Tronc commun PC
Exercices

1 Logique

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ telle que

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 1-x & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que $f \circ f = id$.

Exercice 2. En quoi le raisonnement suivant est-il faux ?
Soit $\mathcal{P}(n)$: n crayons de couleurs sont tous de la même couleur.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car un crayon de couleur est de la même couleur que lui-même.
- Supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit $n+1$ crayons. On en retire 1. Les n crayons restants sont de la même couleur par hypothèse de récurrence.
  Reposons ce crayon et retirons-en un autre ; les n nouveaux crayons sont à nouveau de la même couleur. Le premier crayon retiré était donc bien de la même couleur que les n autres. La proposition est donc vraie au rang $n+1$.
- On a donc démontré que tous les crayons en nombre infini dénombrable sont de la même couleur.

Exercice 3. Soient E un ensemble et A, B, C trois parties de E telles que $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$. Montrer que $B = C$.

Exercice 4. Exprimer à l'aide de quantificateurs les phrases suivantes puis donner leur négation.

1. (f étant une application du plan dans lui-même)
   (a) f est l'identité du plan.
   (b) f a au moins un point invariant (on dit aussi point fixe).
2. (f étant une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$)
   (a) f est l'application nulle.
   (b) L'équation $f(x) = 0$ a une solution.
   (c) L'équation $f(x) = 0$ a exactement une solution.
3. ($(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite réelle)
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Exercice 5. Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n$$

Démontrer que l'on a

$$S_n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1)$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$.
f est-elle injective ? surjective ? Déterminer $f^{-1}([-1,1])$ et $f(\mathbb{R}_+)$.

2 Complexes

Exercice 7. Mettre sous la forme algébrique de $a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R})$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 8. Ecrire sous la forme $a + ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 9.

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3 + 3i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = -\frac{4}{3}i, \quad z_4 = -2, \quad z_5 = e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

2. Calculer $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2012}$.

Exercice 10. Calculer les puissances n-ièmes des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_2 = 1 + j \quad ; \quad z_3 = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}.$$

Exercice 11. Calculer les racines carrées de 1, i, $3+4i$, $8-6i$, et $7+24i$.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$$z^2 + z + 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - (1+2i)z + i - 1 = 0 \quad ; \quad z^2 - \sqrt{3}z - i = 0 \quad ;$$

$$z^2 - (5-14i)z - 2(5i+12) = 0 \; ; \; z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0 \; ; \; 4z^2 - 2z + 1 = 0 \; ;$$

$$z^4 + 10z^2 + 169 = 0 \quad ; \quad z^4 + 2z^2 + 4 = 0.$$

Exercice 13. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Mettre j et j^2 sous forme algébrique.
2. Vérifier que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Factoriser le polynôme $z^3 - 8i$.

Exercice 14. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$z^2 - (1+a)(1+i)z + \left(1+a^2\right)i = 0,$$

où a est un paramètre réel.

1. Calculer en fonction de $a \in \mathbb{R}$ les solutions z_1 et z_2 de (E) (indication : on pourra déterminer les racines carrées complexes de $-2i(1-a)^2$).
2. On désigne par Z_1 (resp. Z_2) les points du plan complexe d'affixe z_1 (resp. z_2) et par M le milieu de $[Z_1, Z_2]$. Tracer la courbe du plan complexe décrite par M lorsque a varie dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^4 = (1-i) \,/\, \left(1+i\sqrt{3}\right).$

Exercice 16. Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Exercice 17. Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1. $z^5 = 1$.
2. $z^5 = 1-i$.
3. $z^3 = -2+2i$.
4. $z^5 = \bar{z}$.

Exercice 18. En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

3 Limites, continuité, dérivabilité

Exercice 19. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$;
4. $f_4(x) = E(x)\sin(\pi x)$.

Exercice 20. Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} e^{-x}+1 & x<0 \\ 2+x\ln x & x>0 \\ a & x=0 \end{cases}$$

– Quel est son ensemble de définition ?
– Déterminer a pour que f soit continue en 0.

Exercice 21. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$, $f(x) = 1/2 - x$ si $x \in]0, 1/2[$, $f(1/2) = 1/2$, $f(x) = 3/2 - x$ si $x \in]1/2, 1[$ et $f(1) = 1$.

1. Tracer le graphe de f. Étudier sa continuité.

2. Démontrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.

3. Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}E(2x) - \frac{1}{2}E(1-2x)$.

