

UNIVERSITÉ AIX-MARSEILLE II  
Faculté des Sciences de Luminy

Thèse  
pour obtenir le grade de  
**Docteur de l'Université Aix-Marseille II**  
**Spécialité : Mathématiques**

soutenue le 27 mai 2005 par

**Nicolas Bedaride**

# **Étude du billard dans un polyèdre.**

après avis des rapporteurs :

M. Jörg Schmeling,  
M. Anton Zorich,

devant le jury composé de :

M. Pierre Arnoux,  
M. Jean Berstel,  
Mme Valérie Berthé,  
M. Jörg Schmeling,  
M. Serge Troubetzkoy, directeur de thèse.



Pour accomplir une tâche impossible, on la débitait en petits bouts de tâches simplement très difficiles, qu'on divisait ensuite en tâches horriblement pénibles, qu'on segmentait à leur tour en travaux délicats et ainsi de suite . . .

Terry Pratchett.

On devrait toujours pouvoir remplacer points, lignes et plans par tables, chaises et canettes de bière.

David Hilbert.

## Remerciements

Au cours de cette thèse, je me suis souvent imaginé en train d'écrire cette page. Je voyais ce travail comme un moment agréable et sans obstacle. Au moment de le faire, j'avoue que mon opinion a changé. Ainsi, quand vous lirez ces lignes ayez une pensée pour la difficulté rencontrée par leur auteur pour éviter les répétitions.

Je voudrais, tout d'abord, remercier mon directeur, Serge Troubetzkoy, pour la gentillesse et l'attention qu'il a manifestées au cours de cette thèse. Il m'a aidé du mieux qu'il a pu.

Je suis très honoré qu'Anton Zorich et Jorg Schmeling aient accepté d'être rapporteurs. Leurs remarques m'auront été très précieuses. De plus merci, à Anton Zorich de m'avoir écouté patiemment pendant une journée entière.

Pierre Arnoux a accompagné mes premiers pas en recherche, en encadrant mon mémoire de DEA. C'est grâce à lui que j'ai eu l'occasion de faire une thèse. De plus, ses conseils m'ont toujours été utiles au cours de ces années. De même Valérie Berthé, par ses remarques pertinentes et sa disponibilité aura grandement amélioré ce travail. Je suis très flatté qu'ils fassent partie de ce jury.

Enfin, je tiens à remercier Jean Berstel de participer à ce jury, et d'apporter le point de vue combinatoire indispensable à cette thèse.

Un grand merci à l'ex-équipe DAC pour sa bonne ambiance, les conseils avisés de ses membres, et les innombrables anecdotes de l'IML (tournevis, et autres). En particulier, je tiens à remercier Pascal Hubert d'avoir accepté de m'écouter à de nombreuses reprises. Enfin, merci d'organiser un séminaire à Porquerolles, je garde de très bons souvenirs de l'Igesa, des mouettes, et de la forêt.

Un remerciement spécial aux différents thésards et post-docs qui se sont succédés dans l'équipe : Ali, Sylvie, Boris, Erwan, Samuel, Riuju, Julien, Thierry, Mathieu, Marion, Xavier, Idrissa. En particulier merci à Boris et Julien d'avoir écouté mes diverses idées, et de m'avoir expliqué les secrets de la discrédance, des substitutions, de la  $\beta$ -numération et du go. Merci aussi au binome formé par le membre d'indymédia et l'hyperactif, d'avoir partagé mon bureau pendant trois ans et d'avoir apporté un peu de dynamisme dans ces locaux.

Après quatre ans à l'IML, je ne peux oublier de remercier Aurélia pour son amabilité et ses compétences, qui lui ont permis de toujours résoudre mes problèmes administratifs. Enfin un grand merci au serveur de ne pas avoir crashé juste avant que je ne sauvegarde mes données.

Cette thèse à Marseille ne se serait pas aussi bien passée sans mes amis : comme je connais votre susceptibilité, je tiens à dire que la liste suivante n'obéit pas à un ordre précis. Alexandre, Muriel (merci pour les virgules), Céline, Didier, Sébastien, Stéphanie, Nicolas, Sylvaine, Léa, Renaud, Sonia, Franck, Julie, Jérôme, Nathalie, Julien, google, madore.org (désolé). Je garderai longtemps en mémoire mes découvertes des bars, billards et restaurants locaux. Et pour ceux avec qui j'aurais échangé quelques mails, ne vous inquiétez pas ils seront bien archivés.<sup>1</sup>

Pour finir, je tiens à remercier ma famille, qui a réussi à me supporter pendant ces années d'étude. Il paraît que je n'ai pas un caractère facile. Merci beaucoup, infiniment.

---

<sup>1</sup>Un grand remerciement à F.L.A.M.M.S pour m'avoir fait répéter



# Table des matières

<b>Présentation des travaux</b>	<b>1</b>
<b>0 Introduction</b>	<b>3</b>
0.1 Les différents billards . . . . .	3
0.2 Généralités . . . . .	4
0.2.1 Définitions . . . . .	4
0.2.2 Entropie . . . . .	5
0.2.3 Dynamique symbolique . . . . .	8
0.3 Billard polyédral : Premiers outils . . . . .	9
0.3.1 Définition . . . . .	9
0.3.2 Dépliage . . . . .	10
0.3.3 Coordonnées dans le cas polygonal . . . . .	10
0.3.4 Coordonnées pour le cas polyédral . . . . .	13
0.3.5 Théorèmes ergodiques . . . . .	13
0.4 Complexité . . . . .	15
0.4.1 Rappels . . . . .	15
0.4.2 Billard . . . . .	17
0.4.3 Résultats . . . . .	19
0.5 Trajectoires périodiques . . . . .	20
0.5.1 Historique . . . . .	20
0.5.2 Longueur des trajectoires . . . . .	22
0.5.3 Résultats . . . . .	22
0.6 Isométries par morceaux . . . . .	23
0.6.1 Échange d'intervalles . . . . .	23
0.6.2 Échange de polygones . . . . .	24
0.6.3 Résultats . . . . .	24
<b>Descriptif de la thèse</b>	<b>24</b>
<b>1 Complexité : Premiers résultats</b>	<b>27</b>
1.1 Polyèdres rationaux . . . . .	27
1.1.1 Classification . . . . .	27
1.1.2 Polyèdres réguliers . . . . .	28
1.2 Résultats antérieurs . . . . .	28
1.3 Complexité dans un polyèdre rationnel . . . . .	29

1.4	Introduction . . . . .	30
1.5	Polygonal exchanges . . . . .	33
1.6	Generalized diagonals for the cubic billiard . . . . .	34
1.7	Right prisms. . . . .	35
<b>2</b>	<b>Complexité globale du cube</b>	<b>39</b>
2.1	Introduction . . . . .	39
2.2	Statement of the theorem . . . . .	40
2.3	Preliminary results . . . . .	41
2.4	Diagonals from a vertex to a vertex . . . . .	46
2.5	Diagonals from a vertex to an edge . . . . .	46
2.5.1	One partition . . . . .	47
2.5.2	Two partitions . . . . .	47
2.6	Diagonals from an edge to an edge . . . . .	48
2.6.1	The edges are not parallel . . . . .	48
2.6.2	The edges are parallel . . . . .	49
2.7	Order of magnitude . . . . .	51
2.8	Proof of Theorem 2.2.2 . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Entropie topologique du billard polyédral</b>	<b>53</b>
3.1	Introduction . . . . .	53
3.2	Background and notations . . . . .	54
3.2.1	Notations . . . . .	54
3.2.2	Background . . . . .	55
3.2.3	Related results . . . . .	56
3.3	Variational principle . . . . .	56
3.4	Measures on the boundary . . . . .	57
3.4.1	Orbits passing through several edges . . . . .	57
3.4.2	Key point . . . . .	62
3.5	Proof of Theorem 3.1.1 . . . . .	64
<b>4</b>	<b>Trajectoires périodiques</b>	<b>65</b>
4.1	Introduction . . . . .	65
4.2	Background . . . . .	66
4.2.1	Orthogonal group of vectorial space . . . . .	66
4.2.2	Affine space . . . . .	67
4.3	Polyhedral billiard . . . . .	69
4.4	Stability . . . . .	72
4.4.1	Polygons . . . . .	72
4.4.2	Polyhedra . . . . .	73
4.5	Background about triangles . . . . .	74
4.6	Tetrahedron . . . . .	75
4.6.1	Regular tetrahedron . . . . .	75
4.7	Stability for the tetrahedron . . . . .	77
4.7.1	Proof of Theorem 4.7.2 . . . . .	78

4.7.2	Space of tetrahedra . . . . .	80
4.7.3	Computing . . . . .	80
<b>5</b>	<b>Échanges de rectangles</b>	<b>83</b>
5.1	Minimalité : Résultats connus . . . . .	83
5.1.1	Échanges d'intervalles . . . . .	83
5.1.2	Échanges de rectangles . . . . .	83
5.1.3	Rappels sur les rotations . . . . .	84
5.2	Échange de rectangles et billard dans un prisme droit . . . . .	85
5.2.1	Définition . . . . .	85
5.2.2	Échange de rectangles . . . . .	86
5.2.3	Équation cohomologique . . . . .	86
5.2.4	Conjugaison . . . . .	86
5.2.5	Résolution . . . . .	87
5.3	Temps de retour non borné . . . . .	87
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>89</b>
	<b>Appendice</b>	<b>91</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>99</b>



## Présentation des résultats

Dans cette thèse, on s'intéresse au billard dans un polyèdre. On étudie cette application en codant les trajectoires suivant les faces rencontrées. On code chaque face par une lettre, et l'orbite d'un point devient un mot infini. Pour étudier les propriétés de ce mot infini, on cherche à calculer sa complexité. Ce mot infini admet, comme trajectoire de billard, une direction fixe. On parlera donc de complexité directionnelle. On peut aussi s'intéresser au langage formé par l'union sur toutes les directions des mots précédents. On parlera alors de complexité globale. Dans le cas des polygones, ce calcul a été mené depuis une vingtaine d'années. On montre ainsi que le billard polygonal est d'entropie nulle. C'est à dire que la complexité croît sous-exponentiellement. Pour obtenir des résultats plus précis, il faut se restreindre aux polygones rationnels. Dans ce cas, la complexité directionnelle est affine en  $n$ , et la complexité globale croît comme  $n^3$ . Dans ce travail on s'intéresse au cas de la dimension trois.

Au premier chapitre, on calcule la complexité directionnelle dans le cas du cube. Au cours de la démonstration, on retrouve et généralise la preuve du calcul de la complexité globale des polygones au cas des polygones non convexes. De plus notre preuve permet d'obtenir des estimations de la complexité directionnelle dans le cas de certains prismes droits. Cet article a été publié dans "Regular and chaotic dynamical systems" [13].

Au deuxième chapitre, on s'intéresse à la complexité globale dans le cas du cube. On encadre cette fonction, en la reliant à la notion de diagonale généralisée. Une diagonale généralisée est une trajectoire de billard, qui part d'une arête et qui arrive à une arête du polyèdre. Ce travail a donné lieu à une prépublication [15].

Au troisième chapitre, on cherche une estimation valable dans n'importe quel polyèdre. On obtient ainsi que l'entropie topologique est nulle dans tout polyèdre convexe. La preuve reprend la méthode de la démonstration du cas bi-dimensionnel, et traite les cas propres à la dimension trois. Ce travail est soumis pour publication [17].

Le quatrième chapitre traite du problème des trajectoires périodiques. On trouve une trajectoire de billard périodique dans le tétraèdre régulier, qui passe par chaque face. De plus cette trajectoire est stable, c'est-à-dire que si l'on bouge légèrement les sommets du tétraèdre, elle existe toujours. Dans une deuxième partie, on donne une condition suffisante pour qu'un mot de billard périodique soit stable. Ce travail est soumis pour publication [14].

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse à une classe particulière d'échanges de rectangle. Cette application est une bijection définie sur une union de rectangles, telle que restreinte à chaque rectangle elle soit égale à une translation. Pour des échanges de rectangle, dans une classe donnée, on obtient l'ergodicité et un équivalent de la complexité [16].



# Chapitre 0

## Introduction

### 0.1 Les différents billards

La première étude scientifique du billard semble remonter à 1668 lorsque Huygens et Wallis étudient les trajectoires de billes qui s'entrechoquent dans l'espace. Il faut alors attendre 1922 pour la première étude mathématique du billard par Birkhoff [25]. L'étude se restreint aux tables de  $\mathbb{R}^n$  dont le bord est une courbe suffisamment régulière, au moins par morceaux. L'étude du billard fait alors rapidement apparaître des différences énormes suivant la forme de la table. On distingue alors trois types de table suivant la courbure de la courbe de bord.

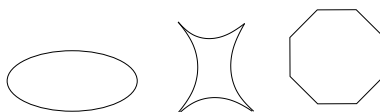


FIG. 1 – Les différents billards.

Les tables à courbure négative donnent des systèmes dynamiques hyperboliques à entropie positive. Leur étude a été initiée par Sinai et Bunimovitch avec les billards dispersifs [83]. Un moyen simple de voir le caractère dispersif est de remarquer qu'un faisceau de droites de même direction n'est pas réfléchi en un faisceau de direction unique. Les billards dispersifs sont ainsi d'entropie positive, ergodiques, et isomorphes à un décalage de Bernoulli.

Les tables à courbure strictement positive font appel aux notions de géométrie riemannienne, de théorie KAM, d'analyse spectrale, et sont étudiées en toute dimension. Mais des problèmes ouverts importants persistent encore en dimension deux; citons par exemple la conjecture de Birkhoff concernant les ellipses [24]. Cette conjecture affirme que les ellipses sont caractérisées par l'intégrabilité de l'application du billard. On peut aussi noter que le billard dans le stadium de Bunimovitch est ergodique [31]. C'est une table à courbure positive ou nulle formée de deux segments parallèles reliés par deux demi-cercles.

Les tables à courbure nulle ont été principalement étudiées en dimension deux. Leur étude fait aussi bien appel à la combinatoire, qu'à l'étude des surfaces de Riemann et à la théorie de Teichmüller. Cette dernière théorie ne peut être utilisée que pour une sous classe de

l'ensemble de ces billards : ce sont les billards rationnels (voir 0.3.6). Cette classe est dense dans l'ensemble des polygones à  $k$  côtés. C'est d'ailleurs l'obstacle essentiel à une étude ergodique similaire en dimension supérieure, vu l'absence d'une telle théorie en dimension plus grande.

Signalons aussi que l'on peut étudier le billard de manière plus réaliste. On ne considère plus la trajectoire d'un point, mais d'une bille (sphère de rayon strictement positif). On peut aussi prendre plusieurs billes. Cette étude est à relier aux systèmes dynamiques hyperboliques. De plus, elle fournit un modèle mathématique à l'étude d'un gaz dans une pièce et à l'hypothèse de Boltzmann. Leur étude mélange les outils des billards polygonaux et des billards hyperboliques [11]. Les questions sont communes à ces différents modèles, mais les méthodes sont différentes.

Dans la suite, on ne s'intéressera qu'aux billards à courbure nulle. Dans cette catégorie, il faut séparer les billards en deux classes. Les éléments de la première classe sont appelés rationnels (nous verrons après pourquoi). L'étude des premiers est facilitée par la présence d'outils puissants (théorie de Teichmüller). Mais malgré ceci, leur étude est encore loin d'être complète ! La deuxième classe pose des problèmes pour l'application directionnelle car elle n'est pas de mesure finie. De plus, dans le cas polygonal, la première classe est dense dans l'espace de tous les polygones, ce qui renforce l'utilité de son étude. Mais, en dimension supérieure, ceci n'est plus vrai, d'où des difficultés accrues. Signalons enfin que les billards rationnels (de la première classe) sont reliés, de manière intrinsèque, à l'étude des isométries par morceaux de  $\mathbb{R}^n$  (et aux applications affines par morceaux). Ainsi, en dimension deux, les échanges d'intervalles et le billard polygonal ont des liens forts. Pour la dimension supérieure, le problème est que l'étude des isométries par morceaux est nettement plus complexe. Pour simplifier, le problème majeur que l'on rencontre est que l'image réciproque d'un point ne sépare plus un ensemble de la partition en deux ensembles connexes distincts. De nombreux dessins et des études de cas particuliers se trouvent dans [43, 44].

## 0.2 Généralités

### 0.2.1 Définitions

Nous rappelons ici des définitions générales des systèmes dynamiques, qui nous seront utiles par la suite. Soit  $X$  un espace métrique compact,  $T$  une transformation continue de  $X$  dans  $X$ . Si  $x$  est un élément de  $X$ , l'ensemble  $(T^n x)_{n \in \mathbb{N}}$  est l'orbite de  $x$ . Le couple  $(X, T)$  est appelé système dynamique topologique.

**Définition 0.2.1.** *Un système dynamique est dit minimal si tout point est d'orbite dense.*

On peut aussi considérer un système dynamique mesuré : l'ensemble  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  où  $\mathcal{A}$  est une  $\sigma$ -algèbre de  $X$ ,  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathcal{A}$ , et  $T$  une transformation  $\mathcal{A}$  mesurable telle que la mesure  $\mu$  est  $T$  invariante (i.e  $\mu(T^{-1}A) = \mu(A)$  pour tout  $A \in \mathcal{A}$ ) est appelé système dynamique mesuré.

**Définition 0.2.2.** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré, il est dit ergodique si*

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad T^{-1}A = A \implies \mu(A) = 0 \quad \text{ou} \quad 1.$$

Cette notion peut alors se manipuler grâce au théorème suivant :

**Théorème 0.2.3 (Birkhoff).** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré ergodique, alors pour toute fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  intégrable, pour presque tout  $x \in X$  on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k x) = \int_X f d\mu.$$

**Exemple 0.2.4.** *L'application de  $[0, 1[$  dans lui-même, qui à  $x$  associe  $\{x + \alpha\}$  avec  $\alpha$  irrationnel, est ergodique pour la mesure de Lebesgue et minimale. Signalons que  $\{\}$  représente la partie fractionnaire.*

### Lemme de Poincaré

**Lemme 0.2.5 (Poincaré).** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré tel que  $\mu(X)$  est fini. Pour tout ouvert  $U$ , il existe un point  $x \in U$  qui retourne dans  $U$  :*

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad T^n x \in U.$$

*De plus, l'ensemble des points de  $U$  qui ne reviennent pas sur  $U$  est de mesure nulle.*

Ce résultat peut se révéler très utile, malgré son apparente simplicité [51].

Nous rappelons maintenant la notion de mélange faible qui est plus forte que l'ergodicité.

**Définition 0.2.6.** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique mesuré. On dit qu'il vérifie la propriété de mélange faible si pour toutes parties  $A, B \in \mathcal{A}$  on a :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\mu(T^{-k} A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0.$$

Cette propriété est reliée aux autres par le théorème suivant [74] :

**Théorème 0.2.7.** *Soit  $(X, \mathcal{A}, \mu, T)$  un système dynamique métrique, on a alors équivalence entre*

- $T$  est faiblement mélangeant,
- $T \times T$  est ergodique,
- $T \times S$  est ergodique sur  $X \times Y$  pour tout  $(Y, \mathcal{B}, \nu, S)$  ergodique,
- $T \times T$  est faiblement mélangeant,
- les seules fonctions propres mesurables de  $T$  sont les fonctions constantes.

## 0.2.2 Entropie

Lorsque l'on étudie les systèmes dynamiques, un des objectifs les plus naturels, est de les classer. Pour ce faire, on a besoin de trouver des invariants: c'est-à-dire des objets identiques pour deux systèmes dynamiques conjugués. Un des premiers invariants a été introduit par Kolmogorov en 1959 : c'est l'entropie métrique [60, 59]. Ce nombre donne une idée de la

complexité du système dynamique et est relié à la notion physique d'entropie. Les systèmes chaotiques sont ainsi d'entropie positive.

De nombreux travaux ont été faits pour calculer l'entropie des systèmes dynamiques usuels, nous renvoyons à Katok et Hasselblatt, et à Sinai pour de plus amples renseignements [51, 82]. Signalons que cette notion est un invariant global de certains systèmes dynamiques. Si on considère le décalage de Bernoulli défini sur un nombre fini de lettres, Ornstein a montré, dans les années 1970, que la connaissance de l'entropie métrique déterminait complètement ces systèmes [73]. Deux décalages de Bernoulli de même entropie sont ainsi métriquement conjugués.

On peut introduire une autre entropie : l'entropie topologique. Elle a été définie, par Adler, Konheim et Mc Andrew [4], pour un système dynamique dans lequel l'application est continue définie sur un compact. Nous allons maintenant donner les définitions de base de ces notions. Dans cette partie, on se donne un système dynamique dans lequel on fixe une tribu. Les notions suivantes dépendent de cette tribu.

### Entropie topologique

On suppose ici que  $T$  est continue, soit  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  deux recouvrements, on définit alors le recouvrement

$$\mathcal{U} \vee \mathcal{V} = \{U_i \cap V_j, \quad \forall \quad i, j\},$$

on note  $N(\mathcal{U})$  le nombre minimal d'éléments de  $\mathcal{U}$  nécessaires au recouvrement, et  $N_n(\mathcal{U})$

$$N_n(\mathcal{U}) = N(\mathcal{U} \vee \dots \vee T^{-n+1}\mathcal{U}).$$

L'entropie du recouvrement est donnée par :

$$h_{top}(\mathcal{U}) = \lim \frac{\log N_n(\mathcal{U})}{n}.$$

L'entropie topologique est alors définie par :

$$h_{top}(X, T) = \sup(h_{top}(\mathcal{U}), \quad \mathcal{U} \text{ recouvrement fini}).$$

### Entropie métrique

Soit  $(X, T, \mu)$  un système dynamique mesuré. Si  $P, Q$  sont deux partitions finies de  $X$ , on note  $P \vee Q$  la nouvelle partition définie comme précédemment. On note

$$H_\mu(P) = \sum_i -\mu(P_i) \log(\mu(P_i)),$$

on définit l'entropie conditionnelle de deux partitions  $\xi, \eta$ .

$$H(\xi|\eta) = \sum_j \mu(\eta_j) \sum_i \mu(\xi_i|\eta_j) \log \mu(\xi_i|\eta_j).$$

Cette entropie vérifie certaines propriétés, dont

$$H(\xi|\eta) = 0 \iff \xi \leq \eta.$$

$$H(\xi|\eta) \leq H(\xi),$$

$$H(\xi) = H(\eta) + H(\xi|\eta).$$

Avec ces propriétés, on voit que la limite suivante existe ; elle définit alors l'entropie de la partition

$$h_\mu(T, P) = \lim \frac{1}{n} H_\mu \left( \bigvee_{i=1}^{n-1} T^{-i} P \right).$$

On peut montrer qu'une définition équivalente est

$$h_\mu(T, P) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(P, \bigvee_{i=1}^n T^{-i} P).$$

Cette définition permet de voir que si le futur détermine le passé d'une trajectoire, alors l'application est d'entropie nulle.

