Aix–Marseille Université 2012-2013

Mathématiques – L1 – ENSMI2U2

PLANCHE D'EXERCICES – ALGÈBRE LINÉAIRE 1

1 Systèmes Linéaires

Exercice 1 * Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants. Vérifier votre solution.

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y=1 \\ 2x+3y=1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r} 4x+3y=2 \\ 7x+5y=3 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r} 2x+4y=3 \\ 3x+6y=2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{r} 2x+3y=0 \\ 4x+5y=0 \end{array}\right.$$

Exercice 2 * Déterminer les solutions des systèmes suivants. Représenter graphiquement les solutions, comme intersections de droites dans le plan xy.

$$\left\{\begin{array}{c} x-2y=2 \\ 3x+5y=17 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x-2y=3 \\ 2x-4y=6 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x-2y=3 \\ 2x-4y=8 \end{array}\right.$$

Exercice 3 Déterminer les solutions des systèmes suivants. Décriver votre solution en termes d'intersections de plans. Il n'est pas nécessaire de faire un dessin.

$$\left\{\begin{array}{c} x+4y+z=0 \\ 4x+13y+7z=0 \\ 7x+22y+13z=1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+y-z=0 \\ 4x-y+5z=0 \\ 6x+y+4z=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+4y+z=0 \\ 4x+13y+7z=0 \\ 7x+22y+13z=0 \end{array}\right.$$

Exercice 4 * Résoudre par la méthode de Gauss les systèmes suivants :

$$\left\{\begin{array}{c} x+2y+3z=1 \\ x+3y+4z=3 \\ x+4y+5z=4 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} x+2y+3z=1 \\ 3x+2y+z=1 \\ 7x+2y-3z=1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{c} 2x+3y-z=1 \\ -x+4y+2z=2 \\ 7x-6y-8z=-4 \end{array}\right.$$

Exercice 5 * Ayant à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} \left\{\begin{array}{c} 2x+7y+z=1 \\ 2x+3y-5z=4 \\ -4x+3y+z=5 \end{array}\right.$$

un étudiant démarre ainsi :

$$\begin{array}{cccccc} \text{j'élimine} & x & \text{en} & \text{retranchant} & e_2 \text{ de } e_1 : & 4y+6z=-3 \\ \text{''} & y & \text{''} & \text{''} & e_3 \text{ de } e_2 : & 6x-6z=-1 \\ \text{''} & z & \text{''} & \text{''} & e_1 \text{ de } e_3 : & -6x-4y=4 \end{array}$$

Le système ainsi obtenu est-il équivalent au système initial ? Résoudre le système par la méthode de Gauss.

Exercice 6 * Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2x}{dt^2}-\frac{dx}{dt}-x=\cos(t).$$

Cette équation peut décrire un oscillateur forcé amorti comme vous l'avez vu en mécanique. Ce type d'équation admet une solution de la forme

$$x(t) = a\sin(t) + b\cos(t).$$

Trouver a et b et esquisser le graphe de la solution.

Exercice 7 Lors de votre dernier voyage en Suisse vous avez pris le bateau pour faire un aller-retour entre Rheinfall et Rheinau. L'aller a pris 20 minutes et le retour 40 minutes. La distance entre Rheinfall et Rheinau est de 8 kilomètres. À quelle vitesse navigue le bateau (par rapport à l'eau) et à quelle vitesse s'écoule la rivière ? Nous supposerons que ces deux vitesses sont constantes durant le temps du trajet.

Exercice 8 * L'économiste américain Wassily Leontief (1905-1999), prix Nobel d'économie en 1973, s'est intéressé au problème suivant : quelle doit être la production de chaque secteur d'une économie de sorte que la demande totale soit satisfaite ? Nous considérons ici un exemple très simple d'une économie avec deux secteurs A et B. Supposons que la demande des consommateurs pour ces produits soit respectivement de 1000 et 780 millions d'euros par année. Quelle production a et b (en millions d'euros par an) doivent fournir les deux secteurs pour satisfaire la demande ? Vous pouvez être tentés de dire 1000 et 780 respectivement, mais les choses ne sont pas aussi simples que cela. Nous devons aussi prendre en compte la demande d'un secteur à l'autre. Supposons que le secteur A produise de l'électricité. Bien sûr la production d'à peu près n'importe quel bien requiert de l'électricité. Supposons que le secteur B nécessite 10 centimes d'euros d'électricité par euro que B produit, et que l'industrie A a besoin de 20 centimes d'euros de biens de B par euros de production. Déterminez les productions a et b qui permettent de satisfaire à la fois la demande des consommateur et la demande interindustrielle.

