos v, u \sin v, 2v)$.
3. $\begin{pmatrix} (1 + \cos u) \cos v \\ (1 + \cos u) \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$ avec $u, v \in [0, 2\pi]$.

Exercice 24. On considère la surface donnée par

$$t \in [-1, 1], v \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{pmatrix} (1 + t/2 \cos v/2) \cos v \\ (1 + t/2 \cos v/2) \sin v \\ \frac{t}{2} \sin v/2 \end{pmatrix}$$

Calculer les formes fondamentales. La surface est-elle orientable ?

Exercice 25. Surfaces de révolution. Soit c un arc tracé dans le plan $y = 0, x > 0$. La surface de révolution de méridienne c est la surface balayée par c en tournant autour de l'axe Oz .

1. Montrer que c'est donc une réunion de cercles d'axe Oz passant par un point de c .
2. Calculer les formes fondamentales de la surface.

Exercice 26. Une surface réglée est donnée par $(s, t) \mapsto \gamma(s) + t\vec{v}(s)$ ou γ est une courbe paramétrée définie sur un intervalle I et $s \mapsto \vec{v}(s)$ est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

1. Montrer qu'un plan est une surface réglée.
2. Montrer qu'une hélice est réglée.
3. Montrer qu'une sphère ne l'est pas.

Exercice 27. Calculer la courbure et la torsion de la courbe $t \mapsto (u = te^t, v = \sin t)$ tracée sur la surface $(u, v) \mapsto (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$.

Exercice 28. Calculer la courbure et la torsion de la courbe

$$t \mapsto \begin{pmatrix} (1 + \cos t) \cos(2t) \\ (1 + \cos t) \sin(2t) \\ \sin t \end{pmatrix}$$

Que représente cette courbe ?

Exercice 29. Calculer l'aire de la surface suivante : $\begin{pmatrix} (1 + \cos u) \cos v \\ (1 + \cos u) \sin v \\ \sin u \end{pmatrix}$ avec $u, v \in [0, 2\pi]$.

Exercice 30. Soit γ une courbe paramétrée sans point d'inflexion, telle que la courbure ne s'annule pas. Montrer que la courbe est contenue dans une sphère si et seulement si on a

$$\frac{R}{T} + \frac{d}{ds} \left(T \frac{dR}{ds} \right) = 0.$$

Exercice 31. Étudier la position locale de la surface $z = f(x, y)$ au voisinage du point m dans les cas suivants

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, $m = (0, 0)$.
2. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy - 3y$, $m = (1, 2)$.
3. $f(x, y) = x^3 + y^3$ avec $m = (1, 0)$.

Exercice 32. Tracer les surfaces suivantes de $\mathbb{R}^3$ données par les équations

1. $z^2 = x^2 + y^2$
2. $z = xy$
3. $z = x^2 - y^2$

Exercice 33. Calculer les longueurs des courbes suivantes $f \circ \gamma$ définies sur l'intervalle I et tracées sur la surface paramétrée par f :

1. $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $I = [0, 2\pi]$, $f(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$
2. $\gamma(t) = (t, t^2)$, $I = [0, 1]$, $f(x, y) = (x^2, y, xy)$
3. $f \circ \gamma$ est un parallèle tracée sur la sphère.
4. $f \circ \gamma$ est un méridien tracée sur la sphère.

Exercice 34. Montrer que le support de la surface donnée par

$$x^2 + xy - xz + y^2 + z^2 + x + 3y - z + 3 = 0$$

est une union de droites.

Exercice 35. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée avec U connexe. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. les courbures principales sont nulles en tout point $u \in U$,
2. l'endomorphisme de Weingarten est nul en tout point $u \in U$,
3. la deuxième forme fondamentale h est nulle en tout point $u \in U$,
4. l'application de Gauss $n : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ (qui associe à un point $u \in U$ le vecteur normal standard $n(u)$) est constante,
5. L'image de f est contenue dans un plan affine $\pi \subset \mathbb{R}^3$ (f est une paramétrisation locale d'un plan).

5 Variété

Exercice 36.

1. Montrer que $\{(x, y), y = |x|\}$ n'est pas une sous variété de $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que $\{(x, y, z, t), x^2 + y^2 = z^2 + t^2 = 1\}$ est pas une sous variété de $\mathbb{R}^4$. A quoi est elle homéomorphe ?
3. Montrer que le graphe d'une application C^∞ de $\mathbb{R}$ dans lui même est une sous variété.

Exercice 37. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t^2, t^3) \end{array}$ est elle une immersion ?

Exercice 38. Montrer que l'ensemble $X = \{(x, y) | xy = 0\}$ n'est pas une sous variété. Montrer alors que $X \setminus \{(0, 0)\}$ est une variété.

Exercice 39. On considère l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}xz) \end{array}$$

1. Montrer que c'est une immersion de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dans $\mathbb{R}^6$.
2. Montrer que c'est aussi une immersion de S^2 dans $\mathbb{R}^6$.
3. Décrire l'image de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ par cette application.

6 Plus loin

Exercice 40. On considère la surface

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = (x, y, 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}).$$

1. Donner les coefficients de Christoffel.
2. Vérifier les formules reliant les coefficients de Christoffel et les coefficients des formes fondamentales.

Exercice 41.

1. Donner les coefficients de Christoffel de la sphère de rayon R .
2. Donner le tenseur de courbure au point $(1, 0, 0)$.

Exercice 42. Calculer la caractéristique d'Euler

1. de la sphère
2. du tore.

Vérifier alors le théorème de Gauss Bonnet.

Exercice 43. Sur la sphère on appelle grand cercle tout cercle centré en l'origine.

1. Montrer qu'un grand cercle est une géodésique de la sphère.
2. Montrer qu'un parallèle n'est pas un grand cercle.