L'entropie métrique est alors définie comme

$$h_\mu(X, T) = \sup_{P \text{ partition}} (h_\mu(P, T)).$$

**Définition 0.2.8.** Une partition mesurable finie  $a$  est dite *génératrice* si

$$\bigvee_{-\infty}^{+\infty} T^n a = \mathcal{A},$$

où  $\mathcal{A}$  est la partition par les boréliens de la mesure  $\mu$ , l'égalité étant  $\mu$  presque partout.

Si l'espace est un espace métrique compact, alors il suffit de montrer que le diamètre d'un élément de  $\bigvee_{-n}^n T^k a$  tend vers zéro. Le théorème principal qui permet de calculer l'entropie des systèmes dynamiques est le suivant :

**Théorème 0.2.9.** Si  $a$  est génératrice pour  $T$  et si  $H(a)$  est fini alors

$$h_\mu(T) = h_\mu(T, a).$$

Ces deux notions d'entropie sont reliées par le principe variationnel :

**Théorème 0.2.10.** Soit  $X$  un espace métrique compact, et  $T$  une application continue de  $X$  dans lui-même.

$$h_{top}(X, T) = \sup_{\substack{\mu \\ \text{ergodique}}} h_\mu(X, T).$$

Pour le billard, comme l'application n'est pas continue, on ne peut utiliser la définition de l'entropie topologique. Généralement, on considère l'entropie topologique du shift associé. L'application de premier retour du billard est d'entropie métrique nulle pour les polygones, et pour les polyèdres rationnels [47]. De plus, Sinai a montré que l'application du billard est aussi d'entropie métrique nulle par rapport à la mesure de Lebesgue [82]. Boldrighini, Keane et Marchetti ont une autre preuve de ce résultat [26].

### 0.2.3 Dynamique symbolique

Les notions présentes dans cette partie se retrouvent dans [61]. Une manière d'étudier un système dynamique est de coder l'orbite des points. Pour cela, on prend une partition finie  $\mathcal{P}$  de  $X$  et on code la trajectoire d'un point de la manière suivante : soit  $\Sigma = \{1..k\}$  et  $\mathcal{P} = \bigcup_{i=1}^k P_i$ , alors on définit une application  $\pi$  de  $X$  dans  $\Sigma$  par

$$\pi(x) = i \quad \text{si } x \in P_i.$$

L'orbite d'un point  $x$  devient une suite  $u$  à valeurs dans  $\Sigma$ .

$$\pi(T^n(x)) = u_n.$$

Ainsi le système  $(X, T)$  est semi conjugué à  $(U, S)$ , où  $S$  est l'application décalage, et  $U \subset \Sigma^{\mathbb{N}}$ .

$$S(u_n) = u_{n+1}.$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{S} & U \end{array}$$

**Définition 0.2.11.** *L'ensemble  $\Sigma$  est appelé l'alphabet, et  $u = (u_n) \in U$  un mot infini. Un mot de longueur  $n$  est un ensemble  $u_i \dots u_{i+n}$ .*

Pour que cette conjugaison soit utile, il faut que la partition  $\mathcal{P}$  ait de bonnes propriétés [51]. Si la partition vérifie de bonnes hypothèses (que nous ne détaillerons pas) alors la conjugaison  $\pi$  est une bijection sauf sur un ensemble de mesure nulle par rapport à  $\mu$ . Nous verrons que l'application  $\pi$  est presque une bijection pour la partition naturelle du billard [39].

L'étude de l'orbite d'un point se ramène ainsi à l'étude d'un mot infini. On introduit alors la notion de complexité.

**Définition 0.2.12.** *Soit  $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un mot infini, la complexité de  $u$  est une fonction*

$$p: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

*telle que  $p(n)$  égale le nombre de mots différents de longueur  $n$  de la suite  $u$ . Cette définition s'étend aussi aux langages.*

Comme la suite  $u$  est donnée par  $x$  et  $T$  il faudrait noter la complexité d'une suite par  $p(n, x, T)$ , mais dans la thèse on ne calculera des complexités que dans le cas où l'application est minimale. Dans ce cas la complexité ne dépend plus de la suite  $u$ . Ainsi on parlera de complexité du système dynamique.

L'exemple le plus significatif de calcul de complexité est celui des suites sturmiennes. On appelle suite sturmiennne, une suite symbolique de complexité  $n + 1$  [62]. On peut alors montrer que le système  $(X, T)$ , associé à  $u$ , est celui d'une rotation irrationnelle sur le cercle  $S^1$ . De plus, on sait que si une suite a une complexité inférieure à  $n + 1$  alors elle est ultimement périodique, [72] (voir section 0.4 pour les définitions).



## 0.3 Billard polyédral : Premiers outils

### 0.3.1 Définition

Soit  $P$  un polyèdre, le flot du billard dans  $P$  est défini ainsi : On considère le couple formé d'un point de  $P$  et d'une direction, on se déplace à partir du point dans la direction jusqu'à rencontrer un bord de  $P$  où la direction subit une réflexion suivant les lois de Descartes : c'est-à-dire que la composante normale du vecteur se transforme en son opposée, et sa composante tangentielle est inchangée. Le point se déplace alors sur la nouvelle droite, voir Figure 2. On peut alors regarder l'application de premier retour du flot sur le bord  $\partial P$  de  $P$ , on l'appelle application du billard, la définition reste valable dans un polygone ou dans un compact dont le bord est suffisamment régulier. La sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  sera notée  $S^2$ .

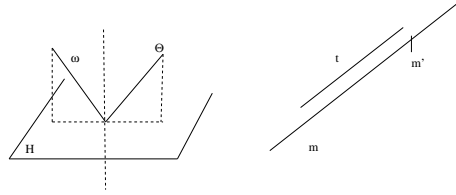


FIG. 2 – Réflexion d'une trajectoire de billard.

De manière plus précise, on a : une direction est un élément de  $S^2$ .

- On définit alors une relation d'équivalence sur  $\partial P \times S^2$  par :

Si  $m$  n'est pas sur une arête de  $P$  mais sur le bord,  $(m, \omega)$  et  $(m, \theta)$  sont équivalents si et seulement si la symétrie par rapport à la face qui contient  $m$  échange  $\omega$  et  $\theta$ .

Si  $m$  est sur une arête de  $P$ , tous les  $(m, \theta), \theta \in S^2$ , sont identifiés.

- Soit  $g_t$  le flot géodésique sur  $\mathbb{R}^3$ , c'est à dire  $g_t$  est une application de  $\mathbb{R}^3 \times S^2$  dans lui-même telle que

$$g_t(m, \omega) = (m', \omega),$$

où  $m, m'$  sont distants de  $t$  et sont sur une droite de direction  $\omega$ .

On définit alors l'application du billard par une application  $T$  de  $\partial P \times S^2 / \sim$  dans lui-même telle que :

$$T(m, \omega) = (g_{t_0}(m, \omega)_1, \theta),$$

avec  $t_0 = \min(t > 0 \mid g_t(m, \omega) \in \partial P \times S^2 / \sim)$  et  $\theta$  équivalent à  $\omega$ , le terme  $(m, \omega)_1$  signifie la première coordonnée du couple.

Il existe un deuxième système dynamique qui est sous-jacent à celui-ci et qui consiste à fixer la direction. Soit  $\omega$  un élément de  $S^2$ , on considère alors l'ensemble

$$M_\omega = (T^n(m, \omega), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad m \in \partial P).$$

Les ensembles  $M_\omega$  sont des variétés, elles partitionnent l'espace des paramètres, et elles sont toutes homéomorphes, sauf si la direction est parallèle à un côté du polygone, voir Zemlyakov et Katok pour le cas polygonal [93, 94].

**Définition 0.3.1.** Soit  $P$  un polyèdre, l'ensemble  $\partial P \times S^2$  est appelé espace des phases du billard dans  $P$ .

On définit alors le flot géodésique sur  $M_\omega$ . Il correspond au flot géodésique du billard avec direction fixée. Lorsqu'il est défini, on considère l'application de premier retour sur une partie  $I$  transverse au flot géodésique de  $M_\omega$ . On note cette application  $T_{\omega,I}$ , et on omettra  $I$  s'il n'y a pas risque de confusion.

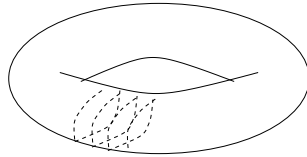


FIG. 3 – Flot linéaire sur  $M_\omega$ .

On connaît alors une mesure invariante pour chacun de nos systèmes dynamiques [66].

**Lemme 0.3.2.** Soit  $P$  un polyèdre,  $\lambda$  la mesure de Lebesgue sur  $\partial P$  et  $\psi$  la mesure de probabilité canonique sur  $S^2$ , alors on a :

*Le flot du billard sur  $P$  admet  $d\lambda d\psi$  comme mesure invariante.*

*Le flot géodésique sur  $M_\omega$  admet la mesure de Lebesgue comme mesure invariante.*

### 0.3.2 Dépliage

Un des outils les plus utilisés, bien qu'il soit le plus simple, est le dépliage. On remarque la chose suivante : au lieu de réfléchir la direction par rapport au côté du polygone, on peut réfléchir le polygone par rapport à ce côté, et poursuivre la trajectoire sur la droite initiale. Le dépliage dépendra alors de la trajectoire considérée. Cette méthode nous sera utile de nombreuses fois.

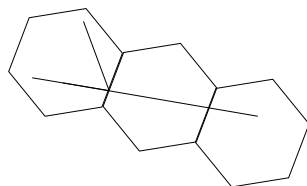


FIG. 4 – Dépliage.

### 0.3.3 Coordonnées dans le cas polygonal

Nous allons donner des coordonnées à l'application du billard dans lesquelles nous pourrions obtenir une expression d'une mesure invariante. Tout d'abord, définissons les coordonnées. Soit  $(m, \theta)$  un point de l'espace de phase. On fixe un point du bord (généralement

un sommet de  $P$ ) et soit  $x$  la longueur suivant le bord de  $P$  entre le sommet et  $m$ . L'angle  $\theta$  est défini comme l'angle entre la direction et le côté contenant  $m$ . On peut alors montrer le lemme suivant, valable pour toute table de billard en dimension deux.

**Lemme 0.3.3.** *Dans ces coordonnées, la mesure  $\sin\theta d\theta dx$  est invariante pour l'application de billard.*

*Démonstration:* On introduit le point  $(x, \theta)$  et son image  $(x_1, \theta_1)$ , soit  $l(x, x_1)$  la longueur du segment  $[x; x_1]$ . On considère alors le point  $x + \varepsilon$ . Alors dans le triangle on a

$$l(x + \varepsilon, x_1)^2 = l(x, x_1)^2 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon.l(x, x_1)\cos\theta.$$

En faisant un développement limité à l'ordre un, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial x} &= -\cos\theta, \\ \frac{\partial l}{\partial x_1} &= \cos\theta_1.\end{aligned}$$

Ainsi la différentielle de  $l$  est donnée par  $dl = -\cos\theta dx + \cos\theta_1 dx_1$ . On utilise alors que  $d^2l = 0$ , et on obtient

$$\sin\theta dx \wedge d\theta = \sin\theta_1 dx_1 \wedge d\theta_1.$$

Cela implique que cette 2 – forme est invariante : comme on est en dimension deux, on en déduit le résultat.  $\square$

Katok a introduit des coordonnées proches [55] qui lui permettent d'obtenir.

**Lemme 0.3.4.** *L'application du billard polygonal peut s'écrire localement*

$$T(s, \theta) = (s + h(\theta), a\theta + b),$$

où on pose  $s = x \sin\theta$ .

*Démonstration:* Dans ces coordonnées, la mesure invariante est  $ds d\theta$  par le lemme précédent. On considère alors les deux points  $(m, \theta), (m_0, \theta)$ . S'ils sont assez proches, ils intersectent le même côté du polygone, donc l'image de la direction est la même pour les deux points. Appelons  $s, s_0$  les premières coordonnées des deux points. On va calculer  $s' - s'_0$  où  $s'$  est la coordonnée de l'image de  $m$ . Appelons  $\alpha$  l'angle entre les deux côtés concernés du polygone. On a alors avec les notations de la figure 5 :

$$\begin{aligned}\frac{CD}{AB} &= \frac{OC}{OA}, \\ \frac{OC}{OA} &= \frac{\sin\theta}{\sin(\theta - \alpha)}.\end{aligned}$$

Soit

$$x' - x'_0 = \frac{x - x_0}{\sin(\theta - \alpha)} \sin\theta,$$

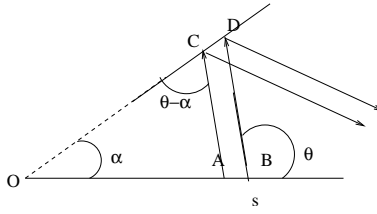


FIG. 5 – Géométrie.

$$x' - x'_0 = \frac{s - s_0}{\sin(\theta - \alpha)},$$

$$s' - s'_0 = s - s_0.$$

On obtient alors, en fixant  $s_0$ , comme expression :  $s' = s + s'_0 - s_0 = s + h(\theta)$ .

L'image de la direction s'obtient en faisant agir une isométrie. Ceci prouve bien que le billard dans ces coordonnées s'écrit localement

$$(s, \theta) \longrightarrow (s + h(\theta), g.\theta).$$

Le terme  $g\theta$  correspond à la nouvelle direction. C'est l'action, sur la direction  $\theta$ , de la réflexion orthogonale par rapport à la face rencontrée. Ainsi, après plusieurs étapes, la nouvelle direction est obtenue par l'action de la composée de plusieurs réflexions orthogonales. C'est pourquoi l'on introduit le groupe  $G$ , voir définition 0.3.6.  $\square$

**Remarque 0.3.5.** *En fait, si on utilise le dépliage, on s'aperçoit que le premier terme correspond à une projection parallèlement à la direction de départ. Cela nous donnera, au paragraphe suivant, une méthode pour avoir une mesure invariante.*

Comme corollaire, on peut donner la forme de l'application de premier retour sur une partie. Pour que cette application soit définie, on se restreint aux billards rationnels qui sont de mesure totale finie.

**Définition 0.3.6.** *Un polygone est dit rationnel si et seulement si le groupe linéaire généré par les réflexions orthogonales par rapport aux côtés est fini.*

Cette définition s'étend en dimension quelconque. Pour les polygones simplement connexes, elle est équivalente au fait que les angles sont des multiples rationnels de  $\pi$ .

**Corollaire 0.3.7.** *Dans un polygone rationnel  $P$ , soit  $I$  un intervalle de  $\partial P$  et  $\omega$  une direction fixe. L'application  $T_\omega$  de premier retour du flot du billard sur  $I \times \omega$  est une isométrie par morceaux, (voir définition 0.6.1).*

La preuve découle immédiatement de la démonstration du lemme précédent car  $\theta' = \theta$ .

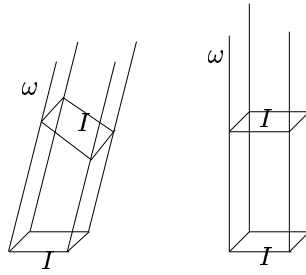


FIG. 6 – Premier retour.

### 0.3.4 Coordonnées pour le cas polyédral

Tout d'abord, remarquons le point suivant :

**Remarque 0.3.8.** *Le corollaire précédent est vrai pour tout intervalle  $I$ . Pour les polyèdres, l'application n'est pas une isométrie euclidienne. Mais on pourrait introduire des coordonnées  $(x \sin \theta_1, y \sin \theta_2)$  qui réduiraient ce problème.*

On peut alors montrer un résultat analogue à la dimension deux [47].

**Lemme 0.3.9.** *Pour un polyèdre rationnel, l'application de premier retour  $T_{\omega, I}$  est un échange affine de polygones. Si la partie  $I$  est incluse dans un plan orthogonal à la direction, alors on a localement une isométrie.*

Si la partie  $I$  est orthogonale à la direction, la figure 6 et le dépliage convainquent du caractère isométrique de  $T_{\omega, I}$ . Sinon l'orbite d'un point sous cette application est une ellipse, dans un repère orthonormé. Mais les coordonnées précédentes éludent en partie ce problème.

Remarquons, pour finir, que le calcul de la mesure invariante ne se fait plus avec les formes différentielles. Dans le cas des polygones, on calculait une 2 – forme invariante car on était en dimension deux, ici il faudrait avoir une 4 – forme mais la donnée d'une 2 – forme est inutile.

### 0.3.5 Théorèmes ergodiques

Nous allons reprendre la méthode de dépliage précédemment citée. Si on regarde l'exemple du carré, on remarque qu'il suffit de déplier jusqu'à obtention de quatre carrés. Le billard dans le carré se ramène alors à une rotation sur le tore  $\mathbb{T}^2$ , voir le dépliage. De même, le billard dans le triangle équilatéral se ramène à un flot géodésique sur un tore obtenu par identification de côtés opposés parallèles, voir Figure 7. On peut alors se demander pour quels polygones cette propriété est encore vraie. On obtient les polygones rationnels. Dans un tel polygone, le dépliage d'un nombre fini de copies de  $P$  permet de ramener l'étude du billard à celle du flot géodésique sur une surface de translation, obtenue par identification des côtés opposés parallèles d'un polygone régulier. On retrouve alors la surface  $M_\omega$ . L'étude de ces billards rationnels s'est donc développée. Tout d'abord, on s'est intéressé aux directions

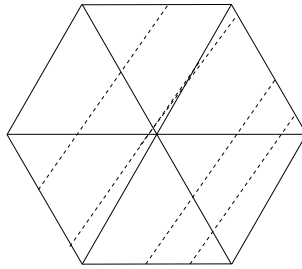


FIG. 7 – Flot linéaire.

minimales. Boldrighni, Keane et Marchetti ont alors montré, qu'à l'exception d'un ensemble dénombrable, toute direction était minimale (le billard dans cette direction est un système minimal), [26]. Les directions non minimales sont les directions qui relient deux sommets du polygone. Elles sont appelées connections de selle, ou diagonales généralisées. Le premier résultat ergodique est alors dû à Katok, [51].

**Théorème 0.3.10 (Katok).** *Le flot géodésique sur une surface de translation, de genre  $g > 1$  a au plus  $g$  mesures ergodiques.*

Le fait que les surfaces soient obtenues par identification des côtés opposés par translation, permet de munir ces surfaces d'une structure complexe (une 1 – forme holomorphe). La théorie de Teichmüller [22] est alors d'un grand recours et permet d'obtenir un important théorème ergodique sur les billards, [58]. Le problème est que les surfaces de translations obtenues, à partir de billard, sont de mesure nulle dans l'ensemble des surfaces de translation. Ainsi, si on veut déduire un résultat sur les billards à partir des surfaces, on est obligé d'avoir un résultat valable partout.

**Théorème 0.3.11 (Kerckhoff, Masur, Smilie).** *Pour toute surface de translation, pour presque toute direction  $\omega$ , le flot du billard dans la direction  $\omega$  est ergodique.*

Ce résultat est à lier au théorème suivant sur les échanges d'intervalles démontré indépendamment par Masur et Veech [64, 87].

**Théorème 0.3.12 (Masur, Veech).** *Pour toute permutation, non triviale, presque tout échange d'intervalles est uniquement ergodique.*

**Théorème 0.3.13 (Kerckhoff, Masur, Smilie).** *Pour tout entier  $k$  supérieur à trois, il existe un  $G_\delta$  dense de polygones à  $k$  sommets tels que le billard dans ces polygones soit uniquement ergodique.*

Ce premier résultat, bien que très satisfaisant, ne donne pas d'exemple de billard ergodique. Il faut attendre les résultats de Vorobets pour obtenir des exemples qui restent très techniques, [91].

Le progrès suivant est dû à Veech. Il définit une classe de polygones dans laquelle le billard directionnel se comporte comme dans le carré, c'est-à-dire que toute direction est soit uniquement ergodique soit périodique. Ces polygones sont appelés polygones de Veech,

[88, 89]. Pour cette classe, on connaît des exemples. Ainsi, tous les triangles rectangles avec un angle de la forme  $\frac{\pi}{n}$  sont des polygones de Veech.

Il est à noter que le théorème de Kerckhoff, Masur et Smilie utilise le théorème de Katok et que le théorème de Veech utilise un lemme important (dit lemme de Masur) du théorème de Kerckhoff, Masur et Smilie. Bien sûr, le billard dans un polygone rationnel ne peut pas être ergodique, vu que l'image d'une direction ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Par contre, on peut comprendre la dynamique de  $T_\omega$  dans ce cas. Les travaux de Masur et Veech, initiés par ceux de Rauzy [64, 57, 87] ont ainsi montré que presque tout échange d'intervalles était uniquement ergodique.

En dimension trois rien n'est connu. Cela est dû au fait que le même procédé associe à un polyèdre une trois-variété. De fait, il n'y a pas de structure complexe, et la théorie de Teichmüller n'existe pas. De plus, les polygones rationnels sont denses dans l'espace des polygones (en fixant le nombre de sommets). Mais ce n'est plus le cas pour les polyèdres rationnels [29]. Ainsi, l'étude des polyèdres rationnels semble moins intéressante.

• **Autres résultats.**

Pour finir ce paragraphe, remarquons que la méthode de dépliage permet de résoudre un problème plus ludique. On considère un billard carré avec deux billes (points en fait) dont l'une est fixe. Combien faut-il placer de trous (points) dans l'intérieur pour empêcher la première bille de rencontrer la deuxième? Ceci rentre dans les problèmes de blocage [79, 53, 69, 71, 70, 46]. Un polygone a la propriété de blocage s'il existe un nombre fini de points  $P_i$ , tels qu'il existe deux points qui ne peuvent être reliés par une trajectoire de billard sans passer par les points  $P_i$ . Le dépliage permet de montrer que le carré est bloquant. Ceci a été généralisé depuis aux polygones de Veech [69], et permet d'avoir des résultats fins sur la pure périodicité dans ces tables [71].