Exercice 22. Déterminer les domaines de définition des fonctions suivantes

$$f(x)=\sqrt{\frac{2+3\,x}{5-2\,x}}\ ;\quad g(x)=\sqrt{x^2-2\,x-5}\ ;\quad h(x)=\ln\left(4\,x+3\right).$$

Exercice 23. Etudier la continuité de

1. $f(x)=x+\sqrt{x-\mathrm{E}(x)}$.
2. $g(x)=\mathrm{E}(x)+\sqrt{x-\mathrm{E}(x)}$.

Exercice 24.

1. Soit la fonction réelle définie par $f(x)=1$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=0$ sinon. Montrer que f n'admet pas de limite en tout point de $\mathbb{R}$.
2. Soit la fonction réelle définie par $f(x)=x$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=1-x$ sinon. En quels points de $\mathbb{R}$ f est elle continue ?

Exercice 25. Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

a) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2\,|x|}{x}$ *b*) $\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2+2\,|x|}{x}$ *c*) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$

d) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ *e*) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ *f*) $\lim_{x\to +\infty}\sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

g) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ *h*) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$

Exercice 26. On rappelle les limites : $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ et $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$. Calculer les limites suivantes :

$$\text{a)}\ \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}.\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\qquad \text{b)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$$

$$\text{c)}\ \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\qquad \text{d)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin 2x}{x^2}$$

$$\text{e)}\ \lim_{x\to 0}x\frac{\tan x}{\cos^2 x-1}\qquad \text{f)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})}$$

Exercice 27. Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes et calculer la dérivée si possible :

$$f_1(x)=x^2\cos\frac{1}{x},\quad \text{si } x\neq 0\qquad ;\qquad f_1(0)=0;$$

$$f_2(x)=\sin x\cdot\sin\frac{1}{x},\quad \text{si } x\neq 0\qquad ;\qquad f_2(0)=0;$$

$$f_3(x)=\frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1},\quad \text{si } x\neq 1\qquad ;\qquad f_3(1)=1.$$

Exercice 28. Calculer les dérivées des fonctions :

1. $x\mapsto\sqrt{1+x^2\sin^2 x}$, $\quad x\mapsto\frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$.
2. $x\mapsto\log(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)})$, $\quad x\mapsto(x(x-2))^{1/3}$.

Exercice 29. Calculer la dérivée de $x\to\ln\cos(\pi+\frac{x^2-1}{x^2+1})$.

Exercice 30. Expliquer pourquoi on a

$$0.99^4 \leq 1 - 4(0.01)$$

Exercice 31. Une tige non homogène a une longueur de 12 cm, la masse de la tige est proportionnelle au carré de la distance à un bord et vaut 10 g quand la longueur vaut 2 cm ? Déterminer la masse de la tage et la densité linéaire en un point.

Exercice 32. Un marchand de frites les vend dans une feuille de papier de largeur L, de façon à obtenir une portion de cône de hauteur h, d'angle au sommet α.

- Déterminer une relation entre L, h et x le rayon de base.
- Exprimer le volume en fonction de x et L.
- Trouver x_0 qui maximise le volume.
- En déduire l'angle correspondant.

4 Fonctions usuelles

Exercice 33. Pour chacune des expressions, dire pour quelles valeurs de x elle est définie et pour quelles valeurs elle est égale à x :

$$\begin{array}{cccc} (\sqrt{x})^2 & \sqrt{(x^2)} & e^{\ln x} & \ln e^x \\ \sin(\arcsin x) & \arcsin \sin x & \cos \arccos x & \arccos \cos x \\ \cosh Argch(x) & Argch(\cosh x) & \sinh Argsh(x) & \end{array}$$

Exercice 34. Soit a un réel supérieur à 1.

1. Résoudre $x^2 - 2ax + 1 = 0$
2. Prouver que $e^{Argch(a)}$ est solution de l'équation.
3. En déduire que
$$Argch(a) = \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

Exercice 35. Soit a un réel dans $]-1, 1[$.

1. Résoudre $\frac{x-1}{x+1} = a$
2. Prouver que $e^{2Argth(a)}$ est solution de l'équation.
3. En déduire que
$$Argth(a) = \frac{1}{2} \ln(\frac{1+a}{1-a})$$

Exercice 36. Résoudre les équations suivantes :

1. $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.

Exercice 37. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}.$$

Exercice 38. Écrire sous forme d'expression algébrique

$$\sin(\arccos x), \quad \cos(\arcsin x), \quad \sin(2\arctan x).$$

Exercice 39. Résoudre les équation suivantes :

$$\arcsin x = \arcsin \frac{2}{5} + \arcsin \frac{3}{5}, \quad \arccos x = 2 \arccos \frac{3}{4},$$

$$\arctan x = 2 \arctan \frac{1}{2}.$$

Exercice 40. Calculer

$$\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{5} + \arctan \frac{1}{8}.$$

Exercice 41. Étudier la fonction :

$$\phi : x \to \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

Exercice 42. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} \text{ch}x + \text{sh}y = a \\ \text{sh}x + \text{ch}y = b \end{array} \right.$.