Exercice 9 Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x + y - z = -12 \\ 3x - 5y + 13z = 18 \\ x - 2y + 5z = k \end{cases},$$

où k est un nombre arbitraire.
Pour quelles valeurs de k le système a-t-il au moins une solution ? Pour chacune de ces valeurs de k, déterminer le nombre de solutions du système. Déterminer toutes les solutions pour chaque valeur de k.

Exercice 10 * Trouver les polynômes de degré 2 (i.e. un polynôme de la forme $f(t) = at^2 + bt + c$) dont le graphe passe par les points (1,-1), (2,3) et (3,13). Dessiner les graphes de ces polynômes.

Exercice 11 Trouver un polynôme de degré inférieur ou égal à deux dont le graphe passe par les points $(1, p)$, $(2, q)$, $(3, r)$ où p, q et r sont des nombres arbitraires. Existe-t-il toujours un tel polynôme pour n'importe quelles valeurs de p, q, r ?

Exercice 12 Un magasin vend deux types d'articles. Lorsque leurs prix unitaires sont de P_1€ et P_2€, les quantités demandées pour chaque produit, D_1 et D_2, et les quantités disponibles de chaque produit (l'offre), S_1 et S_2, sont reliées par les équations

$$D_1 = 70 - 2P_1 + P_2$$

$$D_2 = 105 + P_1 - P_2$$

$$S_1 = -14 + 3P_1$$

$$S_2 = -7 + 2P_2.$$

Les deux articles sont-ils en compétition (comme le sont une Volvo et une BMW) ou sont-ils complémentaires (tels une chemise et une cravate) ?
Trouver les prix d'équilibre de chaque produit, c'est-à-dire ceux pour lesquels l'offre et la demande sont égales.

Exercice 13 * Trouver un système d'équations linéaires en x, y et z dont les solutions sont

$$x = 6 + 5t,\ y = 4 + 3t,\ z = 2 + t,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

Exercice 14 * On considère le système linéaire à 3 inconnues x, y, z suivant :

$$\begin{cases} x + uy + vz = b_1 \\ ux + y + z = b_2 \end{cases}$$

où u, v, b_1 et b_2 sont des paramètres. **Sans résoudre le système**, répondre aux questions suivantes :

a) Pour quelles valeurs des paramètres pourra-t-on exprimer

   i) x et y comme fonctions de z ?

   ii) y et z comme fonctions de x ?

   iii) z et x comme fonctions de y ?

   (Raisonner sur le système à deux inconnues obtenu en "faisant passer l'une des inconnues au second membre")

b) Comment faut-il choisir les paramètres pour que l'ensemble des solutions du système ne soit pas une droite ?

c) Dans ce dernier cas, comment faut-il choisir les paramètres pour que le système ait des solutions ? Que pouvez-vous dire alors de ses solutions ?

Exercice 15 * Soient a, α et β des réels. On considère le système suivant :

$$\begin{cases} ax + y = \alpha \\ x + ay = \beta \end{cases}$$

Donner les valeurs de a, α et β pour lesquelles le système admet :

1. une solution unique,
2. une infinité de solutions,
3. pas de solution.

Exercice 16 Résoudre le système linéaire qui suit (selon la valeur de a) :

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + y + az = 2 \\ x + ay + z = 3 \end{cases}$$

2 Matrices, vecteurs

Exercice 17 * Calculer à la main, lorsqu'ils sont définis, les produits de matrices indiqués. Donnez ensuite les transposées des produits.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & 1 \\ g & h & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 18 Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

Des 25 produits AA, AB, AC, ..., ED, EE, déterminez et calculez ceux qui sont définis.