## 0.4 Complexité

### 0.4.1 Rappels

La première propriété de la fonction de complexité est la suivante [77].

**Lemme 0.4.1.** *Si  $u$  est une suite non ultimement périodique, alors*

$$p(n, u) \geq n + 1.$$

*S'il existe  $n$  tel que  $p(n, u) = n$ , alors  $u$  est ultimement périodique.*

Les suites non périodiques de complexité minimale sont appelées suites sturmiennes, en référence à Charles Sturm. La première apparition remonte à l'article de Morse et Hedlund [72], [62] dans lequel ils étudient l'équation différentielle

$$y'' + \phi(x)y = 0,$$

et les zéros d'une solution. Ils supposent  $\phi$  continue de période 1, et si on note  $k_n$  le nombre de zéros dans l'intervalle  $[n, n + 1[$  ils étudient alors les propriétés de la suite  $01^{k_0}0^{k_1}0^{k_2} \dots$ . Ils montrent qu'elle est soit ultimement périodique soit sturmiennne.

De manière plus géométrique on a :

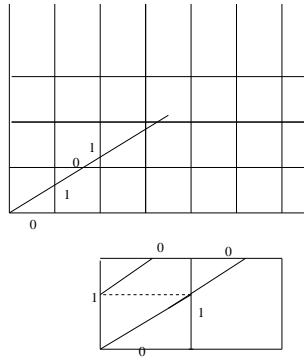


FIG. 8 – Rotations.

**Théorème 0.4.2 (Morse, Hedlund).** *Soit  $u$  une suite sturmiennne définie sur l’alphabet  $\{1, 2\}$ . Il existe alors un unique couple  $(\alpha, x)$  appartenant à l’ensemble  $]0; 1[ \times ]0; 1[$  tel que :*  
*soit*

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n = 1 \Leftrightarrow \{x + n\alpha\} \in [0; 1 - \alpha[),$$

*soit*

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u_n = 2 \Leftrightarrow \{x + n\alpha\} \in ]0; 1 - \alpha]),$$

Ce résultat signifie qu’une suite sturmiennne peut toujours se représenter par une rotation. De manière réciproque, si on se donne une rotation d’angle fixe, on peut en déduire une suite sturmiennne :

On étudie les intersections d’une droite partant de 0, de pente irrationnelle  $\alpha$ , avec le maillage du réseau  $\mathbb{Z}^2$ . On note alors un 1 si la droite rencontre un segment vertical, et un 2 si la droite rencontre un segment horizontal. Le mot infini sur l’alphabet  $\{0, 1\}$  obtenu est une suite sturmiennne. On peut remarquer que cette trajectoire est en fait une rotation du tore  $\mathbb{T}^2$ . Ainsi, on dit qu’une suite sturmiennne représente une rotation de pente irrationnelle. En fait la connaissance du développement en fractions continues de la pente permet de retrouver la suite [5, 8]. De nombreux travaux ont été fait sur ce sujet et sur des généralisations aux échanges de trois intervalles, citons seulement [2].

D’un point de vue dynamique, la complexité est reliée à l’entropie topologique du sous-shift associé à une suite symbolique par la formule  $h_{top} = \lim_{+\infty} \frac{\log p(n)}{n}$ . Ainsi, la complexité est une notion plus fine que l’entropie topologique. Elle permet de classifier les systèmes d’entropie nulle. En effet, son ordre de grandeur est un invariant topologique [77].

D’un point de vue combinatoire, il existe plusieurs outils pour étudier la complexité d’une suite. Les graphes de Rauzy, généralisation des graphes de De Bruijn, sont un outil particulièrement utile si l’on veut étudier des suites de complexité sous-linéaire. Cet outil permet de caractériser les suites de complexité  $2n + 1$  qui vérifient une certaine relation, ces suites sont appelées suites d’Arnoux, Rauzy [8]. Dans la même direction, Aberkane a pu caractériser les suites de complexité vérifiant  $\lim_{+\infty} \frac{p(n)}{n} = 2$  [1]. De plus, les graphes ont permis à Heinis de montrer que si  $\frac{p(n)}{n}$  a une limite, alors cette limite ne peut appartenir à



l'intervalle  $]1; 2[$  [52]. Signalons pour finir ce paragraphe que les graphes de Rauzy servent aussi dans le cadre des fractales de Rauzy et de la  $\beta$ -numération [21].

## 0.4.2 Billard

Un codage naturel du billard consiste à associer une lettre à chaque face du polyèdre. Dans le cas du cube une exception apparaît du fait de la symétrie, et on utilise simplement trois lettres en codant les faces parallèles par la même lettre. On veut étudier la complexité des deux systèmes dynamiques associés au billard dans  $P$ .

- Complexité directionnelle.

Comme on se limite à des directions telles que  $T_\omega$  est minimale, la complexité ne dépend plus de la suite  $u$  mais uniquement de  $T_\omega$ , c'est pourquoi on la note  $p(n, \omega)$ . Dans le cas des polygones, le résultat est connu pour une large classe de polygones : les polygones rationnels. Hubert a obtenu la complexité de  $T_\omega$  dans [54]. Le fait surprenant est qu'elle ne dépende pas de la direction  $\omega$ . On appelle direction irrationnelle une direction qui ne relie pas deux sommets du polygone.

**Théorème 0.4.3 (Hubert).** *Soit  $P$  un polygone rationnel à  $k$  côtés, dont les angles valent  $\frac{p_i\pi}{q_i}$ . Soit  $r$  le plus petit multiple commun aux entiers  $q_i$ , et soit  $\omega$  une direction irrationnelle du billard dans  $P$ . Alors il existe un entier  $n_0$  tel que pour tout entier  $n > n_0$  on ait*

$$p(n, \omega) = (k - 2)rn + 2.$$

Par contre, on ne sait pas calculer cette complexité pour un polygone irrationnel. On peut juste obtenir une majoration en fonction du nombre d'angles irrationnels du polygone [48].

En ce qui concerne les polyèdres, le calcul a été fait pour le cube codé par trois lettres. Ce résultat fait suite à une conjecture de Rauzy [80], [6], [7].

**Théorème 0.4.4 (Arnoux, Mauduit, Shiokawa, Tamura).** *Soit  $\omega \in \mathbb{R}^3$  tel que  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  soient  $\mathbb{Q}$  indépendants, alors la complexité  $p(n, \omega)$  vaut*

$$p(n, \omega) = n^2 + n + 1.$$

Il a été généralisé au cas de l'hypercube de  $\mathbb{R}^n$  par Baryshnikov [12]. D'ailleurs, sa preuve consiste à montrer que cette complexité ne dépend pas de la direction.

**Théorème 0.4.5 (Baryshnikov).** *Soit  $\omega$  un élément de  $\mathbb{R}^{s+1}$ , tel que  $(\omega_i)$  soient  $\mathbb{Q}$ -indépendants, et tels que  $(\omega_i^{-1})$  soient aussi  $\mathbb{Q}$ -indépendants, alors on a*

$$p(n, \omega) = \sum_{i=0}^{\min(s,n)} \binom{s}{i} \binom{n}{i} i!.$$

- Complexité globale.

Le premier résultat consiste en l'expression de la complexité globale du billard dans un carré codé par deux lettres. Cela revient à considérer le langage formé de tous les mots sturmiens sur un alphabet à deux lettres, et à calculer sa complexité. Le calcul a été fait indépendamment par Mignosi et par Berstel et Pocchiola [68, 23].

**Théorème 0.4.6 (Mignosi ; Berstel, Pocchiola).** *La complexité globale du billard dans le carré codé par deux lettres vaut*

$$p(n) = 1 + \sum_{i=1}^n (n+1-i)\phi(i).$$

La complexité s'exprime en fonction de l'indicatrice d'Euler, ce qui permet d'obtenir une propriété combinatoire équivalente à l'hypothèse de Riemann.

Pour les polygones, le résultat essentiel est dû à Cassaigne, Hubert et Troubetzkoy [34].

**Définition 0.4.7.** *On appelle diagonale généralisée une trajectoire qui part d'un sommet et aboutit à un sommet. La longueur du mot associé est appelée la longueur de la diagonale. On note  $N(n)$  le nombre de diagonales de longueur inférieure ou égale à  $n$ .*

**Théorème 0.4.8 (Cassaigne, Hubert, Troubetzkoy).** *Soit  $P$  un polygone convexe, alors on a pour tout entier  $n$*

$$p(n) = \sum_{i=0}^n N(i).$$

Ils relient la complexité au nombre de diagonales généralisées de longueur combinatoire donnée. Ils obtiennent alors comme corollaire que la complexité d'un polygone rationnel convexe est de l'ordre de  $n^3$ , en utilisant un résultat important de Masur [65].

**Corollaire 0.4.9.** *Pour tout polygone rationnel convexe, il existe deux constantes  $a, b$  telles que*

$$a \leq \frac{p(n)}{n^3} \leq b.$$

**Théorème 0.4.10 (Masur).** *Soit  $P$  un polygone rationnel, alors il existe  $a, b > 0$  tels que pour tout  $i$*

$$a \leq \frac{N(i)}{i^2} \leq b.$$

Ce résultat utilise des résultats importants d'analyse harmonique et d'algèbre de Lie. Il est lié à la formule de Siegel, Veech et, dans certains cas, on peut obtenir des asymptotiques à ces quantités [38, 37].

Pour étudier la complexité, on définit les notions suivantes : L'ensemble des suites est appelé le langage  $\mathcal{L}(n)$ , on définit alors les trois quantités :

$$\begin{aligned} m_r(v) &= \text{card}\{a \in \Sigma; va \in \mathcal{L}(n+1)\}, \\ m_l(v) &= \text{card}\{b \in \Sigma; bv \in \mathcal{L}(n+1)\}, \\ m_b(v) &= \text{card}\{a, b \in \Sigma; bva \in \mathcal{L}(n+2)\}, \end{aligned}$$

puis on pose :

**Définition 0.4.11.** *Un mot  $v$  est dit spécial à gauche (resp droite) si  $m_l(v)$  (resp  $m_r(v)$ ) est strictement supérieur à  $un$ .*

*Il est dit bispécial, s'il est à la fois spécial à droite et à gauche.*

Le point important est qu'on peut relier la complexité du langage à ces nombres : si on appelle  $s(n)$  la quantité  $p(n+1) - p(n)$ , on a (voir [33]) :

**Proposition 0.4.12 (Cassaigne).** *Si le langage vérifie que tout mot est prolongeable à droite et à gauche, alors on a*

$$s(n) = \sum_v (m_r(v) - 1),$$

$$s(n+1) - s(n) = \sum_{v \in BL(n)} (m_b(v) - m_r(v) - m_l(v) + 1),$$

où  $BL(n)$  représente l'ensemble des mots bispéciaux de longueur  $n$ .

Cette proposition se révèle fort utile lorsque la complexité n'est plus linéaire en  $n$ .

Pour finir ce paragraphe, il faut remarquer que la complexité peut donner des renseignements sur l'ergodicité d'une application, grâce au théorème de Boshernitzan [27].

**Théorème 0.4.13 (Boshernitzan).** *Soit  $(u, \mathcal{A}, \mu, S)$  un système symbolique (sous-shift) tel que*

$$p(n, u) \leq kn,$$

*alors le système comporte au plus  $k - 1$  mesures ergodiques.*

Pour voir l'importance de ce résultat, remarquons qu'il implique que les systèmes d'Arnoux, Rauzy sont uniquement ergodiques.

### 0.4.3 Résultats

Pour certains polyèdres on obtient alors le théorème suivant, voir le théorème 1.4.6.

**Théorème 0.4.14 ([13]).** *• Soit un cube de  $\mathbb{R}^3$  codé par trois lettres, et  $\omega$  un élément de  $\mathbb{R}^3$ , qui vérifie*

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ sont } \mathbb{Q} \text{ indépendants,}$$

$$\omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}, \omega_3^{-1} \text{ sont } \mathbb{Q} \text{ indépendants,}$$

*alors on a*

$$p(n, \omega) = n^2 + n + 1.$$

*• Pour un prisme droit à base de polygone régulier pavant le plan et pour une direction  $\omega$  minimale et IDOC2 (voir la définition au Chapitre 1), il existe  $a, b$  strictement positifs tel que*

$$a \leq \frac{p(n, \omega)}{n^2} \leq b.$$

La première partie était connue grâce aux travaux de Arnoux, Mauduit, Shiokawa et Tamura, mais une légère erreur subsistait. Les quatre preuves [13, 6, 7, 12] sont de nature différente.

Au cours de la démonstration, on obtient une nouvelle preuve du résultat de Cassaigne, Hubert et Troubetzkoy, preuve qui s'étend au cas des polygones non convexes.

**Proposition 0.4.15 ([13]).** *Pour un polygone rationnel non convexe de  $\mathbb{R}^2$ , il existe  $a > b$  tels que*

$$b \leq \frac{p(n)}{n^3} \leq a.$$

On obtient alors au chapitre deux le résultat suivant, voir le corollaire 2.2.2

**Théorème 0.4.16 ([15]).** *Si on code le cube de  $\mathbb{R}^3$  par six lettres, il existe deux constantes  $a, b$  telles que pour tout entier  $n$*

$$a \leq \frac{p(n)}{n^4} \leq bn^2.$$

On obtient alors, au chapitre trois, un résultat valable pour tout polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^3$ .

**Théorème 0.4.17 ([17]).** *Dans tout polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^3$  on a  $h_{top}(T) = 0$ .*

## 0.5 Trajectoires périodiques

### 0.5.1 Historique

Une des premières études du billard remonte au dix-huitième siècle, lorsque Fagnano décrivit une orbite périodique dans un triangle aigu. En fait, il cherchait à minimiser la quantité  $MA^2 + MB^2 + MC^2$  lorsque  $M$  varie dans l'intérieur du triangle  $ABC$ . Il remarqua alors que les pieds des hauteurs d'un triangle aigu forment une trajectoire de billard (le résultat n'était pas énoncé en ces termes). Il est à noter que ce résultat est encore optimal, car on ne sait toujours pas si un triangle obtus générique contient une orbite périodique. D'ailleurs, on peut démontrer l'existence de cette trajectoire périodique, en minimisant la quantité précédente. Il faut d'abord montrer que le minimum est une trajectoire de billard, puis que ce minimum est bien atteint. C'est ce deuxième point qui pose problème dans le cas du triangle obtus, voir [18, 19] pour la démonstration. De manière générale, ce minimum est soit une trajectoire périodique soit une trajectoire rencontrant une singularité [86].

Pour obtenir des résultats différents sur les orbites périodiques, d'autres outils sont nécessaires. Ainsi, le Lemme de Poincaré permet à Galperin, Stepin et Vorobets [41] de prouver que, dans tout polygone rationnel, il existe une orbite périodique. Ils considèrent pour cela une direction perpendiculaire à un côté du polygone. Ils prouvent même qu'il n'y a qu'un nombre fini de points qui ne sont pas périodiques; ce résultat ayant d'ailleurs été trouvé indépendamment par Boshernitzan [28]. Quelques années plus tard Cipra, Hanson et Kolan étudient le cas d'un triangle rectangle quelconque, et prouvent que presque toute trajectoire perpendiculaire au côté est périodique [35]. Ce résultat a d'ailleurs été retrouvé et amélioré par Gutkin et Troubetzkoy puis par Schmeling et Troubetzkoy dans [48, 81]. Ils montrent alors :

**Théorème 0.5.1 (Schmeling, Troubetzkoy).** *Dans un triangle rectangle, l'ensemble des points  $\mathcal{F}_\theta$  dont l'orbite ne revient pas dans la direction  $\theta$  est de dimension de Hausdorff au plus  $\frac{1}{2}$ .*

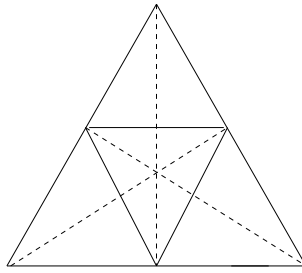


FIG. 9 – Trajectoire périodique.

L'étude des trajectoires périodiques intéresse d'ailleurs aussi les physiciens. En effet, Glashow et Mittag [42] prouvent que le système dynamique consistant en trois masses se déplaçant sur un cercle est équivalent au système dynamique du billard dans un triangle. Ils retrouvent alors le résultat de Fagnano. Il faut d'ailleurs noter que le fait d'avoir un triangle obtus est équivalent au fait que les trois masses soient négatives. De plus, ceci peut être adapté en dimension quelconque.

**Proposition 0.5.2.** *Le système dynamique constitué de  $n$  boules de masses non nulles sur un cercle est conjugué à une bille de billard se déplaçant dans un simplexe de  $\mathbb{R}^n$ .*

Ainsi de nombreux articles, écrits par des physiciens, traitent de ces problèmes, citons par exemple [78]. Ils essayent d'obtenir des propriétés d'ergodicité, de mélange topologique.

Un autre type de résultats sur les trajectoires périodiques concerne la stabilité de ces trajectoires. La question est la suivante : si un mot est périodique dans un polygone donné, (c'est-à-dire s'il existe un point et une direction tels que l'orbite de ce couple décrive une trajectoire périodique de codage le mot considéré) que se passe-t-il dans un polygone dont les angles et les sommets sont proches du premier ? Galperin, Stepin et Vorobets donnent une condition nécessaire et suffisante, en termes de codage symbolique [41].

**Théorème 0.5.3 (Galperin, Stepin, Vorobets).** *Le mot  $v = v_1..v_{2n}$  est stable si et seulement si  $\sum_1^{2n} (-1)^i v_i = 0$ .*

Ce résultat leur permet d'obtenir que tout mot de longueur paire, dans un polygone dont les angles sont rationnellement indépendants, est stable. Ceci implique que dans presque tout polygone, tout mot est stable. De plus, ils obtiennent des résultats partiels concernant les trajectoires périodiques dans un triangle obtus. En effet, il suffit d'avoir l'existence de trajectoire périodique stable dans un triangle rectangle, pour en déduire l'existence de trajectoire périodique dans un ouvert de l'ensemble des triangles obtus.

Il est à noter que l'on peut très bien avoir des trajectoires qui ne sont ni denses dans le polygone ni périodiques, voir un exemple dans [40]. Ceci est relié à la pure périodicité déjà abordée dans le cadre des propriétés de blocage.

## 0.5.2 Longueur des trajectoires

Mac Mullen a étudié les trajectoires périodiques [67], et il obtient une borne inférieure pour la longueur d'une telle trajectoire. Plus précisément, si on considère un polyèdre dont le groupe  $G$  est engendré par  $s_i, i = 1..d$ , on dit que  $g \in G$  est essentiel s'il n'appartient à aucun sous groupe engendré par une sous famille des  $s_i$ . Il montre alors que la longueur d'une trajectoire périodique associée à l'élément  $g \in G$  (de codage  $g$ ) essentiel est minorée pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_d$  par la longueur d'une trajectoire périodique, associée à l'élément de  $G$ ,  $s_{\sigma(1)} \dots s_{\sigma(d)}$ .

Par exemple pour le triangle ou le tétraèdre, la longueur minimale est celle obtenue pour l'orbite de Fagnano. Il n'est pas connu si cette borne est toujours atteinte. C'est vérifié dans le cas du tétraèdre et du cube comme nous allons le voir.

**Notation** : pour tout entier  $n \geq 2$ , on appelle mot de Fagnano le mot qui code la trajectoire de billard qui passe une et une seule fois par toutes les faces du simplexe de  $\mathbb{R}^n$ .

## 0.5.3 Résultats

On veut maintenant généraliser les résultats aux cas des polyèdres. Si  $v$  est un mot, on note  $S_v$  la matrice

$$S_{v_0} \cdot S_{v_{n-1}} \cdot S_{v_{n-2}} \dots S_{v_1}$$

où  $S_{v_i}$  représente la matrice de la réflexion par rapport à la face codée par la lettre  $v_i$ . On obtient alors, voir théorème 4.4.6.

**Théorème 0.5.4 ([14]).** *Soit  $P$  un polyèdre et  $v$  un mot périodique.*

*Si  $v$  est de longueur paire, et si  $S_v$  est différent de l'identité alors  $v$  est stable.*

*Si  $v$  est de longueur impaire, alors  $S_v$  est une réflexion.*

**Remarque 0.5.5.** Vorobets [92] a récemment obtenu la réciproque de ce théorème.

**Proposition 0.5.6 ([14]).** *Soit  $ABCD$  un tétraèdre régulier, alors dans un voisinage de  $ABCD$  tous les tétraèdres admettent le mot  $abcd$  (et ses permutés  $adbc, acbd, acdb$ ) comme mot périodique.*

Si on se donne un mot  $v$  dans le codage du billard, on peut se demander quels sont les points qui ont pour codage ce point, ainsi on définit

$$\sigma_v = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \overline{T^{-n} d_{v_n}}.$$

La démonstration précédente permet d'exhiber l'exemple suivant en prenant le tétraèdre.

**Proposition 0.5.7 ([14]).** *Il existe un billard et un mot périodique  $v$  associé à ce langage, de période paire tel qu'un seul point de  $\sigma_v$  soit périodique.*

## 0.6 Isométries par morceaux

Grâce à la remarque 0.3.8 on sait que l'application de premier retour du flot du billard sur une partie transverse est une isométrie par morceaux, ainsi il est naturel de s'intéresser à cette classe d'applications.

**Définition 0.6.1.** *Une isométrie par morceaux est une application bijective de  $\mathbb{R}^n$  dans lui-même, définie sur une union finie de polytopes, de telle sorte que restreinte à chacun de ces polytopes elle soit égale à une isométrie.*

L'exemple le plus étudié est le cas des échanges d'intervalles.

### 0.6.1 Échange d'intervalles

On considère une application de  $[0, 1]$  dans lui-même, définie de la manière suivante. On partitionne l'intervalle en un nombre fini d'intervalles, et sur chaque intervalle l'application est une translation telle que l'image des intervalles forme une partition de  $[0, 1]$ . Ainsi, un échange de  $k$  intervalles est donné par une permutation de  $k$  éléments et par  $k$  nombres réels qui sont les longueurs des intervalles de la partition. Dans la suite, on fixe la permutation et on regarde l'ensemble des échanges d'intervalles muni de cette permutation. Cet ensemble est muni de la mesure de Lebesgue.