Exercice 43. Vérifier les égalités

$$2 Argth \tan x = Argth \sin 2x, \qquad Argsh(3x + 4x^3) = 3 Argshx.$$

5 Etude de fonctions, DL

Exercice 44. Calculer les DL au voisinage de 0 à l'ordre trois de
- $\frac{1}{1+x}$
- $\sin x$
- $\arctan x$
- $\ln(1 + 2x)$
- $\sqrt{1 + e^x}$

Exercice 45. Calculer les limites suivantes
- $\lim_0 \frac{e^x - 1}{x}$
- $\lim_1 \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$
- $\lim_0 \frac{\sin x - x}{x^2}$
- $\lim_0 \frac{x^2}{\cos 2x - 1}$
- $\lim_{+\infty} \sqrt{x^2 + x} - x - \frac{1}{2}$

Exercice 46. Déterminer le graphe des fonctions
- $\cos 2x$
- $\cos x - \sin x$
- $\frac{1}{x^3}$

Exercice 47. Même question pour
- $\sqrt{\frac{x^3}{x+2}}$
- $\arctan x - \pi/2$
- $x + \frac{1}{x}$
- $\sin \frac{1}{x}$

Exercice 48. Pour les fonctions des exercices précédents

– Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1
– Etudier la position de la tangente par rapport à la courbe.

Exercice 49. Construire le graphe des fonctions suivantes :

1. (*) $f_1(x) = 2|2x-1| - |x+2| + 3x$.
2. (**) $f_2(x) = \ln(chx)$.
3. (***) $f_3(x) = x + \sqrt{|x^2-1|}$.
4. (**) $f_4(x) = |\tan x| + \cos x$.
5. (***) $f_5(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ (à étudier sur $]0,+\infty[$).
6. (**) $f_6(x) = \log_2(1 - \log_{\frac{1}{2}}(x^2-5x+6))$.

Exercice 50. Faire un développement limité ou asymptotique en a à l'ordre n de :

1. $\ln\cos x$, $n=6$, $a=0$.
2. $\dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$, $n=2$, $a=0$.
3. $\ln\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})$, $n=3$, $a=0$.
4. $\ln\sin x$, $n=3$, $a=\frac{\pi}{4}$.
5. $\sqrt[3]{x^3+x} - \sqrt[3]{x^3-x}$, $n=4$, $a=+\infty$.
6. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$, $n=3$, $a=0$.
7. $x(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}} - x\sqrt{2})$, $n=2$, $a=+\infty$.

Exercice 51.

1. Equivalent simple en $+\infty$ et $-\infty$ de $\sqrt{x^2+3x+5} - x + 1$.
2. Equivalent simple en 0, 1, 2 et $+\infty$ de $3x^2 - 6x$
3. Equivalent simple en 0 de $(\sin x)^{x-x^2} - (x-x^2)^{\sin x}$.
4. Equivalent simple en $+\infty$ de $x^{\tanh x}$.
5. Equivalent simple en 0 de $\tan(\sin x) - \sin(\tan x)$.

Exercice 52. Calculer le développement limité de $\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$ en 0 à l'ordre 3.

6 Primitives

Exercice 53. Justifiez l'existence des intégrales suivantes et calculer les :

1. $\int_0^{\pi/2}[\cos 5x + \sin x]dx$
2. $\int_0^{\pi/3}[1+\tan^2 x]dx$
3. $\int_0^{2}[x^2+x^7-x]dx$
4. $\int_0^{1/2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Exercice 54. Justifiez l'existence des intégrales suivantes et calculer les en utilisant une intégration par parties :

1. $\int_1^{\pi/2}[\ln x]dx$
2. $\int_0^{\pi/3}[x^2\cos x]dx$

3. $\int_0^2 \frac{x+1}{e^x} dx$
4. $\int_0^{1/2} x\cos(4x) dx$

Exercice 55. Justifiez l'existence des intégrales suivantes et calculer les en utilisant le changement de variable indiqué :

1. $\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} dx \quad x = \cos t$
2. $\int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} \quad x = 2t$
3.

Exercice 56. On considère la fraction rationnelle $\frac{x+1}{(x+2)(x+3)}$.