Exercice 19 * Soient A et B des matrices $n \times n$. Parmi les formules suivantes, lesquelles sont vraies indépendamment du choix de A et B ?

i) $(I_n - A)(I_n + A) = I_n - A^2$.

ii) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

iii) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$.

Supposons de plus que A et B sont inversibles. Même question pour les relations suivantes :

iv) A^2 est inversible et $(A^2)^{-1} = (A^{-1})^2$.

v) $A + B$ est inversible et $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

vi) $ABB^{-1}A^{-1} = I_n$.

vii) $ABA^{-1} = B$.

viii) $(ABA^{-1})^3 = AB^3A^{-1}$.

ix) $(I_n + A)(I_n + A^{-1}) = 2I_n + A + A^{-1}$.

x) $A^{-1}B$ est inversible et $(A^{-1}B)^{-1} = B^{-1}A$.

Exercice 20 Déterminer une matrice 2×2, A, non nulle telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 21 Déterminer une matrice 2×2, B, non nulle, telle que $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 22 Étant donnée la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, déterminer une matrice A telle que $BA = I_2$. Combien de solutions A ce problème a-t-il ?

Exercice 23 * [Un modèle de prédation à deux niveaux] Dans la chaine alimentaire, sur une période, le lion consomme 4 gazelles, 5 gnous et 2 antilopes. Le guépard, plus agile, consomme 7 gazelles et 1 antilope. Pour ne pas se laisser abattre, les gazelles, gnous et antilopes consomment quelques végétaux : arbres, pelouses, herbes hautes et racines. Une gazelle consomme $100g$ de feuilles d'arbres, $300g$ de pelouse, $150g$ d'herbes hautes et $50g$ de racines. Un gnou consomme $500g$ de feuilles d'arbres, $100g$ de pelouse, $750g$ d'herbes hautes et pas de racines. Une antilope consomme $200g$ de feuilles d'arbres, $400g$ de pelouse, $250g$ d'herbes hautes et $150g$ de racines. Malheureusement la pollution a affecté les arbres et la pelouse. La concentration de pesticide est de $c_1 = 30$ par gramme de feuille d'arbre et de $c_2 = 50$ par gramme de pelouse. Bien heureusement les racines et les herbes hautes sont préservées. Calculer la masse totale de pesticide ingérée par le lion et le guépard en effectuant le produit de trois matrices que l'on explicitera.

Exercice 24 Soient A et B des matrices $n \times n$ dont les coefficients sont des nombres réels positifs ou nuls. On suppose que les coefficients de A sont inférieurs ou égaux à un nombre réel s, et que la somme des coefficients de chaque colonne de B est inférieure ou égale à un nombre réel r. Montrer que tous les coefficients de la matrice AB sont inférieurs ou égaux à sr.

Exercice 25 * Résoudre les systÃmes linéaires suivants en utilisant l'échelonnement :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 6x + y = 1/2 \end{cases}$$

Exercice 26 * Échelonner les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 27 * Résoudre en utilisant l'échelonnement les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5x + 4y + 3z = 2 \\ 6x + 3y + 2z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y - 2z = 1 \\ -x + 3y = 0 \\ -2y + z = -3 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x & +2y & -2z & +4t & = 2 \\ & y & +3z & -4t & = -2 \\ & & z & -2t & = 0 \\ x & +y & -z & +2t & = 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rrrrrl} x & +2y & -2z & +4t & +u & = 0 \\ & y & +3z & -4t & +2u & = 0 \\ x & & +z & -2t & +3u & = 0 \\ x & +y & +4z & -6t & +5u & = 0 \\ & 3y & & +2t & & = 0 \end{array}\right.$$

Exercice 28 * Échelonner les matrices suivantes et dire si elles sont inversibles ; le cas échéant calculer leurs inverses par échelonnement total :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

et encore...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

3 Applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$

Exercice 29 * Considérons l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de T.

Exercice 30 * Considérons l'application T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Cette transformation est-elle linéaire ? Si oui, donner sa matrice.