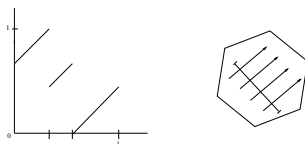


FIG. 10 – Échanges d'intervalles et billard.

Cette transformation est reliée au billard dans un polygone rationnel, puisque l'application de premier retour du flot géodésique d'une surface de translation sur un intervalle transverse est un échange d'intervalles. Ainsi, on peut retrouver de nombreuses propriétés du billard grâce à cette transformation.

Par exemple, Keane a donné une condition suffisante de minimalité sur les paramètres d'un échange d'intervalles, [56, 26]. Ainsi, on déduit qu'à l'exception d'un ensemble dénombrable, toute direction est minimale dans un polygone rationnel.

On sait depuis les travaux de Masur et Veech que presque tout échange d'intervalles est uniquement ergodique [87]. Par contre, un résultat métrique (presque partout) sur les échanges d'intervalles ne peut pas donner de résultat sur le billard, car l'ensemble des échanges d'intervalles obtenus par un billard est de mesure nulle.

Par contre, on ne peut directement obtenir le résultat sur la complexité du billard, à partir de la complexité d'un échange d'intervalles (qui est linéaire). En effet, l'application de premier retour du flot géodésique est bien un échange d'intervalles, mais on ne connaît pas a priori le nombre d'intervalles. On obtient quand même une borne supérieure.

## 0.6.2 Échange de polygones

Un échange d'intervalles est une isométrie positive par morceaux de l'intervalle dans lui-même, et bijective. On peut définir une application qui généralise ce type d'applications. Ce sont les isométries par morceaux.

Beaucoup moins de choses sont connues à ce sujet. Le premier résultat concerne leur entropie. Il a été trouvé par Gutkin et Haydn [47] en dimension deux, avant d'être généralisé par Buzzi [32].

**Théorème 0.6.2 (Buzzi).** *Toute isométrie par morceaux de  $\mathbb{R}^n$  est d'entropie nulle.*

Il est à noter que dans ce théorème l'application n'est pas nécessairement bijective ni définie sur un compact.

Même la question de la minimalité n'a pas été réglée. On connaît une condition nécessaire, mais en pratique, elle est peu maniable [49]. Haller reprend la démonstration de Keane sur la minimalité des échanges d'intervalles, mais il est obligé de rajouter une condition de temps de retour borné. Cette condition découlait directement des autres propriétés dans le cas des échanges d'intervalles. En deux dimensions ce n'est plus le cas comme on peut le voir en étudiant une rotation de  $\mathbb{T}^2$  de vecteur  $(\theta, \theta)$  avec  $\theta > \frac{1}{2}$ , voir le dernier chapitre et [75]. D'autres exemples d'isométries par morceaux avec temps de retour non bornés ont d'ailleurs été trouvés dans [45, 9]. Ils donnent aussi des exemples d'applications telles que le shift associé possède des mesures ergodiques à support dans  $\Sigma \setminus \phi(E_0)$ , voir le paragraphe 3.3 pour les notations.

La première question est de décrire l'espace de toutes les isométries par morceaux du plan, cela vient d'être fait dans un cadre plus restrictif par Bressaud et Poggiaspalla [30].

## 0.6.3 Résultats

On peut obtenir des résultats partiels sur la complexité de ces applications. On considère le codage naturel associé aux polygones de l'échange, on peut définir une notion de diagonales généralisées comme dans le cas du billard. On note alors par  $N(n)$  le nombre de diagonales de longueur combinatoire  $n$ , c'est à dire les trajectoires entre deux arêtes de la partition passant par exactement  $n - 1$  morceaux, voir le chapitre 1 pour les définitions.

**Proposition 0.6.3 ([13]).** *Soit  $T$  un échange affine de polygones IDOC2, alors on a*

$$p(n + 2) - 2p(n + 1) + p(n) = N(n).$$

Le problème est qu'actuellement on ne sait pas montrer que  $N(n)$  est borné. En effet, pour les polygones c'est un résultat fort compliqué que d'obtenir un ordre de grandeur [65]. Il est raisonnable de penser que cette complexité est quadratique.

D'ailleurs on peut le montrer pour une sous classe d'échanges de rectangles. On considère des produits croisés entre échange de  $d$  intervalles et rotation (on appelle  $H$  cette classe). On obtient même l'ergodicité de ces applications, voir le théorème 5.2.3.

**Théorème 0.6.4 ([16]).** *Presque tout échange de rectangles de la forme  $(H)$  est ergodique et de complexité équivalente à  $(d - 1)n^2$ .*



## Descriptif de la thèse

Cette thèse est composée de cinq chapitres et d'un appendice. Dans une première partie, nous cherchons à obtenir l'ordre de grandeur de la complexité du billard polyédral. On commence par le cas du cube, car ce cas nous permettra d'avoir des encadrements plus fins de la complexité. Ensuite on obtiendra une majoration de la complexité valable pour tout polyèdre convexe. On étudie d'abord la complexité directionnelle du billard polyédral. On obtient une formule exacte pour le cube codé par trois lettres, et un ordre de grandeur pour certains prismes droits. Signalons que la preuve nous permet d'obtenir l'ordre de grandeur de la complexité globale pour des polygones non convexes. Au chapitre deux, on trouve un encadrement de la complexité globale du billard dans le cube. On obtient alors au chapitre trois, une estimation de la complexité pour tout polyèdre convexe de  $\mathbb{R}^3$ , en calculant l'entropie topologique du billard polyédral. Dans une deuxième partie on étudie la dynamique du billard, en se concentrant sur deux aspects : les trajectoires périodiques et les échanges de morceaux. Au chapitre quatre, on étudie les trajectoires périodiques du billard dans un polyèdre quelconque. Nous montrons un résultat sur la stabilité de ces trajectoires, et nous détaillons l'étude des orbites périodiques de longueur quatre dans le cas du tétraèdre. Pour finir, le chapitre cinq s'intéresse au cas des échanges de rectangles. Nous nous restreignons à une sous-classe, pour laquelle on peut obtenir des résultats ergodiques. Ces ensembles sont liés au billard par l'application de premier retour du flot directionnel du billard.

Dans le chapitre un, nous calculons la complexité directionnelle du billard cubique, nous retrouvons ainsi le résultat de Arnoux, Mauduit, Shiokawa et Tamura, en corrigeant une légère erreur. La méthode utilisée permet d'obtenir la complexité dans certains prismes droits intégrables. Ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans *Regular and Chaotic dynamical systems* en 2003.

Le deuxième chapitre consiste en un encadrement de la complexité globale du billard cubique. On définit une diagonale généralisée pour un polyèdre de  $\mathbb{R}^3$ . On relie alors la complexité au nombre de diagonales, mais contrairement au cas du plan une diagonale n'est plus associée à un seul mot. On encadre alors la complexité en estimant le nombre de mots par diagonales.

Le chapitre trois est consacrée à la démonstration de la nullité de l'entropie topologique du billard polyédral. On se place dans le cadre symbolique, et on calcule l'entropie métrique du shift, pour chaque mesure ergodique, en distinguant plusieurs cas.

Le chapitre quatre traite des orbites périodiques, qui sont stable lorsque le polyèdre est perturbé. On réalise, de plus, une étude des orbites périodiques de longueur quatre dans le tétraèdre. Ces orbites sont une généralisation de l'orbite de Fagnano.

Le chapitre cinq étudie une classe particulière d'échange de rectangles. On obtient l'ergodicité, et la complexité des échanges de cette classe.

Dans le dernier chapitre, nous donnons un comparatif entre le cas polygonal et le cas polyédral, et dans l'appendice nous donnons un programme en mupad, qui permet de savoir si un tétraèdre possède une trajectoire périodique de longueur quatre. Dans le cas positif le programme trace la trajectoire.

Le premier chapitre a été publié dans "Regular and Chaotic dynamical systems" dans un numéro dédié aux billards. Les troisième et quatrième chapitres sont soumis pour publication. Le deuxième chapitre fait l'objet d'une prépublication.



# Chapitre 1

## Complexité : Premiers résultats

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la complexité directionnelle du billard polyédral. Nous commençons par donner la classification des polyèdres rationaux. Nous rappelons ensuite, la preuve du calcul de la complexité d'une suite sturmiennne. On calcule alors la complexité des suites du billard cubique, car ces suites généralisent les suites sturmiennes, et nous généralisons ce calcul à d'autres polyèdres.

Tout d'abord, nous rappelons que l'on ne peut obtenir des résultats précis que pour les polygones et polyèdres rationnels. Nous nous intéressons donc à leur classification.

### 1.1 Polyèdres rationaux

Commençons par rappeler la définition des polyèdres rationnels.

**Définition 1.1.1.** *Soit  $P$  un polyèdre, appelons  $s_i$  la réflexion linéaire par rapport à la face numérotée  $i$  du polyèdre. Le polyèdre est alors dit rationnel si le groupe  $G(P)$  généré par les  $s_i$  est fini.*

On remarque aisément que le cube est rationnel. Qu'en est il des autres polyèdres ?

#### 1.1.1 Classification

On peut classer les polyèdres rationnels par le théorème suivant de Coxeter [36]. Ceci est à relier à la classification des chambres de Weyl [29].

**Définition 1.1.2.** *On appelle angle diédral d'un polyèdre  $P$  relatif à l'arête  $a$ , l'angle de la rotation produit des deux symétries orthogonales par rapport aux plans de  $P$  contenant  $a$ . Un polyèdre est dit aigu si tous ses angles diédraux sont inférieurs à  $\frac{\pi}{2}$ .*

**Théorème 1.1.3 (Coxeter).** *Les polyèdres rationnels aigus de  $\mathbb{R}^n$  sont des produits topologiques de simplexes.*

En dimension deux, les polygones aigus rationnels sont soit des simplexes soit des rectangles. Par exemple, le cube est le produit de trois simplexes de  $\mathbb{R}$ . Nous donnons ici un exemple de polyèdre rationnel qui est un simplexe de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exemple 1.1.4.** *On considère un cube, et sur ce cube on prend les quatre points situés au centre d'une face, au milieu d'une arête de cette face, sur un sommet de cette arête, et au centre du cube. Un rapide calcul montre que ce tétraèdre est rationnel [90].*

Cet exemple permet de voir que l'étude du billard dans des polyèdres rationaux ne se limite pas à celle des prismes orthogonaux. Mais il est clair que l'ensemble des polyèdres rationaux à  $k$  sommets est de mesure nulle dans l'ensemble des polyèdres à  $k$  sommets. Par contre, on ne connaît pas de résultat de densité.

## 1.1.2 Polyèdres réguliers

A l'exception du cube les polyèdres réguliers ne sont pas aigus, nous allons montrer qu'ils sont irrationnels.

**Lemme 1.1.5.** *les tétraèdres, dodécaèdres, icosaèdres réguliers ne sont pas des polyèdres rationnels.*

Rappelons que les polynômes de Chebychev sont définis par

$$P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta), \quad n \in \mathbb{N}.$$

*Démonstration:* Commençons par le cas du tétraèdre, que l'on appelle  $ABCD$ , voir Figure 1.1. On compose deux symétries qui donnent la rotation autour de l'arête  $AC$ . On obtient une rotation dont l'angle moitié vérifie  $\cos\theta = 1/3$ . Le calcul de l'angle se fait de la manière suivante. L'angle au sommet  $I$  du triangle  $ACI$  avec  $I$  milieu de  $[BD]$  est égal à l'angle recherché. Sa détermination utilise la formule d'Al Kashi. On montre alors que cet angle n'est pas rationnel, ce qui implique que la rotation n'est pas d'ordre fini. Raisonnons par l'absurde. Si  $\theta$  est rationnel, alors il existe  $n$  tel que  $P_n$  ou  $P_n - 1$  s'annule pour  $1/3$ , donc 3 divise le coefficient dominant du polynôme. Or le coefficient dominant vaut  $2^n$  (récurrence) d'où une contradiction. Passons au cas de l'icosaèdre. On obtient la valeur de l'angle  $\phi$  par la même méthode.

$$\cos(\phi) = 1 - \frac{8}{3}\sin^2(3\pi/10) = \frac{-\sqrt{5}}{3}.$$

Il ne peut être rationnel, à cause du facteur trois car on a  $\cos(2\phi) = 1/3$ . Le dernier polyèdre se traite de la même manière.  $\square$

## 1.2 Résultats antérieurs

On va redémontrer la formule de la complexité  $p(n, \omega)$  d'une suite de billard dans une direction irrationnelle, dans un carré codé par deux lettres. Les côtés parallèles sont codés par la même lettre. Par minimalité on dit que tout point du carré est approché par la trajectoire donc deux droites parallèles ont même complexité. On déplie le carré et on regarde la  $n$ -ième intersection : pour cela on voit que cela dépend de l'intersection de la droite avec l'escalier

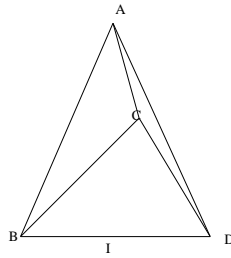


FIG. 1.1 – Tétraèdre régulier

d'équation  $x + y = n$ . On projette suivant la direction sur la droite  $x + y = 0$  engendrée par un vecteur  $u$ . On quotiente la droite par  $\mathbb{Z}u$ , on a un tore avec une partition donnée par la projection du premier escalier. La projection des  $n$  premiers escaliers donne une partition dont il faut compter le nombre de parties : on en trouve  $n + 1$ .

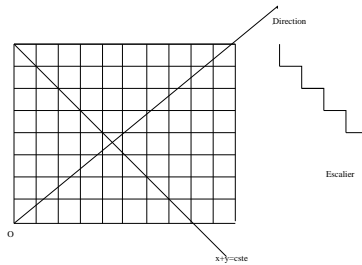


FIG. 1.2 – Suites sturmiennes.

Le schéma de la preuve d'Arnoux, Mauduit, Shiokawa et Tamura est le suivant. Elle reprend les étapes de la preuve précédente. Dans le cas du cube et d'une trajectoire irrationnelle on projette sur le plan  $x+y+z=0$  quotienté par un réseau : on a un tore représenté par un hexagone et la projection de l'escalier en donne une partition en trois parallélogrammes : on itère  $n$  fois et on cherche le nombre d'éléments de la partition en utilisant la formule d'Euler : On trouve par récurrence  $n^2 + n + 1$ . C'est le schéma de la preuve présente dans [6]. La preuve était légèrement fautive : on accepte dans ces hypothèses les droites qui passent par trois arêtes différentes, or ces trajectoires sont mal codées.

### 1.3 Complexité dans un polyèdre rationnel

Nous reproduisons ici un article paru dans "Regular and Cahotic dynamical systems" dans un numéro dédié aux billards. Avant cela, voici un résumé des propriétés obtenues dans cet article.

On considère une rotation minimale du tore  $\mathbb{T}^2$ . On code cette application par trois lettres, et on cherche alors à estimer la complexité des mots infinis obtenus. Cette valeur a déjà été trouvée par [6, 12]. Mais la première démonstration est fautive. Pour retrouver ceci ,on a besoin de rajouter une hypothèse sur la direction (Condition BP). C'est cette hypothèse

qui n'était pas présente dans [6]. Les rotations du tore sont reliées au billard dans un cube si on code les faces parallèles par la même lettre. On remarque alors que notre preuve peut s'étendre à d'autres prismes droits. De plus notre preuve permet de retrouver la complexité globale du billard polygonal, et d'étendre cette preuve aux polygones non convexes. Les deux résultats principaux de ce chapitre sont donc

**Théorème 1.3.1** ([13]). • Soit un cube de  $\mathbb{R}^3$  codé par trois lettres, et  $\omega$  un élément de  $\mathbb{R}^3$ , qui vérifie

$$\begin{aligned} \omega_1, \omega_2, \omega_3 & \text{ sont } \mathbb{Q} \text{ indépendants,} \\ \omega_1^{-1}, \omega_2^{-1}, \omega_3^{-1} & \text{ sont } \mathbb{Q} \text{ indépendants,} \end{aligned}$$

alors on a

$$p(n, \omega) = n^2 + n + 1.$$

• Pour un prisme droit à base de polygone régulier pavant le plan et pour une direction  $\omega$  minimale et IDOC2 (voir la définition au Chapitre 1), il existe  $a, b$  strictement positifs tel que

$$a \leq \frac{p(n, \omega)}{n^2} \leq b.$$

**Proposition 1.3.2** ([13]). Pour un polygone de  $\mathbb{R}^2$ , il existe  $a > b$  tels que

$$b \leq \frac{p(n)}{n^3} \leq a.$$

Le schéma de la preuve est le suivant :

On utilise la formule de Cassaigne sur la complexité [33], on obtient une expression de la complexité des échanges de rectangles en fonction du nombre de diagonales. On relie cette complexité à celle cherchée. En effet le billard dans un polygone rationnel, une fois la direction fixée, peut être interprété comme un échange d'intervalles. On peut faire pareil pour le billard dans un polyèdre rationnel, et on a un échange affine de polygones. On détermine enfin le nombre de diagonales de longueur  $n$  dans la direction fixée. C'est ce dernier point qui ne se généralise pas aux autres polyèdres.

## 1.4 Introduction

A billiard ball, i.e. a point mass, moves inside a polyhedron  $P$  with unit speed along a straight line until it reaches the boundary  $\partial P$ , then instantaneously changes direction according to the mirror law, and continues along the new line.

Label the sides of  $P$  by symbols from a finite alphabet  $\Sigma$  whose cardinality equals the number of faces of  $P$ . Fix a direction  $\omega$  and code the orbit of a point by the sequence of sides it hits. Consider the set  $\mathcal{L}(n, \omega)$  of all words of length  $n$  which arise via this coding, and let  $p(n, \omega) = \text{card}(\mathcal{L}(n, \omega))$ . This is the complexity function in the direction  $\omega$ , it does not depend on the initial point if the billiard map is minimal. We want to compute the complexity.

There are no result on the complexity for general polyhedron  $P$ , the only known case is the cube if we use a coding with three letters using the same letter for parallel faces.

It was first found by Arnoux, Mauduit, Shiokawa, and Tamura [6, 7]. They use the fact that the billiard map in the cube is a rotation on the torus  $\mathbb{T}^2$  and compute the numbers of cells of the  $n$ 'th iterate of the rotation. Their result generalizes the computation of the directional complexity in the square where the obtained sequences are Sturmian. This result was generalized to a cube in  $\mathbb{R}^s$ ,  $2 \leq s$  by Baryshnikov [12]. For the rational polygons Hubert has given an exact formula for the directional complexity, it is a linear polynomial in  $n$  and it does not depend on the direction [54].

To give a new proof of the complexity in the cube we consider the notion of a generalized diagonal, that is an orbit segment in the fixed direction which starts and ends in an edge of the cube. The combinatorial length of a generalized diagonal is the number of links. We note  $N(\omega, n)$  the cardinal of the set of generalized diagonals of length  $n$ . It was considered in [34] for the global complexity of a polygonal billiard. The notion of generalized diagonals can be defined for any map with a partition, it is enough to exchange the words edge and discontinuity of the partition, in the definition.

In the case of the rational polygons the billiard map, in one direction, is an interval exchange map, for the polyhedra there is a similar result for which we need some definitions. We call a polyhedron rational if the group  $G$  generated by the linear reflections on the faces is finite. Furthermore we call a map an affine polygon exchange if there is a finite partition of a polygon  $X$  in polygons, a map of  $X$  on itself which is defined on each polygon by an isometry and such that the image of the partition is a partition.

Let  $P$  be a rational polyhedron and  $G$  his group of reflections. The phase space of the biliard map in  $P$  has a decomposition into subspaces  $\partial P \times G\omega$ . This subspace can be viewed as a polyhedron  $Q$  where we identify the parallel copies of the same face. The billiard map in  $P$  becomes a geodesic flow in  $Q$ , and the geodesic flow in a given direction yields an affine polygonal exchange which each partition element is coded by a single letter.

In general each face is represented several times in the polygonal exchange, thus the complexity of the polygonal exchange yields bounds of the complexity of the billiard. However in the case of the cube, when coding the parallel faces by the same letters, the symbolic sequence of a given point produced by the billiard is the same as the one produced by the geodesic flow of the given point in the cube with parallel faces identified. Thus the complexity of the billiard in the cube and its associated polygonal exchange are the same.

Our main result relates the complexity of an IDOC2 polygon exchange to the number of its generalized diagonals.

**Definition 1.4.1.** *We consider a affine polygon exchange, the discontinuities are intervals, we consider two of them  $a \neq b$ . If  $T^n a \cap T^m b$  is a point or is empty and if  $T^n \partial a \cap T^m \partial b$  is empty for every  $n, m \in \mathbb{Z}$  then the polygonal exchange is called IDOC2.*

For an interval exchange, the discontinuities are points, and the preceeding definition gives the IDOC condition.

**Proposition 1.4.2.** *Consider an affine polygon exchange which is IDOC2 and minimal. We call  $p(n)$  the complexity of the polygon exchange, with the natural coding and  $N(n)$  the*

number of generalized diagonals of combinatorial length  $n$  for this map.

$$p(n) = (2 - n)p(1) + (n - 1)p(2) + \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} N(j) \quad \forall n > 2.$$

In fact we can apply Proposition 1.4.2 to some rational polyhedra. The simplest ones are the right prisms with polygonal basis. In this case if we are able to bound the number of generalized diagonals in one direction we obtain bounds for the complexity.

**Definition 1.4.3.** *Let  $P$  be a rational polyhedron and  $\omega$  a direction. The direction  $\omega$  is called BP irrational if there is no diagonal in this direction which passes through three sorts of edges and there is no diagonal which passes through two parallel edges.*

**Corollary 1.4.4.** *Let  $P$  be a rational polyhedron,  $\omega$  a minimal and BP irrational direction, and  $N(n, \omega)$  the number of generalized diagonals of length  $n$  in the direction  $\omega$ . There exists  $C \in \mathbb{N}$  and  $b > 0$  constants such that for all  $n > 2$ .*

$$p(n, \omega) \leq (2 - n)p(1, \omega) + (n - 1)p(2, \omega) + b \sum_{i=2}^{n-1} \sum_{j=1}^{i-1} N(j, \omega) \leq p(C + n, \omega).$$

To apply Proposition 1.4.2 to the cube we have to compute the number of generalized diagonals and to understand the IDOC2 condition in the case of the cube.