1. Montrer qu'il existe a, b réels tels que

$$\frac{x+1}{(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{x+3}$$

2. En déduire une primitive de la fraction sur un intervalle à préciser.

Exercice 57. Calculer :

1. $\int_1^2 \frac{e^{2x} dx}{1+e^{2x}}$
2. $\int_0^{\pi/3} [\sin^4 x \cos x] dx$
3. $\int_0^2 \frac{x+1}{e^x} dx$

Exercice 58. Calculer les primitives des fonctions suivantes en précisant le ou les intervalles considérés :

1. $\frac{1}{2+\sin^2 x}$
2. $\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}$
3. $\frac{\tan x}{1+\sin(3x)}$
4. $\frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x}$

Exercice 59. Calculer les primitives suivantes par intégration par parties.

1. $\int x^2 \ln x \, dx$
2. $\int x \arctan x \, dx$
3. $\int \ln x \, dx \quad$ puis $\quad \int (\ln x)^2 \, dx$
4. $\int \cos x \exp x \, dx$

Exercice 60. Calculer les primitives suivantes :

$$\int (\cos x \cos 2x + \sin x \sin 3x) dx \quad ; \quad \int \cos x \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \cos^6 x dx \quad ;$$

$$\int \sin^3 x \cos x dx \quad ; \quad \int \sin^4 x dx \quad ; \quad \int \sin^3 x \cos^2 x dx \quad ;$$

$$\int ch^2 x sh^2 x dx \quad ; \quad \int shx ch^3 x dx \quad ; \quad \int chx sh^3 x dx.$$

Exercice 61. Décomposer les fractions rationnelles suivantes ; en calculer les primitives.

1. $\dfrac{1}{a^2+x^2}$.
2. $\frac{1}{(1+x^2)^2}$.
3. $\dfrac{x^3}{x^2-4}$.
4. $\dfrac{4x}{(x-2)^2}$.
5. $\dfrac{1}{x^2+x+1}$.
6. $\dfrac{1}{(t^2+2t-1)^2}$.
7. $\dfrac{x^3+2}{(x+1)^2}$.
8. $\dfrac{x+1}{x(x-2)^2}$.
9. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+3)}{2x+2x^2}$.
10. $\dfrac{x^2}{(x^2+3)^3(x+1)}$.

7 Calcul différentiel

Exercice 62. Pour chaque fonction
- Trouver le domaine de définition.
- Déterminer sur quel ensemble les dérivées partielles existent. Calculer les.
- Une fonction est dite symétrique si $f(x,y) = f(y,x)$ pour tout $(x,y) \in D_f$ et tout (y,x). Lesquelles sont symétriques ?
- Si f est symétrique, trouver une relation entre les dérivées partielles.

$$x+y; \frac{x}{y}; \sqrt{1-(xy)}; x^y+y^x;$$

$$x^3+y^3; \frac{1}{x+y}; \frac{1}{\cos(x+y)}$$

Exercice 63. soit $f(x,y) = \arctan\frac{x}{y}$.
- Déterminer le domaine définition de f.
- Montrer que f admet des dérivées partielles.
- Montrer

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 1$$

Exercice 64. Soit f la fonction définie par

$$f(x,y) = 4x + \sin y + \ln(1+x)$$

- Déterminer le domaine de définition de f. Montrer qu'elle admet des dérivées partielles.
- Soit $x(t) = t^2, y(t) = t^3$ les fonctions définies sur un intervalle I, trouver I pour que l'on puisse composer f par ces fonctions.

- calculer la dérivée de $f(x(t), y(t))$.

Exercice 65. Même exercice avec

$$f(x, y) = x + \cos(3y) + \ln(1 + 2x)$$

et $x(t) = t^2, y(t) = 3t$.

Exercice 66. Soit f définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy.$$

Soit g définie par

$$g(r, \theta) = (r \cos\theta, r \sin\theta)$$

- Calculer la composée $f \circ g$.
- Calculer de deux manières $\frac{\partial f \circ g}{\partial r}$.

Exercice 67. Même chose en remplaçant f par

$$x + e^{xy} + y^2$$

puis par

$$\cos x + y^5 - (xy)^2$$

Exercice 68. Même chose en remplaçant f par

$$x + e^{xy} + y^2$$

et g par

$$g(u, v) = (2u + 5v, 3u - 6v)$$

Exercice 69. Soit f la fonction donnée par

$$x^3 + 3xy^2 - y^4$$

- Montrer que f est différentiable sur son domaine de définition.
- Calculer la différentielle de f en $(1, 1)$.
- Reprendre les questions avec

$$\frac{x - y}{x + y}$$

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$