Exercice 31 Soient u_1,..., u_n des vecteurs arbitraires de $\mathbb{R}^p$. Considérons l'application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ donnée par

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n.$$

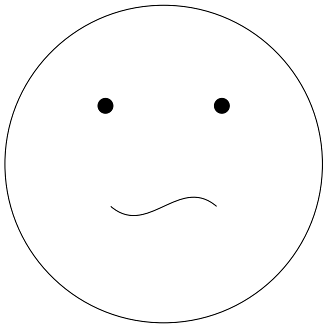
Cette transformation est-elle linéaire ? Si oui, donner sa matrice en fonction des coefficients des vecteurs u_1,...., u_n.

Exercice 32 Donner une interprétation géométrique des applications linéaires définies par les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Faites un dessin qui indique l'effet de chacune des applications linéaires précédentes sur le visage suivant.



Décider dans chacun des cas si l'application est inversible. Le cas échéant, trouver l'inverse et interpréter le géométriquement.

Exercice 33 Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Supposons que u et v soient des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ et que w soit un vecteur dont l'extrémité est située sur la droite passant par les extrémités de u et v. Est-ce que l'extrémité du vecteur $T(w)$ appartient à la droite passant par les extrémités de $T(u)$ et $T(v)$?
(Indication : Montrer que l'on peut écrire $w = \lambda u + \mu v$ avec $\lambda + \mu = 1$).
On peut résumer cela en disant que l'image d'une droite par une application linéaire est une droite.

Exercice 34 Dans le centre de Genève certains parcmètres acceptent les pièces de 2 et 5 francs.

i) Un officier chargé du stationnement récupère 51 pièces pour une valeur totale de 144 francs. Combien de pièces de chaque sorte y a-t-il ?

ii) Déterminer la matrice A qui transforme le vecteur

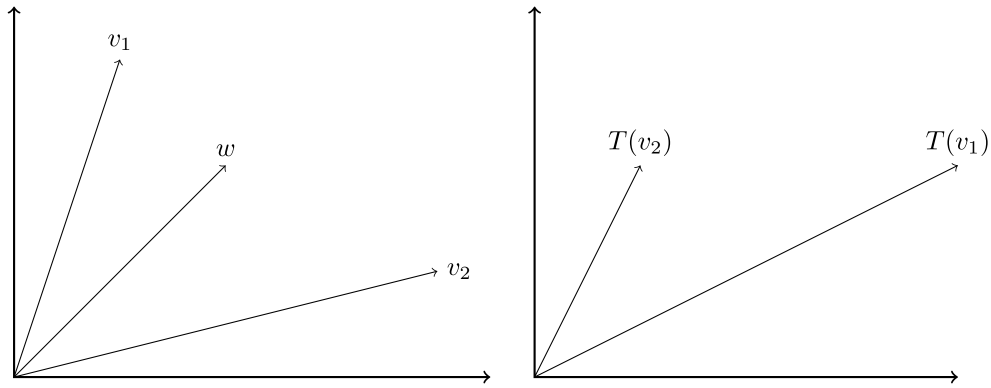
$$\begin{pmatrix} \text{nombre de pièces de 2 francs} \\ \text{nombre de pièces de 5 francs} \end{pmatrix}$$

en le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{valeur totale des pièces} \\ \text{nombre total de pièces} \end{pmatrix}.$$

iii) Est-ce que la matrice A précédente est inversible ? Si oui trouver son inverse. Utiliser le résultat obtenu pour justifier votre réponse en i).

Exercice 35 * Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On a représenté sur la figure ci-dessous trois vecteurs v_1, v_2, w de $\mathbb{R}^2$, ainsi que $T(v_1)$ et $T(v_2)$. Dessiner $T(w)$. Justifier votre réponse.



Exercice 36 * Trouver la matrice de la rotation dans $\mathbb{R}^2$ d'un angle de $\frac{\pi}{3}$ dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Exercice 37 Considérons une application linéaire T de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$. À l'aide de $T(e_1)$ et $T(e_2)$, où e_1 et e_2 sont respectivement les vecteurs de coordonnées $(1,0)$ et $(0,1)$, décrivez géométriquement l'image du carré unité, c'est-à-dire le carré formé des vecteurs dont les deux coordonnées sont comprises entre 0 et 1.