**Definition 1.4.5.** *The initial direction of the billiard map is a vector  $w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$ . If the  $w_i$  are rationally independant we say that the direction is totally irrational, and if we add the condition that the  $(w_i^{-1})$  are  $\mathbb{Q}$  independant we call  $w$  B irrational.*

The condition of total irrationality is the translation to the cube of the BP condition, and it implies that the polygon exchange is IDOC2.

**Theorem 1.4.6.** *Let  $w$  be a B irrational direction, then the directional billiard complexity in the cube satisfies*

$$p(n, w) = n^2 + n + 1 \quad \forall n > 0.$$

**Remark 1.4.7.** *In [6, 7] the theorem was proven with the condition of total irrationality, but there exists some directions  $w$  which are totally irrational, not B irrational and such that there exists  $n$  with  $p(n, w) < n^2 + n + 1$ . The mistake in their proof is minor. In [12] an alternative proof was given with the condition of B irrationality.*

*Proposition 1.4.2 is true under a condition weaker than the affinity assumed. Without modification of its proof, the relation between the global complexity and the number of generalized diagonals of combinatoric length  $n$  holds for polygonal billiards generalizing the result of [34] to the non convex case.*

We obtain a similar result for some right prisms.

**Theorem 1.4.8.** *Let a right prism with a tiling polygon as base. Consider a natural coding on this billiard table and let  $w$  be a minimal and BP irrational direction. Then there exist positives constants  $A, B$  such that*

$$B \leq \frac{p(n, w)}{n^2} \leq A \quad \forall n > 0.$$



## 1.5 Polygonal exchanges

*Proof of Proposition 1.4.2.* First of all we have to recall some results of words combinatorics [33].

For any  $n \geq 1$  let  $s(n) := p(n+1) - p(n)$ . For  $v \in \mathcal{L}(n)$  let

$$\begin{aligned} m_l(v) &= \text{card}\{a \in \Sigma, va \in \mathcal{L}(n+1)\}, \\ m_r(v) &= \text{card}\{b \in \Sigma, bv \in \mathcal{L}(n+1)\}, \\ m_b(v) &= \text{card}\{a \in \Sigma, b \in \Sigma, bva \in \mathcal{L}(n+2)\}. \end{aligned}$$

A word is called right special if  $m_r(v) \geq 2$ , left special if  $m_l(v) \geq 2$  and bispecial if it is right and left special. Let  $\mathcal{BL}(n)$  be the set of the bispecial words. Cassaigne [33] has shown:

**Lemma 1.5.1.**

$$s(n+1) - s(n) = \sum_{v \in \mathcal{BL}(n)} m_b(v) - m_r(v) - m_l(v) + 1.$$

For the proof of the lemma we refer to [33] or [34].

Since the map is minimal we just have to count the number of initial words of length  $n$ . We consider an affine polygon exchange  $T$ , we label the polygons of the partition  $\mathcal{P}$  with

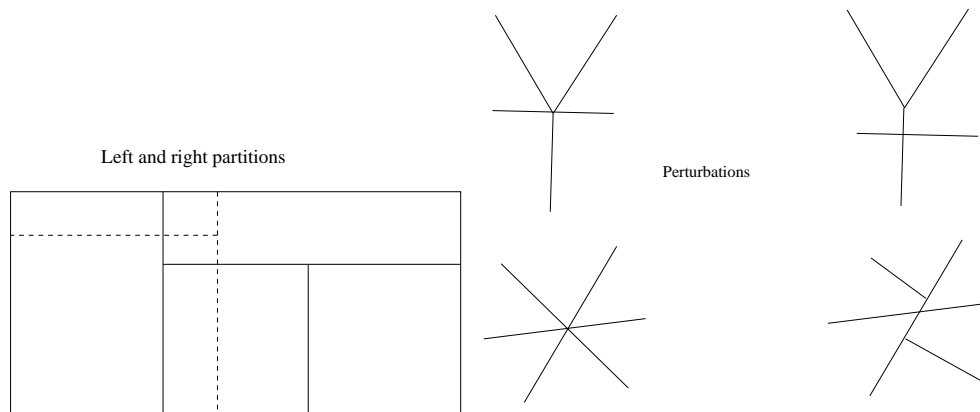


FIG. 1.3 –

the letters from a finite alphabet. Let a polygon of the partition corresponding to a letter  $a$ , it has a image by  $T$  which is a union of polygons. These polygons are associated to the letters  $b$  such that  $ab$  is a word of the language. So a word  $v$  of the language is represented by a polygon, it is partitionned into  $m_r(v)$  polygons each of which corresponds to a different word. Since  $T$  is invertible we can repeat the same argument with  $T^{-1}$  and  $m_l(v)$ . If we intersect the two partitions of the polygon associated to  $v$  we obtain a partition into  $m_b(v)$  polygons.

Now we use the Euler formula  $F = E - V + 1$  for a partition of a polygon into  $F$  polygons with  $E$  edges and  $V$  vertices. There are three partitions so we obtain three equations.

$$\begin{aligned}
m_r(v) &= E_r(v) - V_r(v) + 1, \\
m_l(v) &= E_l(v) - V_l(v) + 1, \\
m_b(v) &= E_b(v) - V_b(v) + 1.
\end{aligned}$$

The vertices of the third partition are the vertices of the first one plus the vertices of the second one and the vertices created by the intersection of an edge of the first partition and an edge of the second one. Let us call this number  $k(v)$ , by the IDOC2 we obtain  $V_b(v) - V_r(v) - V_l(v) = k(v)$ .

For the edges we use the IDOC2 condition, and we assume, for the moment that an image of an edge does not intersect a vertex. The IDOC2 condition tells us that two edges can only intersect in one point, and we see that each point  $k(v)$  creates two edges, so  $E_b(v) - E_r(v) - E_l(v) = 2k(v)$ , thus  $m_b(v) - m_r(v) - m_l(v) + 1 = k(v)$ .

If we are in the case where an image of an edge intersects a vertex, then we can make a small perturbation of some edge of one partition, see Figure 1.3, such that the number of polygons does not change; the formula is now true and we obtain

$$m_b(v) - m_r(v) - m_l(v) + 1 = k(v).$$

To finish the proof we just have to remark that  $\sum_{v \in \mathcal{BL}(n)} k(v) = N(n)$ . □

## 1.6 Generalized diagonals for the cubic billiard

*Proof of Theorem 1.4.6.* When we play billiard in a polyhedron we can reflect the line or we can reflect the polyhedron and follow the same line: it is the unfolding. Let  $O$  be a vertex of

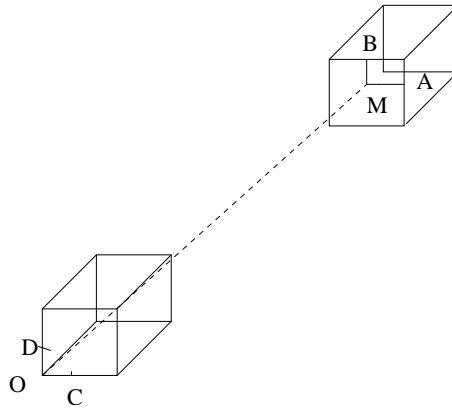


FIG. 1.4 –

the cube and consider the segment of direction  $\omega$  which starts from  $O$  and ends at a point  $M$  after it passes through  $n$  cubes.  $M$  is a point of a face of an unfolding cube; if we translate  $M$  with a direction parallel to one of the two directions of the face we obtain a point  $A$  on an

edge, and if we call  $C$  the point such that  $\vec{OC} = \vec{MA}$ , then  $CA$  is a generalized diagonal, and we have another one,  $DB$  in the figure, arising from the second translation.

The symmetries of the cube implies that these diagonals are the only ones. It remains to prove that the two generalized diagonals are of combinatorial length  $n$ .

The first thing to remark is that the condition of total irrationality implies that a generalized diagonal can not begin and end on two parallel edges. So the edges of begin and end are of different type.

To see that the combinatorial length is equal to  $n$  we can remark that the sum of the lengths of the projections is twice the length of the trajectory, so we just have to prove it for the projection, i.e. billiard in the square, where it follows from the symmetry. Lemma 1.5.1 shows us that the diagonals are non-degenerate.

So we obtain that  $s(n+1) - s(n) = 2$ , since  $p(1) = 3$   $p(2) = 7$ , we obtain  $p(n, \omega) = n^2 + n + 1$ .  $\square$

Next we show that the  $B$  condition of irrationality implies the impossibility to have a trajectory which pass through all three types of edges. It is the point that was wrong in the articles [6, 7].

**Lemma 1.6.1.** *There exists a total irrational direction such that there exist  $n$  and a trajectory of length  $n$  which pass through three different edges.*

*If  $\omega$  is a  $B$  irrational direction this is impossible.*

*Proof:* For the first point just consider the direction  $(1 - \frac{\pi}{6}, 1, \frac{6-\pi}{12-\pi})$  and the points on the edges  $(\pi/6, 0, 0), (1, 1, \frac{6-\pi}{12-\pi}), (2, \frac{12-\pi}{6-\pi}, 1)$ .

The proof of the second point is by contradiction.

Let  $\omega$  be a  $B$  irrational direction and three points on some edges  $(x, 0, 0)$ ,  $(a, y, b)$ ,  $(c, d, z)$  with  $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ .

The fact that the points are on a line with direction  $\omega$  gives

$$\frac{c-x}{a-x} = \frac{d}{y} = \frac{z}{b}.$$

Furthermore  $\omega$  is a multiple of  $(a-x, y, b)$  and of  $(c-x, d, z)$ , thus

$$\frac{c-x}{\omega_1} = \frac{d}{\omega_2} \quad \frac{a-x}{\omega_1} = \frac{b}{\omega_3}.$$

So we have  $\frac{a-c}{\omega_1} = \frac{b}{\omega_3} - \frac{d}{\omega_2}$  which is excluded by  $B$  irrationality.  $\square$

## 1.7 Right prisms.

We consider a right prism with a tiling polygon for base. To apply Corollary 1.4.4, we need to count the generalized diagonals. The same construction as for the cube works but there is less symmetry so we must consider all the vertices of the base polygon and we remark that for one vertex the number of generalized diagonal can be null.

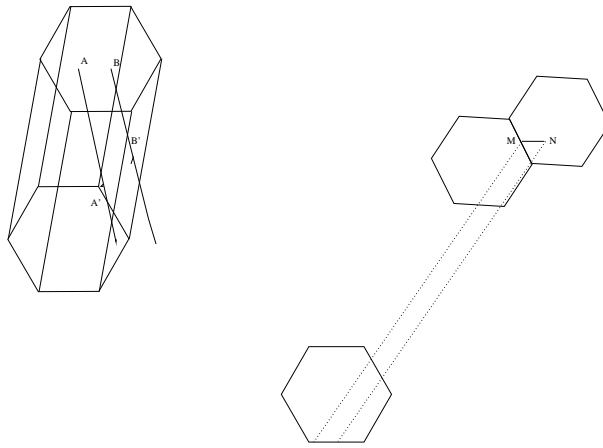


FIG. 1.5 –

**Lemma 1.7.1.** *Let  $P$  be a right prism and  $\omega$  a BP irrational direction. Consider the two diagonals we have constructed, they are of combinatorial length  $n$ .*

*Proof:*

Consider the following induction hypothesis for a right prism :

In a fixed direction all the trajectories who started from the same edge and stop on the same face of an unfolding polyhedron are of the same combinatorial length.

For  $n = 1$  it is obvious, let us assume it is true for  $n$  and consider two diagonals of the rank  $n + 1$  who started from the same edge. Call their ending points  $A$  and  $B$  and follow the trajectories in the inverse direction. The intersection with the first faces are  $A'$ ,  $B'$ , see Figure 1.5. If they are on the same face we can apply the hypothesis, else there exists a finite sequence of faces which connects these faces, we consider the points on the common edges and we apply the same reasoning.  $\square$

**Lemma 1.7.2.** *Let  $P$  be a right prism with regular hexagonal base and  $\omega$  a BP irrational direction. It is impossible to have two diagonals of the same length which start from the same edge.*

*If  $P$  is a right prism with tiling triangle base, then the number of diagonals which start from an edge is bounded.*

*Proof:* The proof is by contradiction. Suppose the length of a side is one.

Assume that the initial edge is on the hexagon. Suppose that on this edge two diagonals start and are of length  $n$ . If the end points of the diagonals are on vertical edges we can translate one point to the other by a horizontal translation of length less than one, contradiction. Consider the plane parallel to the horizontal one and who pass on one of the end points  $M$ , see Figure 1.5. This plane intersects the diagonals on two points  $M$  and  $N$ . If  $M$  and  $N$  are in the same hexagon by the proof of the preceding lemma we have the same length

for the two segments, so it is impossible. Since the hexagon tiles the plane the polygons do not overlap, thus we must have a point on an edge of an hexagon which by translation of length less than one parallel to one side go out of the hexagon, contradiction.

If the initial edge is vertical, the final edges are of different hexagons, and a vertical translation of length less than one moves one to the other, contradiction.

For the tiling triangles, Figure 1.6 gives us that the number of diagonals starting from an edge is bounded.

□

*Proof of Corollary 1.4.4.* We introduce another coding. The polyhedron  $Q$  is made by gluing

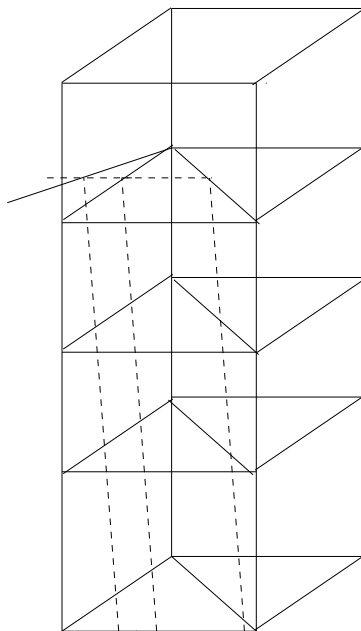


FIG. 1.6 –

some copies of  $P$ . The new coding associates one letter to each polygon of the partition of  $Q$ . The orbit of a point has now three codings: one for the billiard map  $M$ , one for the new coding  $M'$  and one for the natural coding of the polygonal exchange  $M''$  whose complexities are denoted by  $p(M, n), p(M', n), p(M'', n)$  respectively. Since there any many copies of  $P$  tiling  $Q$  we have  $p(M, n) \leq p(M', n)$ .

The number of polygons of the exchange is related to the number of polygons of the partition of  $Q$ . One face gives one polygon of the exchange, except if the preimages of singularities intersect this face. In this case the face is cut into several polygons, thus  $p(M', n) \leq p(M'', n)$ . Since the number of singularities is bounded (by a constant  $C$ ) we have that a word of length one in  $M''$  is a word of length less than  $C$  in  $M'$ . We deduce that  $p(M'', n) \leq p(M', C + n)$ . The computation of  $p(M'', n)$  can be completed using Proposition 1.4.2 when we remark that  $N(n, \omega) = bN(n, \omega)$  where  $b$  is the number of polygons of the exchange. □

*Proof of Theorem 1.4.8.* The coding is the natural one, with a letter for each face. The billiard map in the direction  $\omega$  is a polygon exchange. Lemma 1.7.1 shows that the diagonals are

of combinatorial length  $n$ . Lemma 1.7.2 implies that the number of generalized diagonals is bounded, the numbers of polygons of the exchange is also bounded, thus  $bN(n, \omega)$  is bounded.

For a triangle a line which passes through an interior point of the triangle and which is parallel to an edge, intersects the triangle. For an hexagon it is false but if we consider the lines parallel to two edges, one of them intersect the hexagon. So there is always at least one generalized diagonal of length  $n$ . So there exists  $D$  such that  $1 \leq N(n, \omega) \leq D$  and Corollary 4 implies the existence of  $a, d$  with

$$a \leq p(M'', n)/n^2 \leq d.$$

Using  $p(M', n) \leq p(M'', n) \leq p(M', C + n)$  we obtain the existence of  $A, B$  such that

$$B \leq p(M', n)/n^2 \leq A.$$

Like in the two dimensional case, [54], we prove :

**Lemma 1.7.3.** *There exists an integer  $m$  such that*

$$p(M, n) = p(M', n) \quad \forall n > m.$$

*Proof:* The proof is by contradiction. The language  $M'$  is bigger than  $M$  and a word of  $M'$  gives a word of  $M$  by a projection,  $\pi$ , letter by letter.

If it is false we can find for any  $n$  two different words  $v_n$  and  $w_n$  of  $M'$  such that their projections in the language  $M$  are equal. We can assume that the words  $v_n$  are successive and the same thing for  $w_n$ . Let us call  $v$  and  $w$  the two limit points of the sequences  $(v_n)$  and  $(w_n)$ .

There exist  $m \in \partial P$  and  $\phi$  a direction such that the orbit of  $(m, \phi)$  has  $\pi(v)$  as coding. The direction is unique, not necessary the point  $m$ , see [39].

If the orbit of  $(m, \phi)$  is singular then there exist  $e \in \partial P$ ,  $\phi'$  a direction, and  $k$  an integer such that the forward orbit of  $(e, \phi')$  has  $T^k(\pi(v))$  as coding and is non singular. Moreover  $T^{-1}(e, \phi)$  belongs to an edge of  $P$ .

It remains to prove that the point on  $\partial P$  is unique.

If a point of a face has an orbit which passes through the same face with the same direction, the tiling property of  $P$  implies that those two faces are parallel. So the isometries of the polygonal exchange are translations, which implies that it is impossible to have two points with the same coding.

The point on  $\partial P$  is unique, and we have  $v = w$ .

□

So the last inequality is true for  $p(n)$  for  $n$  large, if we change the constant  $B$  it is still true for all the integers.

□

# Chapitre 2

## Complexité globale du cube

On a vu au chapitre précédent remarque 1.4.7, que l'on pouvait obtenir des estimations de la complexité globale pour un polygone rationnel. En particulier on peut calculer explicitement cette quantité pour le carré. Nous calculons dans ce chapitre, la complexité globale du billard cubique. C'est-à-dire la complexité de l'ensemble des mots obtenus par l'ensemble des rotations du tore  $\mathbb{T}^2$ . La méthode est la suivante. On part de la formule de Cassaigne sur les mots bispéciaux, et on cherche le lien avec les diagonales généralisées. Mais contrairement au cas bi dimensionnel, une diagonale ne contient pas un seul mot. Ainsi on est ramené à compter le nombre de diagonales, et à compter le nombre de mots contenus dans chaque diagonale. Il y a trois type de diagonales, les trajectoires sommet-sommet, sommet-arête, et arête-arête. Ce sont ces dernières qui apportent la contribution principale à la complexité.

Ce travail va faire l'objet d'une prépublication.

### 2.1 Introduction

A billiard ball, i.e. a point mass, moves inside a polyhedron  $P$  with unit speed along a straight line until it reaches the boundary  $\partial P$ , then instantaneously changes direction according to the mirror law, and continues along the new line.

Label the sides of  $P$  by symbols from a finite alphabet  $\mathcal{A}$  whose cardinality equals the number of faces of  $P$ . Then there are two dynamical systems which can be studied. Either we consider the set of billiards orbits in a fixed direction, or we consider all orbits.

In both cases the orbit of a point corresponds to a word in the alphabet  $\mathcal{A}$  and the set of all the words is a language. We define the complexity of the language,  $p(n)$ , by the number of words of length  $n$  which appears in this system. We call the complexity in a fixed direction the directional complexity, denoted  $p(n, \omega)$ , and the other one the global complexity or to short simply the complexity. How complex is the game of billiard in the cube? The only general result is that the billiard in a polygon has zero entropy [39] [55], and thus the two complexities grow sub-exponentially. For the polyhedron the same fact is true for the cube. But it is not known for a generic polyhedron.

It is possible to compute the complexity for the rational polygons (a polygon is rational if the angles between sides are rational multiples of  $\pi$ ). For the directional complexity the first result is in the famous paper of Morse and Hedlund [72], and it has been generalized to

any rational polygon by Hubert [54]. This directional complexity is always linear in  $n$ .

For the global complexity Cassaigne, Hubert and Troubetzkoy [34] obtain that  $p(n)/n^3$  has lower and upper bound, in the case of rational polygons. Moreover for some regular polygons they show that  $p(n)/n^3$  has a limit and exhibit it. For the square coded by two letters there is an explicit formula for the global complexity see [23] [68]. But even for the hexagon we are not able to obtain an equivalent, we must use the result of Masur which gives the order of magnitude of the number of saddle connections [65].

In the polyhedral case much less is known. The directional complexity, in the case of the cube has been computed by Arnoux, Mauduit, Shiokawa and Tamura [6] and generalized to the hypercube by Baryshnikov [12]. Moreover in [13] the computation has been done in the case of some right prism with tiling polygonal base. The directional complexity is always quadratic in  $n$  for those polyhedra. Here we want to compute the global complexity for the cube.

The proof of [34] is based on the fact that the complexity is related to the number of generalized diagonals. A generalized diagonal is an orbit segment which starts and ends on an vertex of the polygon (or an edge for the polyhedron). We wish to apply this technique to the cube, however a generalized diagonal is not necessarily associated to a single word, so we must modify the proof. First we show that the complexity is related to the number of words which appear in one diagonal, see Section 2.2. Next we begin to count those numbers of words, see Section 2.3 to 2.5. We are not able to obtain exact formula, so we just exhibit upper and lower bounds.

## 2.2 Statement of the theorem

We consider two integers  $p, m$  which are coprime. Then we define the following parallelogram  $P$  with vertices:

$$(0, 0); (1, 0); (p, m); (p + 1, m).$$

The interior of the parallelogram contains a sequence of integers points. We denote it by  $I$ .

**Definition 2.2.1.** *The number  $k_1(p, m)$  represents the number of different lines which pass through two points of  $I$  such that each line intersects the two horizontal edges of the parallelogram.*

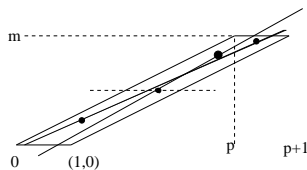


FIG. 2.1 – Integers points inside  $P$ .



**Theorem 2.2.2.** *Let  $p(n)$  the complexity of the language associated to the billiard in the cube. Then there exists  $a, b$  such that*

$$bn^4 \geq p(n+2) - 2p(n+1) + p(n) \geq a \sum_{\substack{p+l+m=n, \\ \gcd(m,p)=1}} k_1(p, m).$$

**Corollary 2.2.3.** *Let  $p(n)$  the complexity of the language associated to the billiard in the cube. Then there exists two constants  $A, B > 0$  such that for all integer  $n \geq 2$*

$$A \leq \frac{p(n)}{n^4} \leq Bn^2.$$

*Proof:* The proof of this result is reduced to the fact that  $k_1(p, m)$  is greatest than one, and is bounded by the square of the number of points inside  $P$ .  $\square$

## 2.3 Preliminary results

First of all we recall Cassaigne's results concerning combinatorics of words [33].

**Definition 2.3.1.** *Let  $\mathcal{L}(n)$  be a language not necessarily coming from a billiard map. For any  $n \geq 1$  let  $s(n) := p(n+1) - p(n)$ . For  $v \in \mathcal{L}(n)$  let*

$$\begin{aligned} m_l(v) &= \text{card}\{a \in \Sigma, av \in \mathcal{L}(n+1)\}, \\ m_r(v) &= \text{card}\{b \in \Sigma, vb \in \mathcal{L}(n+1)\}, \\ m_b(v) &= \text{card}\{a \in \Sigma, b \in \Sigma, avb \in \mathcal{L}(n+2)\}. \end{aligned}$$

*A word is call right special if  $m_r(v) \geq 2$ , left special if  $m_l(v) \geq 2$  and bispecial if it is right and left special. Let  $\mathcal{BL}(n)$  be the set of the bispecial words.*

Cassaigne [33] has shown :

**Lemma 2.3.2.** *Let a language  $\mathcal{L}$  such that  $m_l(v) \geq 1, m_r(v) \geq 1$  for all words  $v$ . The complexity satisfies*

$$\forall n \geq 1 \quad s(n+1) - s(n) = \sum_{v \in \mathcal{BL}(n)} i(v),$$

*where  $i(v) = m_b(v) - m_r(v) - m_l(v) + 1$ .*

For the proof of the lemma we refer to [33] or [34].

Now we want to relate the bispecial words to the generalized diagonals. First of all we describe the unfolding of a billiard trajectory : instead of reflecting the trajectory in the face we reflect the cube and follow the straight line. Thus we consider the tiling of  $\mathbb{R}^3$  by  $\mathbb{Z}^3$ , and the associated partition into cubes of edges of length one. In the following when we talk about edges (resp faces), we are referring to an edge (resp a face) of one of those cubes, while  $[x]$  denotes the integer part of  $x$ .

**Definition 2.3.3.** We introduce the following order on the edges : two edges  $\alpha$  and  $\beta$  verify  $\alpha < \beta$  if and only if :

$$\forall i \leq 3 \quad \alpha_i \leq [\beta_i] \quad \forall(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \alpha, \forall(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \beta.$$

The diagonals are of three types :

- the diagonals from a vertex to another one, denoted by  $V$ ,
- the diagonals from a vertex to an edge, denoted by  $M$ ,
- the diagonals from an edge to another one, denoted by  $E$ .

We call a diagonal a non-negative diagonal if it is an orbit segment between two edges  $a$  and  $b$  with  $a < b$ . If we attach a superscript  $+$  to an object, then it will consist of non-negative diagonals, for example  $V^+$  is the set of non-negative diagonals from a vertex to another vertex.

**Notations.** We say that a diagonal is of combinatorial length  $n$  if the orbit segment passes through  $n$  cubes. We denote them by  $V(n), M(n), E(n)$ . In the following we only consider diagonals of combinatorial length  $n$  whose initial segment is in the cube  $[0, 1]^3$ .

We denote the fact that an orbit in the diagonal  $\gamma$  has code  $v$  by  $v \in \gamma$ . We consider the bispecial words such that, in the unfolding, the associated trajectories are in  $\mathbb{R}_+^3$ , and not in one of the three coordinates planes, we denote these words by  $\mathcal{BL}(n)^+$ .

We need to show

**Proposition 2.3.4.** *With the preceding notations we have*

$$\frac{1}{8} \sum_{v \in \mathcal{BL}(n)} i(v) = \sum_{v' \in \mathcal{BL}^+(n)} i(v') + O(n),$$

and

$$\sum_{\mathcal{BL}^+(n)} i(v') = \sum_{\gamma \in V^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 4 + \sum_{\gamma \in M^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 2 + \sum_{\gamma \in E^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1. \quad (2.1)$$

In the second sum we do not count the diagonals of the first sum, for the third sum we do not count diagonals of the first two sums.

For the proof we need the following lemmas.

**Lemma 2.3.5.** *Let  $v$  be a word in  $\mathcal{BL}^+(n)$ , then there exists only one positive diagonal associated to this word.*

*Proof:* If we study the unfolding of a trajectory associated to  $v$ , the fact that we consider only words in  $\mathcal{BL}(n)^+$  (and not in  $\mathcal{BL}(n)$ ) implies that there are at most three choices for the suffix of  $v$  in the octant  $\mathbb{R}_+^3$  (a suffix is a letter  $l$  such that  $vl$  is a word), and the same result for the prefix.

We consider the faces related to the suffix letter. Those faces have a non-empty intersection, if we consider the same intersection with the prefix, we have built a diagonal associated to this word, and by construction it is unique.  $\square$

The phase space is the set of points of the boundary of the cube with a direction. So it is of dimension four. In the phase space a word corresponds to a manifold of dimension four, which we call a cell.

**Definition 2.3.6.** We call discontinuity a set of points in the phase space such that their orbits intersect an edge (or a vertex).

Let us remark that a discontinuity is of dimension at most three, and that a diagonal is in the intersection of two discontinuities.

**Lemma 2.3.7.** Let  $v$  a bispecial word. The following facts are equivalent

- (1)  $i(v) = 0$ ,
- (2) the diagonal(s) associated to  $v$  is (are) in the boundary of the cell.

*Proof:* We consider the cell associated to the word  $v$ . By definition there are several letters which prolong the word. At each prolong corresponds a discontinuity, there are two types of discontinuities. The right ones partition the cell into  $m_r$  sets, the left ones partition into  $m_l$  sets. The intersection of the two partitions gives  $m_b$  sets. If the diagonals are on the boundary we can apply Euler's formula to the interior of the word and obtain  $m_b = m_r + m_l - 1$ , i.e.  $i(v) = 0$ .

It remains to prove that  $i(v) = 0$  implies that the diagonals are on the boundary of the cell associated to  $v$ .

Euler's formula gives  $m_r = P_r - F_r + E_r - V_r + 1$  (where  $P, F, E, V$  denote the numbers of polyhedra, faces, edges, vertices in the partition) and the same formula for the other partitions. If  $i(v) = 0$  we obtain that

$$(P_b - P_r - P_l) - (F - F_r - F_l) + (E_b - E_l - E_r) - (V_b - V_l - V_r) = 0.$$

Now we remark that if one vertex is created by the intersection, at least two edges are created; for each created edge at least two faces are created.

The equality  $i(v) = 0$  implies

$$(\delta P - \delta F) + (\delta E - \delta V) = 0,$$

where  $\delta P = P_b - P_r - P_l$  and the inequalities are

$$\delta P \geq 2\delta F, \delta F \geq 2\delta E, \delta E \geq 2\delta V.$$

We deduce

$$\delta F + \delta V \leq 0,$$

it implies  $\delta V = 0$ , contradiction. □

The existence of such diagonals is proved by the example pictured in Figure 2.2. We consider a cube coded by six letters and the word  $abc$ . Here  $b$  is an horizontal face,  $a$  is a transversal face and  $c$  is vertical. The diagonal pictured passes through the edges thus is on the boundary of the cell. Moreover we have  $m_r(v) = m_l(v) = 3, m_b(v) = 5$ , thus  $i(v) = 0$ .

*Proof of Proposition 2.3.4.* First we remark that the symmetries of  $\mathbb{R}^3$  implies that the same quantities for the seven other octants represent the same words.

Now we are interested in the bispecial words which are neither in  $\mathcal{BL}(n)^+$  nor in one of the symmetric sets. Their unfolding is in  $[0, 1]^2 \times \mathbb{R}_+$ . Thus for each coordinates plane their

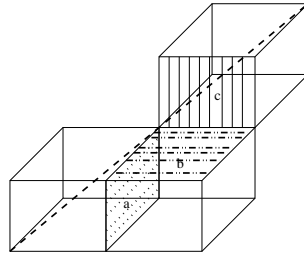


FIG. 2.2 – A word and associated diagonal such that  $i(v) = 0$ .

number is equal to the number of bispecial words of the square. Lemma 2.3.2 implies that it is  $s_2(n) = p_2(n+2) - 2p_2(n+2) + p_2(n)$ , where  $p_2$  denotes the global complexity of the square. Moreover we can bound  $i(v)$  for those words. This implies

$$\left| \sum_{v \notin \mathcal{BL}(n)^+} i(v) \right| \leq C(p_2(n+2) - 2p_2(n+2) + p_2(n)) \quad C \in \mathbb{R},$$

the relation  $p_2(n) = O(n^3)$  implies that

$$\sum_{v \notin \mathcal{BL}(n)^+} i(v) = O(n).$$

It finishes the first part of the proof.

We only consider words with  $i(v)$  non zero. We consider the map  $f: \mathcal{BL}(n)^+ \rightarrow \text{Diag}^+$ .

Lemma 2.3.5 implies that  $f$  is well defined and onto, thus

$$\text{card}(\mathcal{BL}(n)^+) = \sum_{\gamma \in \text{Diag}^+} \text{card}(f^{-1}(\gamma)).$$

There are three types of diagonals. For each diagonal  $\gamma$  of these classes we claim that  $i(v)$  is constant for all  $v \in f^{-1}(\gamma)$ . To calculate this constant we first get the values of  $(m_r, m_l)$  by considering small perturbations of the diagonal which is in the interior of the cell by the previous lemma.

Let  $a$  be a diagonal in  $V^+(n)$ ,  $v$  the associated word. The diagonal  $a$  ends in a vertex, which is at the intersection of three faces. A perturbation makes possible to obtain a trajectory which passes through anyone of the three faces and which has  $v$  as coding, thus  $m_r \geq 3, m_l \geq 3$ , by Lemma 2.3.5 we obtain  $m_r = m_l = 3$ . Lemma 2.3.7 implies the diagonal is in the interior of the cell, thus a small perturbation of the diagonal still leaves in the interior of the cell. Thus all the possibilities exist and  $m_b = 9$ , and thus  $i(v) = 4$ .

A similar argument works for the other cases. □

We consider the three classes of diagonals, and we will estimate each term of equation (1). In the following we will use the next lemma, called Pick's formula [36].

**Lemma 2.3.8.** *Let  $P$  be a convex polygon which has vertices on  $\mathbb{Z}^2$ , let  $N(P)$  be the number of integer points in the closed polygon  $P$ , and  $N(\partial P)$  the number of integer points on the boundary. Then :*

$$N(P) = \text{area}(P) + \frac{1}{2}N(\partial P) + 1.$$

We consider the cube  $[0; 1]^3$  and the unfolding in the first octant.

**Lemma 2.3.9.** • *The diagonals of combinatorial length  $n$  are such that the final edge satisfies*

$$\sum_{i=1}^3 [\alpha_i] = n + 1,$$

where  $(\alpha_i)$  denoted the coordinates of points on the final edge of the diagonal.

• *Let  $a$  be the edge colinear to the vector  $(1, 0, 0)$ . An edge, parallel to  $a$ , is at combinatorial length  $n$  of  $a$  if*

$$[\alpha_1] + [\alpha_2] + [\alpha_3] = n, \text{gcd}([\alpha_2], [\alpha_3]) = 1,$$

where  $(\alpha_i)$  are the coordinates of points on the edge.

*Proof:* • To prove the first point we consider the three faces of the cube which contains the basis of  $\mathbb{R}^3$ . We say that a face  $f$  is at length  $n$  if there exists a line which passes through one of the three faces and the face  $F$  such that it intersects  $n$  faces. Since the cube is integrable the length of one face is unique. Then we claim : a face is at length  $n \geq 1$  if for all point  $(X, Y, Z)$  inside we have  $[X] + [Y] + [Z] = n + 1$ . The proof of the claim is easy if we use an induction on  $n$ .

Now consider a diagonal at length  $n$ , it is included in a face at length  $n$ . Since a diagonal necessary starts on one of the three edges which form the basis of  $\mathbb{R}^3$  we obtain the equality.

• For the second point we must remove the diagonal which contains a segment parallel to the final (or initial) edge. Indeed for those diagonals all the lines cut the third segment, thus the combinatorial length is less than  $n$ . To analyse those segments we can use two projections along the coordinates planes. Those segments, in a such projection corresponds to the segment between  $(0, 0)$  and  $([\alpha_2], [\alpha_3])$  which contains integer points.  $\square$

**Corollary 2.3.10.** *The set of edges at combinatorial length  $n$  of the cube  $[0; 1]^3$  equals the union of the three following sets*

$$\begin{aligned} & \{(\alpha_i)_{i \leq 3}, [\alpha_1] + [\alpha_2] + [\alpha_3] = n, \text{gcd}([\alpha_2], [\alpha_3]) = 1\}, \\ & \{(\alpha_i)_{i \leq 3}, [\alpha_1] + [\alpha_2] + [\alpha_3] = n, \text{gcd}([\alpha_2], [\alpha_1]) = 1\}, \\ & \{(\alpha_i)_{i \leq 3}, [\alpha_1] + [\alpha_2] + [\alpha_3] = n, \text{gcd}([\alpha_2], [\alpha_1]) = 1\}. \end{aligned}$$

We also need to fix some notations :

**Definition 2.3.11.** *Let  $f$  and  $g$  be two functions defined on  $\mathbb{N}^3$  with values in  $\mathbb{R}$ .*

*A real function  $g$  is of order  $O(p + l + m)$  if and only if the function  $\frac{|g(p, l, m)|}{p + l + m}$  is bounded when  $p + l + m$  tends to infinity.*

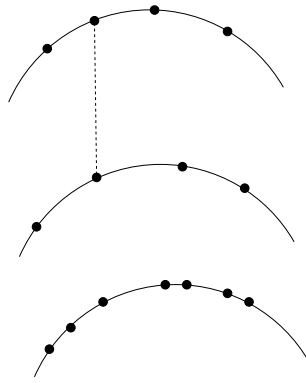


FIG. 2.3 – Two partitions of the phase space and their intersection.

## 2.4 Diagonals from a vertex to a vertex

In this case a diagonal comprises only one word. So we must estimate the number of trajectories from vertex to vertex which do not pass through an edge. We can see by an induction that it is equivalent to count the number of points of the set

$$C = \{(i, j, k); i + j + k = 2 + n; \quad i, j, k \in \mathbb{N}^*; \\ \gcd(i, j) = \gcd(j, k) = \gcd(i, k) = 1\}.$$

**Proposition 2.4.1.** *With the previous notations we have*

$$\sum_{\gamma \in V^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1 = \text{card}(C) = O(n^2).$$

*Proof:* The set  $C$  is included in the set

$$\{(i, j, k); i + j + k = 2 + n; \quad i, j, k \in \mathbb{N}^*\},$$

and it is easy to obtain the cardinality of this set. □

## 2.5 Diagonals from a vertex to an edge

We fix the vertex  $O$  and an edge  $e$ . We consider the subspace of all the trajectories which start from the vertex and stop at the edge. This subspace is of dimension one, and a straightforward computation shows that is a subset of a circle (we consider euclidean coordinates for the direction). Consider two partitions of this subspace by collections of points, which represent the trajectories of the cube which passes through an edge orthogonal to  $e$ , between  $O$  and  $e$ , see Figure 2.4b, c. The intersection of the two partitions gives the final partition. We need to count the numbers of words of each partition and to intersect the partitions, see Figure 2.3.

### 2.5.1 One partition

Let  $e$  be an edge with coordinates

$$(p, l, Y) \quad \text{where} \quad [Y] = m \quad \text{and} \quad p, l, m \in \mathbb{Z}^+.$$

We are interested in the partition associated to the lines  $X = a, Z = b, a, b$  integers. To estimate the number of sets we count the number of dividing points. To do this we project on the plane  $Y = 0$ . This leads to counting the number of integer points in a triangle (Figure 2.4a), Pick's formula allows us to do it. In the plane, we have a triangle with vertices  $(0, 0); (p, m); (p, m + 1)$ . The triangle has area  $p/2$ , so the number of integer points is

$$p/2 - \frac{1}{2}[\gcd(m, p) + \gcd(m + 1, p)] + 1/2.$$

To obtain the number of cells of the partition we have to delete the points which give the same discontinuity in the phase space, see Figure 2.3. Those points represent the trajectories which pass through two parallel edges between  $O$  and  $e$ . Denote this number by  $r$ .

### 2.5.2 Two partitions

When we overlay the two partitions we should delete the common points. Those are the trajectories from  $O$  to  $e$  which passes through two edges. We denote this number by  $q$ , see Figure 2.3. Thus we have proved

**Proposition 2.5.1.** *Let  $O$  the origin of the space,  $e = (p, l, Y)$   $[Y] = m$  an edge, and  $\gamma$  the diagonal between  $O$  and  $e$ .*

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \gamma} 1 &= 3 + (p + l)/2 - \gcd(m, p)/2 - \gcd(m, l)/2 \\ &\quad - \gcd(m + 1, l)/2 - \gcd(p, m + 1)/2 - q - r. \end{aligned}$$

Now we can begin to obtain a bound for the second term of (1).

**Corollary 2.5.2.** *With the same notations we obtain*

$$\sum_{\gamma \in M^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1 = O(n^3).$$

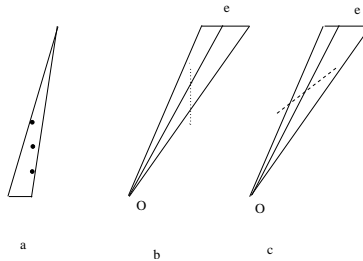


FIG. 2.4 – The words of the diagonal.

*Proof:* If we consider a diagonal  $\gamma \in M^+(n)$ , then Proposition 2.5.1 gives a bound for  $\sum_{v \in \gamma} 1$ :

$$\sum_{v \in \gamma} 1 \leq p + l.$$

Now we use Lemma 2.3.9, which implies that

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in M^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1 &= \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{v \in \gamma} 1. \\ \sum_{\gamma \in M^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1 &\leq \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{p=1}^{n-2-m} p + l, \\ \sum_{\gamma \in M^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1 &\leq \sum_{m \leq n-1} \sum_{p \leq m} m. \end{aligned}$$

□

## 2.6 Diagonals from an edge to an edge

There are two cases which appear, indeed the edges can be parallel or not. The geometries of the phase space are different in the two cases, so we must treat them separately.

### 2.6.1 The edges are not parallel

Fix the edges  $a, b$ . The corresponding subspace  $S_{a,b}$  is of dimension two. The discontinuities are the trajectories which pass through a third edge, there are three cases : either this edge is parallel to  $a$ , to  $b$  or to neither.

**Remark 2.6.1.** *We can observe that a single discontinuity does not necessarily induce a partition of the subspace, but three discontinuities, which intersect each other or have common intersection, do induce a partition. A discontinuity is a trajectory  $a, c, b$  with  $c$  an edge. Consider two faces of the cube  $f, g$  which intersect at  $c$ . If we want to pass from the segment  $a, f, b$  to the segment  $a, g, b$  it is not necessary to pass through  $c$ , we can intersect other edges, see Figure 2.5.*

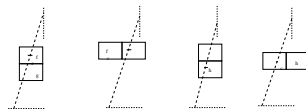


FIG. 2.5 – Discontinuities of a word.



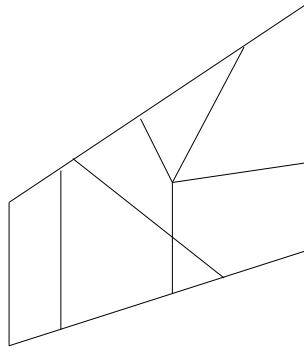


FIG. 2.6 – Representation of the phase space.

Figure 2.5 explains that a discontinuity does not necessarily separate the space into two cells. We can have four singularities with a same endpoint (it is the case of Figure 2.5).

So we introduce the following numbers.

**Definition 2.6.2.** For any fixed  $(p, l, m) \in \mathbb{N}^3$  we denote by  $k_3$  the number of points in  $S_{a,b}$  which are an endpoint of four discontinuities, and by  $k_2$  the number of intersections of two discontinuities.

The phase space  $S_{a,b}$  is a manifold of dimension two. In Figure 2.6 we represent it by a convex set of  $\mathbb{R}^2$ , for simplicity. Some discontinuities separate the cell, and some have a common endpoint.

Next we will show

**Proposition 2.6.3.** Let  $a, b$  two non parallel edges, with coordinates

$$a = (X, 0, 0) \quad \text{and} \quad b = (p, Y, m) \quad \text{where} \quad [X] = 0, \quad [Y] = l.$$

Then the number of words  $W$  of the associated diagonal has the following order of magnitude :

$$W = O(k_3 + k_2).$$

*Proof:* There are two partitions. One with the discontinuities which separate the space, and one with the others. Now we intersect those partitions, because the two forms can appear together, see Figure 2.6. We use Euler's formula :  $W = E - V + 1$ , where  $V, E$  are the numbers of vertices, edges. We have  $V \leq k_3 + k_2$  and  $E \leq k_3 + 2k_2$ , by definition. So we obtain  $W \leq k_3 + 2k_2 + 1$ .  $\square$

## 2.6.2 The edges are parallel

There are two partitions, because there are two sorts of lines orthogonal to the edge. The method is the same, we count the number of words of each partition and we overlay. But the decomposition of the phase space is different. To count the number of words of each partition we need to count the discontinuities and the associated diagonals. After the overlay we have to count the number of diagonals which have been created.

## One partition

We consider the edges with coordinates

$$(X, 0, 0), (X', l, m), \text{ where } [X] = 0, [X'] = p,$$

and the partition with the lines  $X = \text{const}, Z = \text{const}$ , denoted by  $\delta$ .