Exercice 38 Décrivez géométriquement les applications linéaires de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 39 Exprimer les matrices des applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ suivantes :

i) La projection orthogonale sur le plan xy.

ii) La réflexion par rapport au plan xz.

iii) La rotation autour de l'axe des z d'un angle de $\pi/2$, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre lorsqu'on l'observe depuis le demi-axe des z positifs.

iv) La rotation autour de l'axe des y d'un angle θ, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre lorsqu'on l'observe depuis le demi-axe des y positifs.

v) La réflexion par rapport au plan $y = z$.

Exercice 40 Considérons une matrice A de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, où $a^2 + b^2 = 1$. Trouver deux vecteurs u et v tels que $Au = u$ et $Av = -v$ (exprimer leurs coefficients en fonction de a et b). En déduire que l'application linéaire $x \longrightarrow Ax$ représente la reflexion par rapport à la droite de vecteur directeur u.

Exercice 41 Décrire toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^1)$. A quoi ressemblent leurs graphes ?

Exercice 42 Décrire toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ $(= \mathbb{R}^1)$. A quoi ressemblent leurs graphes ?

Exercice 43 Un joaillier utilisait pour ses bijoux un alliage de platine et un alliage d'argent ; les densités de ces alliages étaient exactement 20 et 10 grammes par cm^3 respectivement.
Le roi Héron de Syracuse commanda à ce joaillier une couronne d'une masse totale de 5 kg, en demandant que l'alliage de platine constitue au moins 90% de la masse totale. Le joaillier lui procura une très belle pièce, mais Archimède, l'ami du roi, doutait de sa pureté. Alors qu'il prenait son bain, il découvrit une méthode pour vérifier la composition de la couronne (c'est alors qu'il s'écria "Eurêka !" et se rua tout nu au palais du Roi). En plongeant la couronne dans l'eau il constata que son volume était de 370 cm^3. De quelle quantité (en masse) de chaque alliage était constituée la couronne ? Le joaillier était-il un escroc ?
Déterminer l'application qui, étant donné un bijou produit par ce joaillier, transforme le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{masse de l'alliage de platine} \\ \text{masse de l'alliage d'argent} \end{pmatrix}$$

en le vecteur

$$\begin{pmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{pmatrix}.$$

Montrer que cette aplication est linéaire et donner sa matrice.
Cette matrice est-elle inversible ? Si oui calculer son inverse. À l'aide de ce résultat vérifier votre première réponse.

Exercice 44 L'une des cinq matrices ci-dessous représente une projection orthogonale sur une droite et une autre une réflexion par rapport à cette même droite. Sachant cela, identifiez les en procédant par élimination (l'image d'une projection sur une droite est une droite ! Quel est un vecteur directeur de cette droite ici ?).

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4 Espaces vectoriels : sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$

Exercice 45 * Parmi les ensembles suivants lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

i) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \setminus x + y + z = 1 \right\}$.

ii) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \setminus x \leq y \leq z \right\}$.

iii) $\left\{ \begin{pmatrix} x + 2y + 3z \\ 4x + 5y + 6z \\ 7x + 8y + 9z \end{pmatrix} \setminus x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 46 Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Est-ce que $V \cap W$ est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$? Est-ce que $V \cup W$ est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 47 * Considérons u_1,..., $u_k \in \mathbb{R}^n$ avec $u_1 = 0$. Est-ce que ces vecteurs sont linéairement indépendants ?

Exercice 48 Est-ce que ces vecteurs sont linéairement indépendants ? Faites d'abord un dessin pour vous faire une idée.

i) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$.

ii) $\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 11 \\ 7 \end{pmatrix}$.

iii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

iv) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

v) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

vi) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

vii) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Exercice 49 Donner une description géométrique de tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ (raisonner selon la dimension de ceux-ci). Justifier votre réponse.

Exercice 50 $*$ Décrire géométriquement (droite, plan ou $\mathbb{R}^3$ tout entier) l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs suivants :

$(a) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad (b) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad (c) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 51 Soit $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{R}_n[X]$ sont des espaces vectoriels. Montrer que $\{1, X, X^2, ..., X^n\}$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En déduire que la famille

$$\{1, X-1, (X-1)^2, ..., (X-1)^n\}$$

forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que la famille $\{1, X, X^2, ..., X^n, ...\}$ forme une base de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 52 * Donner une matrice A dont l'image est engendrée par $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 53 Montrer que tout sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ peut être représenté comme l'image d'une application linéaire (Indication : choisir une famille génératrice de V et considérer la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs de cette famille).