**Definition 2.6.4.** For any fixed  $(p, l, m) \in \mathbb{N}^3$  we denote by  $k_1$  the cardinality of the trajectories which intersect the two edges and two distinct elements of  $\delta$ .

The diagonals of this partition are the trajectories between the two edges which pass through two parallel edges (parallel to  $\delta$ ), so in the projection on the  $XZ$  plane they are the lines which connect two integers points. This implies that  $k_1$  is independant of  $l$ . In Section 2.7 we will denote  $k_1$  by  $k_1(p, m)$ .

**Lemma 2.6.5.** The number of discontinuities is  $A = m - \text{gcd}(m, p)$ . The number of words is  $A + k_1 + 1$ . Moreover we have  $k_1 \leq m^2$ .

*Proof:* The proof just consists in the using of Pick's formula for the first point, and in Euler's formula for the second, like in the previous proposition. for the last point as  $k_1$  count the number of distinct lines, it is bounded by the square of the number of integer points inside the parallelogram.  $\square$

## Two partitions

Denote by  $A'$  and  $k'_1$  the quantities analogous to  $A, k_1$  for the partition  $X = \text{const}, Y = \text{const}$ . We consider trajectories which pass through  $a, b, c, d$  with  $a, b, c, d$  edges,  $a, d$  parallel and  $b, c$  orthogonal to each other and to  $a$ , see Figure 2.7. We project in the plane orthogonal to  $b$  or  $c$ . We obtain trajectories in a parallelogram which link one integer point and one edge, let  $k$  be the cardinality of the set of such trajectories. We count a trajectory between edge and vertex one time only.

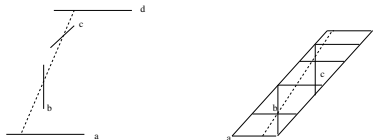


FIG. 2.7 – Diagonals of the cell edge to edge.

**Proposition 2.6.6.** The numbers of words associated to the diagonal is

$$A + k_1 + A' + k'_1 + k.$$

The order of magnitude is given by

$$A + k_1 + A' + k'_1 + k = 2k_1 + k'_1 + O(n).$$

*Proof:* To count the number of words, the proof is similar to that of Proposition 2.6.3, Lemma 2.6.5. Now we search the order of magnitude. The first thing to remark is that  $A'$  is obtained by  $A$  by interchanging  $p$  with  $m$ , and we use Lemma 2.6.5 to bound it by  $n$ . For  $k$  we remark that it is the number of lines in a parallelogram which pass through a point and an edge. We bound it by  $k_1$ . □

## 2.7 Order of magnitude

We shall search bounds for the quantities of the different propositions. Throughout we will consider edges at a combinatorial distance  $n$  with coordinates  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  satisfying  $[\alpha_1] = p$ ,  $[\alpha_2] = l$ ,  $[\alpha_3] = m$ .

- The diagonals from vertex to vertex and from vertex to edge do not pose a problem, since  $\text{card}(C) = O(n^2)$ , and the quantity  $\sum_{v \in \gamma} 1$  in Proposition 2.5.1 is such that  $\sum_{\gamma \in M^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1 =$

$O(n^3)$ . Indeed we have  $\sum_{v \in \gamma} 1 \leq 3 + (p + l)/2$  and Lemma 2.3.9 finishes the proof.

- Now we are interested in the diagonals from edge to edge.

First we study the quantity  $W$  of Proposition 2.6.3. We see that in this case the trajectories are in a solid made by the two edges. The number  $k_3$  represents the points of  $\mathbb{Z}^3$  which are in this solid. Since the edges are of length one,  $k_3$  is bounded by the number of integer points of one projection. This quantity can be estimated by using Pick's formula, the order is in  $O(p + l + m)$ .

For  $k_2$  we must consider several cases.

The first one is made of lines linking four edges,  $a, c, d, b$  with  $a, c$  parallel and  $d, b$  also. Once again we project, we obtain a trajectory in a triangle which passes through the vertex, an integer point of the interior and one edge of  $\mathbb{Z}^2$ . An upper bound is given by the number of points inside the triangle, it is in  $O(p + l + m)$ .

The second one is made of lines linking four edges,  $a, c, d, b$  with  $a, c$  parallel, the other are pairwise orthogonal, the same argument shows that it is in  $O(p + l + m)$ .

The third includes the lines  $a, c, d, b$  with  $c, d$  parallel. The projection gives an quadrilateral with, in the interior, lines passing through two integer points. We can majorize this number by the square of the number of integers points inside the quadrilateral. The order is thus in  $O(p^2 + l^2 + m^2)$ . Finally we have shown

**Lemma 2.7.1.** *With the same notation we have*

$$k_3 \in O(p + l + m) = O(n).$$

$$k_2 \in O(p^2 + l^2 + m^2) = O(n^2).$$

Now we can prove

**Proposition 2.7.2.** *With the same notations we can write :*

$$\sum_{\gamma \in E^+(n)} k_1 \leq \sum_{\gamma \in E^+} \sum_{v \in \gamma} 1 \leq 3 \sum_{\gamma \in E^+(n)} k_1 + O(n^4).$$

*Proof:* With preceding Propositions 2.6.3 and 2.6.6, we deduce that

$$\sum_{\gamma \in E^+} \sum_{v \in \gamma} 1 = \sum_{\gamma \in E^+} W + A + k_1 + A' + k'_1 + k.$$

With the second part of Proposition 2.6.6, we have

$$k_1 + k'_1 + k_2 \leq W + A + k_1 + A' + k'_1 + k \leq 2k_1 + k'_1 + k_2 + O(n).$$

$k_1, k'_1$  are symmetric objects, thus we deduce that their sums are equals. The second inequality is a clear consequence of Lemma 2.7.1.  $\square$

## 2.8 Proof of Theorem 2.2.2

With Lemma 2.3.2 the proof of Theorem 2.2.2 is equivalent to prove that there exists  $a' > 0$  such that for all integer  $n$

$$\sum_{\substack{p+l+m=n, \\ \gcd(p,m)=1}} k_1(p, m) \leq \sum_{v \in \mathcal{BL}(n)} i(v) \leq b'n^4.$$

• We begin by the minoration of the complexity.

With Proposition 2.3.4 it is sufficient to minorate  $\sum_{\gamma \in E^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1$ . Then Proposition 2.7.2 implies that

$$\sum_{\gamma \in E^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1 \geq \sum_{\gamma \in E^+(n)} k_1.$$

• Now we obtain the upper bound of the complexity. With Proposition 2.3.4, Proposition 2.4.1 and Corollary 2.5.2 it is sufficient to majorate  $\sum_{\gamma \in E^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1$ . With Proposition 2.7.2 and

Lemma 2.6.5 we have

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma \in E^+(n)} \sum_{v \in \gamma} 1 &\leq 3 \sum_{\gamma \in E^+(n)} m^2 + O(n^4). \\ &\leq 3 \sum_{p+l+m=n} m^2 + O(n^4). \\ &\leq 3 \sum_{p=0, l=0}^n (n-p-l)^2 + O(n^4). \\ &\leq 3n^2(n+1)^2 + O(n^4). \\ &\leq b'n^4. \end{aligned}$$

# Chapitre 3

## Entropie topologique du billard polyédral

Dans ce chapitre, on calcule l'entropie du billard polyédral. Nous montrons que le billard dans un polyèdre convexe est d'entropie topologique nulle. La méthode consiste à utiliser le principe variationnel pour le shift, et à calculer l'entropie pour chaque mesure ergodique. Il faut alors séparer deux cas, selon le support de la mesure. En effet il est possible que la mesure soit à support dans la frontière de l'ensemble des mots. Pour les polygones ce cas était constitué d'un ensemble dénombrable de mots. Ici ce n'est plus le cas.

On reproduit l'article sur l'entropie [17], qui est soumis pour publication.

### 3.1 Introduction

When we study a dynamical system a natural problem is to know how chaotic the system is. The concept of entropy is a measure of this disorder. It was invented by Clausius in 1854, Shannon defined it in the context of information theory, and Kolmogorov [59] for ergodic theory in 1958 where it is called metric entropy. This notion is a measure invariant for a dynamical system. The metric entropy is a global invariant for the Bernoulli shift since the famous work of Ornstein [73]. A few years later Adler, Konheim and Mac Andrew define a new concept : topological entropy [4]. This entropy is a topological invariant for a dynamical system. The two notions of entropy are related by the variational principle in the compact case. For the standard definition and properties of entropy we refer to Katok and Hasselblatt [51]. There are a lot of examples where we are able to compute the entropy, here we are interested in the billiard map.

There are three different proofs that polygonal billiard have zero topological entropy [55, 39, 47]. Buzzi [32], has shown a closely related result : the piecewise isometries of  $\mathbb{R}^n$  have zero topological entropy. Here we consider the billiard map inside a polyhedron. A billiard ball, i.e. a point mass, moves inside a polyhedron  $P$  with unit speed along a straight line until it reaches the boundary  $\partial P$ , then instantaneously changes direction according to the mirror law, and continues along the new line.

We want to compute the topological entropy of the billiard map in a polyhedron. The idea is to improve the proof of Katok. When we follow this proof some difficulties appear. In

particular an non atomic ergodic measure for the related shift can have its support included in the boundary of the definition set. Such examples were known for some piecewise isometries of  $\mathbb{R}^2$  since the works of Adler, Kitchens and Tresser [3]; Goetz and Poggiaspalla [43, 45].

Our main result is the following

**Theorem 3.1.1.** *Let  $P$  be a convex polyhedron of  $\mathbb{R}^3$  and  $T$  the billiard map, then*

$$h_{top}(T) = 0.$$

**Corollary 3.1.2.** *The complexity of the billiard map satisfies*

$$\lim_{+\infty} \frac{\log p(n)}{n} = 0.$$

## 3.2 Background and notations

We want to compute the topological entropy. The phase space is not compact, and the map is not continuous, thus the standard definition of topological entropy does not apply. We define the topological entropy in Definition 3.2.1. We remark that the proof of Theorem 3.1.1 given in [39] is not complete. They do not consider the case, where the ergodic measure is supported on the boundary of  $\Sigma$ .

### 3.2.1 Notations

We label each face of the polyhedron with a letter from the alphabet  $\{1 \dots N\}$ . Let  $E$  be the phase space of the billiard map and  $d = \{d_1 \dots d_N\}$  the cover of  $E$  related to the coding. The phase space is of dimension four: two coordinates for the point on the boundary of  $P$  and two coordinates for the direction.

Let  $E_0$  be the points of  $E$  such that  $T^n$  is defined, continuous in a neighborhood for all  $n \in \mathbb{Z}$ . Denote by  $\phi$  the coding map, it means the map

$$\begin{aligned} \phi: E_0 &\rightarrow \{1, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}, \\ \phi(m) &= (v_n)_{\mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

where  $v_n$  is defined by  $T^n(m) \in d_{v_n}$ . Let  $S$  denote the shift map on  $\{1 \dots N\}^{\mathbb{Z}}$ . We have the diagram,

$$\begin{array}{ccc} E_0 & \xrightarrow{T} & E_0 \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ \phi(E_0) & \xrightarrow{S} & \phi(E_0) \end{array}$$

with the equation

$$\phi \circ T = S \circ \phi.$$

Let  $\Sigma$  be the closure of  $\phi(E_0)$ , and consider the cover

$$d \vee T^{-1}d \vee \dots \vee T^{-n+1}d.$$

The cover  $d$ , when restricted to  $E_0$ , is a partition. The sets of this cover are called  $n$ -cells. If  $v \in \Sigma$  we denote

$$\sigma_v = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \overline{T^{-n}(d_{v_n} \cap E_0)} = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^{-n}d_{v_n}.$$

It is the closure of the set of points of  $E_0$  such that the orbit is coded by  $v$ . If  $v \in \phi(E_0)$  it is equal to  $\phi^{-1}(v)$ . We denote  $d^- = \bigvee_{n=0}^{\infty} T^{-n}d$  and

$$\sigma_v^- = \bigcap_{n \geq 0} \overline{T^{-n}(d_{v_n} \cap \phi(E_0))} = \bigcap_{n \geq 0} T^{-n}d_{v_n}.$$

Let  $\xi = \{c_1, \dots, c_k\}$  be the partition of  $\Sigma$  given by

$$c_k = \overline{\phi(d_k \cap E_0)}.$$

Finally we can define the topological entropy

**Definition 3.2.1.** *Consider a polyhedron of  $\mathbb{R}^3$ , then we define*

$$h_{top}(T) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log C(n)}{n},$$

where  $C(n)$  is the number of  $n$ -cells.

This definition is made with the help of the following lemma which links it to the topological entropy of the shift.

**Lemma 3.2.2.** *With the same notation*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log C(n)}{n} = h_{top}(S|\Sigma).$$

*Proof:*  $\xi$  is a topological generator of  $(S|\Sigma)$ , thus

$$h(S|\Sigma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log \text{card} \xi_n}{n},$$

and we have  $\text{card}(\xi_n) = C(n)$ . □

### 3.2.2 Background

First we define the rational polyhedron. Let  $P$  a polyhedron of  $\mathbb{R}^3$ , consider the linear reflections  $S_i$  over the faces of  $P$ .

**Definition 3.2.3.** *We denote  $G(P)$  the group generated by the  $S_i$ , and we say that  $P$  is rational if  $G(P)$  is finite.*

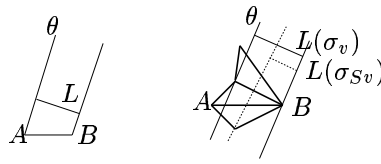


FIG. 3.1 – Billiard invariant

In  $\mathbb{R}^2$  a polygon is rational if and only if all the angles are rational multiple of  $\pi$ . Thus the rational polygons with  $k$  edges are dense in the set of polygons with  $k$  edges. In the other dimensions this result becomes false.

A useful tool in the billiard study is the unfolding. When a trajectory passes through a face, there is reflection of the line. The unfolding consists in following the same line and in reflecting the polyhedron over the face. For example for the billiard in the square/cube, we obtain the usual square/cube tiling. In the following we will use this tool, and an edge means an edge of an unfolded polyhedron.

### 3.2.3 Related results

If  $P$  is a rational polyhedron, then we can define the first return map of the directional flow in a fixed direction  $\omega$ . This map  $T_\omega$  is a polygonal exchange. Gutkin and Haydn have shown :

**Theorem 3.2.4.** [47] *Let  $P$  be a rational polyhedron and  $w \in \mathbb{S}^2$  then*

$$h_{top}(T_\omega) = 0.$$

*Moreover if  $\mu$  is any invariant measure then*

$$h_\mu(T) = 0.$$

## 3.3 Variational principle

We use the variational principle to compute the entropy

$$h_{top}(S|\Sigma) = \sup_{\substack{\mu \\ ergo}} h_\mu(S|\Sigma).$$

Remark that we cannot apply it to the map  $T$  since it is not continuous. The knowledge of  $h_\mu(T)$  does not allow to compute  $h_{top}(T)$ . We are not interested in the atomic measures because the associated system is periodic, thus the entropy is equal to zero. We split into two cases  $supp(\mu) \subset \phi(E_0)$  or not. We begin by treating the first case which is in the same spirit as the argument in Katok [55].

**Lemma 3.3.1.** *Let  $\mu$  be an ergodic measure with support in  $\phi(E_0)$ . We denote  $\xi^- = \bigvee_{n=0}^{\infty} S^{-n}\xi$ .*

*Up to a set of  $\mu$  measure zero we have*

$$S\xi^- = \xi^-.$$



*Proof:* As  $\mu(\phi(E_0)) = 1$ , the cover  $\zeta$  can be thought as a partition of  $\phi(E_0)$ . Let  $v \in \phi(E_0)$ , then the set  $\sigma_v^-$  can be thought as an element of  $d^-$ . The set  $\overline{\phi(\sigma_v^- \cap E_0)}$  coincides with the set of  $\xi^-$  which contains  $v$ .

We have  $\sigma_{S^{-1}v}^- \subset T^{-1}\sigma_v^-$ , thus the set of  $v$  such that  $\sigma_v^-$  is a point is invariant by  $S$ . The ergodicity of  $\mu$  implies that this set either has zero measure or full measure.

Assume it is of full measure, then  $d^-$  is a partition of points, and same thing for  $\xi^-$ ,  $S\xi^- \gg \xi^-$  implies that those two sets are equal.

Assume it is of zero measure. Then by ergodicity there are two cases:  $\sigma_v^-$  is an interval or of dimension two for a set of full measure.

- Assume  $\sigma_v^-$  is an interval for a full measure set of  $v$ .

If  $\theta$  is the direction of  $v$ , then consider the strip of base  $\sigma_v^-$  and axis  $\theta$ . Consider a plane orthogonal to the axis, and denote  $L(\sigma_v^-)$  the length of the set at the intersection of the plane and the cylinder, see Figure 3.1 where  $B$  is a discontinuity in the right figure.

Clearly we have  $T(\sigma_v^-) \subset \sigma_{Sv}^-$ , thus we have  $L(T\sigma_v^-) \leq L(\sigma_{Sv}^-)$ . Since  $L(T\sigma_v^-) = L(\sigma_v^-)$  we conclude that the function  $L$  is a sub-invariant of  $S$ .

Since  $\mu$  is ergodic the function  $L$  is constant  $\mu$  a.e. Thus for  $\mu$  a.e  $v$  we obtain two intervals of same length, one included in the other. They are equal. We deduce  $\sigma_{Sv}^- = T\sigma_v^-$ . This implies that  $v_1, v_2, \dots$  determines  $v_0$  almost surely. It follows that

$$S\xi^- = \xi^- \mu a.e.$$

- If  $\sigma_v^-$  is of dimension 2 for a positive measure set of  $v$ , by ergodicity it is of the same dimension for  $\mu$  a.e  $v$ . It implies that  $v$  is a periodic word  $\mu$  a.e, thus  $S\xi^- = \xi^- \mu$  a.e.  $\square$

Since  $h(S, \xi) = H(S\xi^- | \xi^-) = 0$  we have:

**Corollary 3.3.2.** *If  $\text{supp}(\mu) \subset \phi(E_0)$  then  $h_\mu(S|\Sigma) = 0$ .*

## 3.4 Measures on the boundary

We will treat the cases of ergodic measures, satisfying

$$X = \text{supp}(\mu) \subset \Sigma \setminus \phi(E_0).$$

*A priori* there are several cases as  $\dim \sigma_v^-$  can be equal to 0 or 1. We see here a difference with the polygonal case.

### 3.4.1 Orbits passing through several edges

In this paragraph an edge means the edge which appears in the unfolding of  $P$  corresponding to  $v$ . We represent an edge by a point and a vector. The point is a vertex of a copy of  $P$  in the unfolding and the vector is the direction of the edge. We consider two edges  $A, B$  in the unfolding. Consider  $m \in A$  and a direction  $\theta$  such that the orbit of  $(m, \theta)$  passes through an edge. We identify the point  $m$  and the arc-length  $m$  along the edge  $A$ . It means that  $m \sim mu$  where  $u$  is the unit vector parallel to  $A$ .

**Lemma 3.4.1.** *The set of  $(m, \theta)$ ,  $m \in A_0$  such that the orbit of  $(m, \theta)$  passes through an edge  $A_1$  satisfies either*

(i)  $(m, \theta)$  is in the line or plane which contains  $A_0, A_1$  which we denote by  $f(\theta) = 0$ ,  
or

(ii) there is a map  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $m = F(\theta)$  (it is the quotient of two linear polynomials). Moreover it is impossible to obtain the same equation  $m = F(\theta)$  for two different edges.

*Proof:* Consider the affine subspace generated by the edge  $A_0$  and the line  $m + \mathbb{R}\theta$ . There are two cases:

- $A_1 \in \text{Aff}(A_0, m + \mathbb{R}\theta)$ . Assume  $A_0, A_1$  are not colinear, then the affine space generated by  $A_0, A_1$  is of dimension two (or one), and  $\theta$  gives not only one point  $m$ . In the case it is of dimension 2,  $\theta$  is in the plane which contains  $A_0, A_1$ , we denote it by equation  $f(\theta) = 0$ .

- $A_1 \notin \text{Aff}(A_0, m + \mathbb{R}\theta)$ , then the space  $\text{Aff}(A_0, A_1)$  is of dimension three. If the direction is not associated to a single point then the edges  $A_0, A_1$  are coplanar. Thus in our case the direction is associated to a single point  $m$ . There exists a real number  $\lambda$  such that  $m + \lambda\theta \in A_0$ . Since  $A_1$  is an edge, it is the intersection of two planes (we take the planes of the two faces of the polyhedron). We denote the two planes by the equations  $h = 0; g = 0$  where  $h, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ . We obtain the system

$$h(m + \lambda\theta) = 0,$$

$$g(m + \lambda\theta) = 0.$$

Here  $h(x) = \langle v_h, x \rangle + b_h$  where  $v_h$  is a vector and  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  is the scalar product and similarly for  $g$ . Then we write  $h(m) = \langle v_h, m \rangle + b_h = m \langle v_h, u \rangle + b_h$ , we do the same thing for  $g$ . Since  $A_0, A_1$  are not coplanar the terms  $\langle v_g, \theta \rangle, \langle v_h, \theta \rangle$  are non null, thus we obtain the expression for  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{-b_h - m \langle v_h, u \rangle}{\langle v_h, \theta \rangle} = \frac{-b_g - m \langle v_g, u \rangle}{\langle v_g, \theta \rangle}.$$

For a fixed  $\theta$ , there can be only one point  $m \in A_0$  which solves this equation, otherwise we would be in case (i). Thus we find  $m = F(\theta)$  where  $F$  is the quotient of two linear polynomials:

$$m = \frac{b_g \langle v_h, \theta \rangle - b_h \langle v_g, \theta \rangle}{\langle v_h, u \rangle \langle v_g, \theta \rangle - \langle v_g, u \rangle \langle v_h, \theta \rangle}.$$

Note that  $F$  does not depend on the concrete choices of the planes  $h, g$ , but only on the edges  $A_0, A_1$ .