Exercice 54 Trouver des vecteurs qui engendrent le noyau de chacune des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 55 Pour chacune des matrices suivantes décrivez géométriqument l'image de l'application linéaire associée (en tant que droite, plan, etc. dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -4 & -6 & -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Exercice 56 * Trouver le plus grand nombre possible de vecteurs linéairement indépendants parmi les vecteurs suivants :

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{u}_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 57

On considère, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, la famille de vecteurs suivants :

$$(1, 1, \alpha),\ (1, \alpha, 1),\ (\alpha, 1, 1).$$

Déterminer en fonction de α le rang de cette famille de vecteurs.

Exercice 58 * Déterminer la dimension des sous espaces vectoriels engendrés par chacune des 2 familles de vecteurs ci-dessous. Donnez en une base et exprimer les coordonnées de chacun des vecteurs de la famille dans la base trouvée.

1. la famille $\{V_1, V_2, V_3, V_4, V_5\}$ avec :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad V_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad V_5 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix},$$

2. la famille $\{W_1, W_2, W_3, W_4\}$ avec :

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad W_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -13 \end{pmatrix},$$

Exercice 59 * Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, soit F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_n : x \longmapsto \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, et soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $x \longmapsto \cos^n(x)$, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $F = G$.

Exercice 60 Montrer que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Montrer que la famille $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre. Montrer que la famille $\{\ln(2), \ln(3), \ln(5), \ln(7), \ln(11), ..., \ln(p), ...\}$, où p parcourt l'ensemble des nombres premiers positifs, est libre.

Exercice 61 * Soient F, G et H trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Comparer $F \cap (G + (F \cap H))$ et $(F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 62 Soit F, G, F' et G' quatre sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Montrer que si $F \cap G = F' \cap G'$ alors $(F + (G \cap F')) \cap (F + (G \cap G')) = F$.

5 Retour sur les applications linéaires

Exercice 63 Donner une application linéaire dont le noyau est le plan d'équation $x+2y+3z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 64 Donner une application linéaire dont le noyau est la droite engendrée par $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 65 Soit $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Décrivez l'image et le noyau des matrices A, A^2 et A^3 géométriquement.

Exercice 66 * Soit A une matrice carrée. Quelle relation y a-t-il entre Ker(A) et Ker(A^2) ? Sont-ils nécessairement égaux ? Mêmes questions pour $\mathrm{Im}(A)$ et $\mathrm{Im}(A^2)$.
Plus généralement que peut-on dire de Ker(A), Ker(A^2), Ker(A^3), Ker(A^4), etc.
Même question pour $\mathrm{Im}(A)$, $\mathrm{Im}(A^2)$, $\mathrm{Im}(A^3)$, $\mathrm{Im}(A^4)$, etc.

Exercice 67 Montrer qu'une matrice qui a deux colonnes égales n'est pas inversible (raisonner sur l'application linéaire associée).

Exercice 68 Les colonnes d'une matrice inversible sont-elles linéairement indépendantes ?

Exercice 69 Considérons une matrice $n \times p$, A, et une matrice $p \times n$, B, telles que $AB = I_p$. On suppose que $n \neq p$. Les vecteurs colonnes de B sont-ils linéairement indépendants ? Et ceux de A ?

Exercice 70 Considérons une matrice A de taille $n \times p$ et une matrice B de taille $p \times m$. Supposons que les vecteurs colonnes de A soient linéairement indépendants, ainsi que les vecteurs colonnes de B. Les vecteurs colonnes de AB sont-ils linéairement indépendants ?

Exercice 71 * Considérons une matrice carrée (pourquoi carrée d'ailleurs ?) A avec Ker$(A^2) =$ Ker(A^3). Est-ce que Ker$(A^3) =$ Ker(A^4) ? Justifier.

Exercice 72 * Considérons une matrice $n \times p$, A, et une matrice $p \times m$, B, telles que Ker$(A) = \{0\}$ et Ker$(B) = \{0\}$. Quand est-ce que Ker$(A) =$ Ker(B) (il n'y a aucune erreur dans la question) ? Dans tous les cas trouver Ker(AB).

Exercice 73 Parmi les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui suivent, lesquelles sont inversibles (sans donner leur matrice) ? Donner l'inverse quand il existe (toujours sans donner leur matrice). Ensuite vous pourrez donner les matrices de toutes ces applications linéaires.

i) La réflexion par rapport à un plan.

ii) La projection sur un plan.

iii) Une homothétie de rapport 5 (i.e. $T(u) = 5u$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$).

iv) Une rotation autour d'un axe.

Exercice 74 * Soient A une matrice 5×4 et B une matrice 4×5. En raisonnant géométriquement (utiliser le théorème du rang), montrer pourquoi AB n'est jamais inversible.

Exercice 75 Soit T une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Considérons la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ donnée par

$$f(t) = T\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot T\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

(Il s'agit du produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ des vecteurs $T\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ et $T\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$). Montrer les propriétés suivantes :

i) La fonction f est continue. Vous pourrez admettre que les fonctions sinus et cosinus sont continues, ainsi que la continuité de la somme et du produit de fonctions continues.

ii) $f(\pi/2) = -f(0)$.

iii) Il existe un nombre réel c compris entre 0 et $\pi/2$ tel que $f(c) = 0$. Vous utiliserez le théorème des valeurs intermédiaires, à savoir : si une fonction g est continue sur un intervalle $[a, b]$ et que L est un nombre réel compris entre $g(a)$ et $g(b)$, il existe au moins un nombre réel c entre a et b tel que $g(c) = L$.

iv) Il existe deux vecteurs unitaires perpendiculaires v_1 et v_2 dans $\mathbb{R}^2$ tels que les vecteurs $T(v_1)$ et $T(v_2)$ soient eux-mêmes perpendiculaires.

Exercice 76 Les rotations et les réflexions ont deux propriétés remarquables : elles préservent les longueurs des vecteurs et les angles entre les vecteurs (Faites des figures pour bien vous le représenter). Inversement nous allons voir que les seules applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui préservent les longueurs et les angles sont les rotations et les réflexions (par rapport à une droite).

i) Montrer que si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, définie par $f(x) = Ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, préserve les longueurs et les angles, alors les deux vecteurs colonnes de A sont perpendiculaires.

ii) Écrire le premier vecteur colonne de A sous la forme $u = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$; observer que $a^2 + b^2 = 1$. Montrer que pour un vecteur u donné il y a deux possibilités pour v, le second vecteur colonne de A. Faites un dessin qui représente u et les deux vecteurs v possibles. Exprimer les composantes de v en fonction de a et b.

iii) Montrer que si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui préserve longueurs et angles, alors f est soit une rotation soit une réflexion.

Exercice 77 Considérons la matrice $n \times n$, M_n, dont les coefficients sont les n^2 premiers entiers positifs écrits dans l'ordre croissant l'un à la suite de l'autre, colonne par colonne. Par exemple

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}.$$

i) Calculer le rang de M_4.

ii) Calculer le rang de M_n pour tout entier $n \geq 2$.

iii) Pour quels entiers n la matrice M_n est-elle inversible ?

Exercice 78 Existe-t-il une matrice A telle que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

Exercice 79 Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires telles que $g \circ f = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 80 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que

$$f(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 81 Soit E un espace vectoriel et soit f un endomorphisme de E. Supposons que pour tout $x \in E$ la famille $(x, f(x))$ est liée.

i) Montrer que si $x \in E$, $x \neq 0$, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$.

ii) Quand (x, y) est libre, comparer λ_x, λ_y et λ_{x+y}.

iii) Montrer que f est une homothétie.

Exercice 82 * Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. On note $H = \mathrm{Ker}(f)$.

i) Montrer que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$.

ii) Soit $x_0 \in E \backslash H$ et posons $F = \mathrm{V}ect(x_0)$. Montrer que $F \oplus H = E$.

Exercice 83 Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$.

i) Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$ (Indication : écrire $x = x - y + y$ avec $y = g \circ f(x)$).

ii) Montrer que $f(\mathrm{Im}(g)) = \mathrm{Im}(f)$.

6 Déterminants

Exercice 84 Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui calculer leur inverse.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 85 Déterminer si les applications linéaires suivantes sont bijectives (donner d'abord leur matrice). Trouver leur inverse quand il existe.

i) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (3x_1 + 5x_2, 5x_1 + 8x_2)$.

ii) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, 4x_1 + 8x_2)$.

iii) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3, x_1)$.

iv) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 2x_2 + 3x_3, x_1 + 4x_2 + 9x_3).$$

v) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 3x_2 + 3x_3, x_1 + 4x_2 + 8x_3, 2x_1 + 7x_2 + 12x_3).$$

vi) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x_1, x_2, x_3 x_{,4}) = (22x_1 - 16x_2 + 8x_3 + 5x_4, 13x_1 - 3x_2 + 9x_3 + 4x_4, 8x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 3x_4, 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4).$$

Exercice 86 Pour quelles valeurs de k la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & 4 & k^2 \end{pmatrix}$$

Exercice 87 Pour quelles valeurs des constantes a et b la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & a \\ -1 & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 88 Pour quelles valeurs des constantes a, b et c la matrice suivante est-elle inversible ?

$$\begin{pmatrix} 0 & c & a \\ -c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 89 Considérons l'ensemble des matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A^{-1} = A$?

Exercice 90 * Soit A une matrice diagonale : $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

i) Pour quelles valeurs de a, b et c la matrice A est-elle inversible ?

ii) À quelle condition sur ses coefficients diagonaux une matrice diagonale (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

Exercice 91 * Soit A une matrice triangulaire supérieure : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.

i) Pour quelles valeurs de a, b, c, d, e et f la matrice A est-elle inversible ?

ii) À quelle condition une matrice triangulaire supérieure (de taille arbitraire) est-elle inversible ?

iii) Si une matrice triangulaire supérieure est inversible, est-il vrai que son inverse est encore triangulaire supérieure ?

iv) À quelle condition une matrice triangulaire inférieure est-elle inversible ?

Exercice 92 Si A est une matrice inversible et c un scalaire non nul, est-ce que la matrice cA est inversible ? Si oui, quelle relation y a-t-il entre A^{-1} et $(cA)^{-1}$?

Exercice 93 Calculer le déterminant de

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 & 7 \\ 6 & 6 & 2 & 3 & 13 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 94 * Calculer $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$.

Exercice 95 Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & a & b & c \\ a & c & c & b \\ b & c & c & a \\ c & b & a & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & x & y & z \\ b & x & y & z \\ c & x' & y' & z' \\ d & x' & y' & z' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ -y & x & -t & z \\ -z & t & x & -y \\ -t & -z & y & x \end{pmatrix}$$

Exercice 96 Calculer le dÃterminant de la matrice tridiagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 97 Pour tout $n \geq 1$ entier et pour tous z_1,..., $z_n \in \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, notons M_n la matrice suivante :

$$M_n := \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_n & \cdots & z_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

i) Calculer, $\det(M_1)$, $\det(M_2)$ et $\det(M_3)$.

ii) Soit X une indéterminée. Pour tout $n \geq 1$ entier notons $P_n(X)$ le polynôme suivant :

$$P_n(X) := \det \begin{pmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & z_{n-1} & \cdots & z_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que $P_n(z_n) = \det(M_n)$.

Montrer que $P(z_i) = 0$ pour $1 \leq i \leq n-1$. Quel est le degré de $P_n(X)$? En déduire qu'il existe une constante c_n telle que $P_n(X) = c_n \prod_{i=1}^{n-1}(X - z_i)$.

iii) En remarquant que c_n est le coefficient de X^{n-1} dans l'écriture de $P_n(X)$, déterminer c_n.

iv) En déduire la valeur de $\det(M_n)$. À quelle condition $\det(M_n) = 0$?

v) Soient a_1,..., $a_n \in \mathbb{K}$ et supposons que z_1,..., z_n soient distincts deux à deux. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q(Z) \in \mathbb{K}[Z]$ de degré inférieur ou égal à $n-1$ tel que $Q(z_i) = a_i$ pour $1 \leq i \leq n-1$.