We prove the last point by contradiction. If we have the same equation for two edges, it means that all the lines which pass through two edges passes through the other. We claim it implies that the three edges  $A_0, A_1, A_2$  are coplanar: the first case is when  $A_1, A_2$  are coplanar. Then the assumption implies that the third is coplanar, contradiction. Now assume that the three edges are pairwise not coplanar. Indeed consider a first line which passes through the three edges. Call  $m$  the point on  $A_0$ , and  $u$  the direction. Now consider a line which passes through  $A_0$  with a different direction. Those two lines intersect  $A_1$ , thus  $B$  and the

two lines are coplanar. Since  $A_2$  is not coplanar with  $A_0$ , both lines can not intersect  $A_2$ , contradiction.  $\square$

**Lemma 3.4.2.** *Consider two edges  $A_0, A_i$  which give the equation  $m = F_i(\theta)$ . Denote by  $p_i$  a point on  $A_i$  and  $x_i$  the direction of the line  $A_i$ . Then we have*

$$F_i(\theta) = \frac{\langle p_i \wedge x_i, \theta \rangle}{\langle u \wedge x_i, \theta \rangle}.$$

*Proof:* By Lemma 3.4.1 each  $F_i$  is the quotient of two polynomials. Consider the denominator of  $F_i$  as function of  $\theta$ :

$$- \langle v_{h_i}, u \rangle \langle v_{g_i}, \theta \rangle + \langle v_{g_i}, u \rangle \langle v_{h_i}, \theta \rangle .$$

We remark for the map  $F_i$  that

$$- \langle v_{h_i}, u \rangle v_{g_i} + \langle v_{g_i}, u \rangle v_{h_i},$$

is orthogonal to  $u$  and to  $x_i$ . Thus this vector is colinear to  $u \wedge x_i$ :

$$- \langle v_{h_i}, u \rangle v_{g_i} + \langle v_{g_i}, u \rangle v_{h_i} = C_i u \wedge x_i.$$

Consider the numerator  $(b_{h_i} v_{g_i} - b_{g_i} v_{h_i}, \theta)$  of  $F_i$ . The scalar product of  $b_{h_i} v_{g_i} - b_{g_i} v_{h_i}$  with  $x_i$  is null, moreover the scalar product with  $p_i$  equals again zero by definition of  $v_{g_i}, b_{g_i}, v_{h_i}, b_{h_i}$ . Thus we obtain:

$$b_{h_i} v_{g_i} - b_{g_i} v_{h_i} = C'_i p_i \wedge x_i, \quad (3.1)$$

and:

$$F(\theta) = \frac{C'_i \langle p_i \wedge x_i, \theta \rangle}{C_i \langle u \wedge x_i, \theta \rangle}.$$

We claim that  $C_i = C'_i = 1$ . We can choose the vectors  $v_{g_i}, v_{h_i}$  such that they are orthogonal and of norm 1. Then  $x_i$  is colinear to  $v_{g_i} \wedge v_{h_i}$  and is of norm one, thus if we choose the proper orientation of  $x_i$  they are equal. Then we can have

$$- \langle v_{h_i}, u \rangle v_{g_i} + \langle v_{g_i}, u \rangle v_{h_i} = u \wedge (v_{g_i} \wedge v_{h_i}) = u \wedge x_i.$$

Thus we deduce  $K'_i = 1$ .

Now we compute the norm of the vector of the numerator  $|b_{h_i} v_{g_i} - b_{g_i} v_{h_i}|^2 = b_{h_i}^2 + b_{g_i}^2$ . By definition of  $b_{g_i}, b_{h_i}, p_i$  we obtain

$$b_{g_i} = - \langle v_{g_i}, p_i \rangle; b_{h_i} = - \langle v_{h_i}, p_i \rangle .$$

Thus we have  $|b_{h_i} v_{g_i} - b_{g_i} v_{h_i}|^2 = \langle v_{g_i}, p_i \rangle^2 + \langle v_{h_i}, p_i \rangle^2$ . Moreover by definition we have that  $x_i = v_{g_i} \wedge v_{h_i}$  this implies that  $|p_i \wedge x_i|^2 = \langle v_{g_i}, p_i \rangle^2 + \langle v_{h_i}, p_i \rangle^2$ . Finally we deduce

$$|p_i \wedge x_i|^2 (C'_i)^2 = |p_i \wedge x_i|^2.$$

$\square$

**Lemma 3.4.3.** Consider three edges  $A_0, A_1, A_2$  such that  $\dim \text{Aff}(A_i, A_j) = 3$  for all  $i, j$ . Then the sets of lines  $d$  which pass through  $A_0, A_1, A_2$  is contained in a surface which we call  $S(A_0, A_1, A_2)$ . Consider an orthonormal basis such that the direction  $u$  of  $A_0$  satisfies

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . If we call  $(P_1, P_2, P_3)$  the coordinates of a point on this surface, then

(i) the equation of the surface can be written as  $P_1 = f(P_2, P_3)$ , where  $f$  is a polynomial.

(ii) there exists  $N$  such that any line which is not contained in  $S$  intersects  $S$  at most  $N$  times.

*Proof:* Consider a line  $d = m + \mathbb{R}\theta, m \in A_0$  which passes through  $A_1, A_2$ . By Lemma 3.4.1 we obtain two equations  $m = F_i(\theta)$ . Then Lemma 3.4.2 implies that  $F_i(\theta) = \frac{\sum_{j=1}^3 a_{i,j}\theta_j}{\sum_{j=1}^3 b_{i,j}\theta_j}$ . Now call  $P_i$  the coordinates of a point  $P$  on  $d$ . We have  $P = m + \lambda\theta$ , thus we obtain

$$\begin{cases} P_1 = \frac{a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3}{b_2\theta_2 + b_3\theta_3} + \lambda\theta_1 \\ P_2 = \lambda\theta_2 \\ P_3 = \lambda\theta_3 \\ (F_1 - F_2)(\theta) = 0 \end{cases}$$

• First case  $P_2 \neq 0$ . This is equivalent to  $\theta_2 \neq 0$ .

$$\begin{cases} P_1 = \frac{a_1\theta_1 + a_2\theta_2 + a_3\theta_3}{b_2\theta_2 + b_3\theta_3} + \lambda\theta_1 \\ P_2 = \lambda\theta_2 \\ \theta_3 = \frac{P_3}{P_2}\theta_2 \\ (F_1 - F_2)(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \frac{a_1\theta_1 + \theta_2(a_2 + a_3\frac{P_3}{P_2})}{\theta_2(b_2 + \frac{P_3}{P_2})} + P_2\frac{\theta_1}{\theta_2} \\ P_2 = \lambda\theta_2 \\ \theta_3 = \frac{P_3}{P_2}\theta_2 \\ (F_1 - F_2)(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \frac{a_1}{(b_2 + \frac{P_3}{P_2})}\frac{\theta_1}{\theta_2} + \frac{a_2 + a_3\frac{P_3}{P_2}}{b_2 + \frac{P_3}{P_2}} + P_2\frac{\theta_1}{\theta_2} \\ P_2 = \lambda\theta_2 \\ \theta_3 = \frac{P_3}{P_2}\theta_2 \\ (F_1 - F_2)(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \left(\frac{a_1}{b_2P_2 + P_3} + 1\right)P_2\frac{\theta_1}{\theta_2} + \frac{a_2P_2 + a_3P_3}{b_2P_2 + P_3} \\ P_2 = \lambda\theta_2 \\ \theta_3 = \frac{P_3}{P_2}\theta_2 \\ (F_1 - F_2)(\theta) = 0 \end{cases}$$

Now the equation  $(F_1 - F_2)(\theta) = 0$  can be written as

$$\left(\sum_{j=1}^3 a_j \theta_j\right) \left(\sum_{j=2}^3 b'_j \theta_j\right) = \left(\sum_{j=1}^3 a'_j \theta_j\right) \left(\sum_{j=2}^3 b_j \theta_j\right).$$

$$(a_1 \theta_1 + a_2 \theta_2 + a_3 \theta_3)(b'_2 \theta_2 + b'_3 \theta_3) = (a'_1 \theta_1 + a'_2 \theta_2 + a'_3 \theta_3)(b_2 \theta_2 + b_3 \theta_3).$$

With the equation  $\theta_3 = \frac{P_3}{P_2} \theta_2$  we obtain an equation of the following form.

$$\begin{aligned} (a_1 \theta_1 P_2 + (a_2 P_2 + a_3 P_3) \theta_2)(b'_2 P_2 + b'_3 P_3) &= \\ (a'_1 \theta_1 P_2 + (a'_2 P_2 + a'_3 P_3) \theta_2)(b_2 P_2 + b_3 P_3) &= \\ (a_1 \theta_1 / \theta_2 P_2 + (a_2 P_2 + a_3 P_3)) (b'_2 P_2 + b'_3 P_3) &= \\ (a'_1 \theta_1 / \theta_2 P_2 + (a'_2 P_2 + a'_3 P_3)) (b_2 P_2 + b_3 P_3). & \end{aligned}$$

Thus we obtain the value of  $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ .

$$\begin{aligned} \theta_1 / \theta_2 [a_1 (b'_2 P_2 + b'_3 P_3) - a'_1 (b_2 P_2 + b_3 P_3)] P_2 &= \\ (a'_2 P_2 + a'_3 P_3) (b_2 P_2 + b_3 P_3) - (a_2 P_2 + a_3 P_3) (b'_2 P_2 + b'_3 P_3). & \end{aligned}$$

If the coefficient of  $\frac{\theta_1}{\theta_2}$  is null we obtain an equation of the form  $P_2 = K P_3$ . This implies that  $P$  is on a plane. It is impossible since the lines  $A_i$  are non coplanar. Thus we can obtain the value of  $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ . Then the first line of the system gives an equation of the form

$$f(P_2, P_3) = P_1,$$

where  $f$  is a homogenous rational map of three variables.

- Second case  $P_2 = 0$ . We obtain

$$\begin{cases} P_1 = \frac{a_1 \theta_1 + a_3 \theta_3}{b_3 \theta_3} + \lambda \theta_1 \\ P_3 = \lambda \theta_3 \\ (F_1 - F_2)(\theta) = 0 \end{cases}$$

Remark that  $P_3 \neq 0$ . Indeed if not the direction is included in  $A_0$ . Thus the system becomes

$$\begin{cases} P_1 = \frac{a_1 \theta_1 + a_3 \theta_3}{b_3 \theta_3} + \lambda \theta_1 \\ \lambda = P_3 / \theta_3 \\ (F_1 - F_2)(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \frac{a_1 \theta_1 + a_3 \theta_3}{b_3 \theta_3} + P_3 / \theta_3 \theta_1 \\ P_3 / \theta_3 = \lambda \\ (F_1 - F_2)(\theta) = 0 \end{cases}$$

And the equation  $(F_1 - F_2)(\theta) = 0$  gives as in the first case the values of  $\frac{\theta_1}{\theta_3}$ .

- Now consider a transversal line  $d'$ . A point on this line depends on one parameter. If the point is on the surface, the parameter verifies a polynomial equation of degree four, thus there are a bounded number of solutions.  $\square$

**Corollary 3.4.4.** *Consider four edges  $A_0, A_1, A_2, A_3$  two by two non coplanar such that  $A_3 \notin S(A_0, A_1, A_2)$ . Then the maps  $F_1 - F_2, F_1 - F_3$  are linearly independent.*

*Proof:* We make the proof by contradiction. If the maps  $F_1 - F_2, F_1 - F_3$  are linearly dependent,

it means that  $F_3$  is a linear combination of  $F_1, F_2$ . It implies that the system 
$$\begin{cases} m = F_1(\theta) \\ m = F_2(\theta) \\ m = F_3(\theta) \end{cases}$$

is equivalent to 
$$\begin{cases} m = F_1(\theta) \\ m = F_2(\theta) \end{cases}$$
. Thus each line which passes through  $A_0, A_1, A_2$  must pass through  $A_3$ . By preceding Lemma it implies that  $A_3$  is in  $S(A_0, A_1, A_2)$ , contradiction.  $\square$

### 3.4.2 Key point

**Lemma 3.4.5.** *For a convex polyhedron, for any word  $v \in \Sigma \setminus \phi(E_0)$  the set  $\sigma_v^-$  is connected and of dimension less than 1.*

We remark that Lemma 3.4.5 is the only place where we use the convexity of  $P$ .

*Proof:* First the word  $v$  is a limit of words  $v^n$  in  $\phi(E_0)$ . Each of these words  $v^n$  have a unique direction  $\theta_n$  by [39]. The directions  $\theta_n$  converge uniformly to  $\theta$ . This shows that the direction of  $\sigma_v^-$  is unique. Now by convexity of  $P$  the set  $\sigma_v^-$  is convex as intersection of convex sets. Since the set of discontinuities is of dimension less than one, the set is an interval or a point.  $\square$

**Lemma 3.4.6.** *Consider a point  $(m, \theta) \in \overline{E_0}$ ; then the set of words  $v$  such that  $(m, \theta) \in \sigma_v^-$  is at most countable.*

For the proof we refer to [55]. This proof does not depend on the dimension.

### Definitions

For a fixed word  $v \in \Sigma \setminus \phi(E_0)$ , the set  $\sigma_v^-$  is of dimension 0 or 1 and the direction  $\theta$  is unique, see Lemma 3.4.5. For a fixed word  $v \in \Sigma \setminus \phi(E_0)$ , first consider the case where  $\sigma_v^-$  is an interval with endpoints  $a, b$ . For any  $m \in ]a, b[$  we call  $Disc(v, m)$  the set of discontinuities met in the unfolding of  $(m, \theta)$ . Here the word “met” has two senses. First the singularity is a point of the boundary of a face whose code contributes to  $v$ . Secondly they meet in the transversal sense. If the orbit is included in an edge, then the discontinuities met are the boundary points of that edge (and similarly if the orbit is in a face). This set is independent of  $m \in ]a, b[$ . We denote it  $Disc(v, int)$ . If the endpoint  $a$  (resp.  $b$ ) is included in the interval then the orbit of  $(m, \theta)$  can meet other discontinuities. We call  $Disc(v, a)$  (resp.  $Disc(v, b)$ ) the set of those discontinuities. If  $\sigma_v^-$  is a point it is the same case, we denote the set of discontinuities by  $Disc(v, int)$ .

**Definition 3.4.7.** *Let  $V = \Sigma \setminus \phi(E_0)$  and  $X \subset V$  be the set of  $v \in V$  such that all the elements  $A_i$  of  $Disc(v, int), Disc(v, a), Disc(v, b)$  are contained in a finite union of hyperplanes and of surfaces  $S(A_0, A_1, A_2)$ .*

Suppose  $v \in X$ . Let  $N(\sigma_v^-)$  be the number of planes containing  $Disc(v)$  if  $\sigma_v^-$  is a point or  $Disc(v, a)$  or  $Disc(v, b)$  if  $\sigma_v^-$  is an interval.

**Lemma 3.4.8.** *Suppose  $\mu$  ergodic measure with support in  $\Sigma \setminus \phi(E_0)$ .*

(i) *There exists a constant  $L$  such that  $L(\sigma_v^-) = L$  for  $\mu$ -a.e.  $v \in \Sigma$  and thus for  $\mu$ -a.e.  $v, w \in \Sigma$  if  $w_i = v_i$  for  $i \geq 0$  then  $\sigma_w = \sigma_v$ .*

(ii) *There exists a constant  $N$  such that  $N(\sigma_v^-) = N$  for  $\mu$ -a.e.  $v \in \Sigma$ .*

*Proof:* (i) If  $\sigma_v^-$  is a point then there is nothing to show. Let  $L(\sigma_v^-)$  be as before. We have  $L(\sigma_v^-) \leq L(\sigma_{S(v)}^-)$ . Since  $S$  is ergodic,  $L$  is constant almost everywhere. Thus  $L(\sigma_v) = L(\sigma_v^-)$  thus  $\sigma_v = \sigma_v^-$ . The same holds for  $w$ , thus since  $\sigma_w^- = \sigma_v^-$  we have  $\sigma_w = \sigma_v$ .

(ii) We have  $N(\sigma_v^-) \leq N(\sigma_{S(v)}^-)$ , thus the lemma follows since  $S$  is ergodic.  $\square$

Let  $D$  stand for  $Disc(v, int)$ ,  $Disc(v, a)$ , or  $Disc(v, b)$ .

**Remark 3.4.9.** *For two sets  $A_i, A_j \in D$  the relation  $dimAff(A_i, A_j) = 2$  is an equivalence relation. Indeed consider three sets  $A_i, A_j, A_k$  such that  $A_i \sim A_j$ , and  $A_j \sim A_k$ . Since the line  $m + \mathbb{R}\theta$  passes through  $A_i, A_j, A_k$ , we deduce  $A_i \sim A_k$ .*

Then we can show

**Proposition 3.4.10.** *The set  $V \setminus X$  is at most countable.*

*Proof:* Let  $v \in V$ . Lemma 3.4.1 implies that we have for each pair of discontinuities an equation  $m = F(\theta)$  or  $f(\theta) = 0$ . Denote the set  $D$  by  $A_0, \dots, A_n, \dots$ . Either there exist discontinuities  $A_i, i = 0, 1, 2, 3$ , such that the equations related to  $(A_0, A_i)$  are of the form  $m = F(\theta)$  or not.

- First assume it is not the case. Then for any subset of  $D \setminus \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  two elements give equations of the form  $f(\theta) = 0$ . By Remark 3.4.9 all the discontinuities in the set  $D \setminus \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$  are in a single hyperplane. Thus all the discontinuities of  $D$  are in a finite union of hyperplanes. We do the same thing for  $Disc(v, a)$  and  $Disc(v, b)$ . We conclude  $v \in X$ .

- Now we treat the case where we obtain at least three equations of the form  $m = F(\theta)$  for some choice of  $(m, \theta)$ .

Corollary 3.4.4 shows that two such equations are different since the discontinuities are not in the union of surfaces. Thus consider the three first equations  $m = F(\theta) = G(\theta) = H(\theta)$ . It gives two equations  $(F - G)(\theta) = (F - H)(\theta) = 0$ . Those two equations are different by Corollary 3.4.4, since  $F, G, H$  are different. We deduce that the direction  $\theta$  is solution of a system of two independant equations, thus it is unique. We remark that the vertices which appear in unfoldings have their coordinates in a countable set  $\mathcal{C}$ . Indeed we start from a finite number of points corresponding to the vertices and at each step of the unfolding we reflect them over some faces of  $P$ . Thus at each step there are a finite set of vertices. Moreover the coefficients of the edges are obtained by difference of coordinates of vertices. By the same argument the coefficients of cartesian equations of the hyperplanes which contains faces live in a countable set  $\mathcal{C}$ . There are only a countable collection of functions  $m = F(\theta)$  which arise. Thus the solution  $\theta$  corresponding to the equations  $m = F(\theta) = G(\theta) = H(\theta)$  lives in a countable set. It determines  $(m, \theta)$ . The number of words associated to the orbit of  $(m, \theta)$  is countable by Lemma 3.4.6. Thus the set of such words is countable.  $\square$

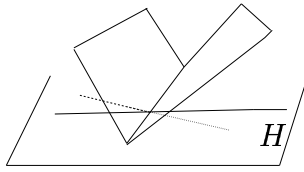


FIG. 3.2 – Coding of a word

### 3.5 Proof of Theorem 3.1.1

**Lemma 3.5.1.** *Suppose that  $\mu$  is an ergodic measure supported in  $\Sigma \setminus \phi(E_0)$  such that  $\mu(X) = 1$ . Then  $h_\mu(S) = 0$ .*

*Proof:* By Lemma 3.4.8 we can assume there is a constant  $L \geq 0$  such that  $L(\sigma_v^-) = L$ . Suppose first that  $L > 0$ . Suppose  $v \in \text{support}(\mu)$ . This implies that  $\text{Disc}(v, \text{int})$  is contained in a single plane. If  $w \in \text{support}(\mu)$  satisfies  $w_i = v_i$  for  $i \geq 0$  then  $\text{Disc}(w, \text{int})$  is contained in the same plane. Each trajectory in  $\phi(E_0)$  which approximates the future of  $v$  cuts this plane in a single point. Consider these sequence of approximating trajectories which converges to  $(m, \theta)$ . The limit of these trajectories cuts the surface at one (or zero) points. The point where it cuts the surface determines the backwards unfolding, and thus the backwards code. Thus if we ignore for the moment the boundary discontinuities the knowing the future  $v_0, v_1, v_2, \dots$  determines  $O(n)$  choices of the past  $v_{-n}, \dots, v_{-1}$ .

The boundary discontinuities and the case  $L(\sigma_v^-) = 0$  are treated analogously. Let  $(m, \theta) = \sigma_v^-$  (or one of the boundary points of  $\sigma_v^-$  in the case above). By Lemma 3.4.8 we can assume that  $\text{Disc}(v, m)$  is contained in  $N$  planes, and that iff  $w \in \text{support}(\mu)$  satisfies  $w_i = v_i$  for  $i \geq 0$  then  $\text{Disc}(w, \text{int})$  is contained in the same planes. Arguing as above, the point where an approximating orbit cuts these planes determines the past. Thus the future  $v_0, v_1, v_2, \dots$  determines  $O(n^N)$  choices of the past  $v_{-n}, \dots, v_{-1}$ .  $\square$

The preceding lemma and proposition allow to conclude

**Corollary 3.5.2.** *Let  $\mu$  an ergodic measure with support in  $\Sigma \setminus \phi(E_0)$ , then*

$$h_\mu(S) = 0.$$

*Proof:* This follows immediately from Lemma 3.5.1 and Proposition 3.4.10.  $\square$

Lemma 3.2.2 reduces the problem to the computation of  $h_{top}(S|\Sigma)$ . Moreover we have

$$h_{top}(S|\Sigma) = \sup_{\substack{\mu \\ \text{ergo}, \\ \text{supp}(\mu) \subset \phi(E_0)}} h_\mu(S|\Sigma) + \sup_{\substack{\mu \\ \text{ergo}, \\ \text{supp}(\mu) \subset \Sigma \setminus \phi(E_0)}} h_\mu(S|\Sigma),$$

then Corollaries 3.3.2 and 3.5.2 imply

$$h_{top}(S|\Sigma) = 0.$$



# Chapitre 4

## Trajectoires périodiques

On s'intéresse aux trajectoires de billard périodiques. Un moyen simple d'obtenir des trajectoires périodiques est donné par le résultat de stabilité : si une trajectoire périodique existe dans un polyèdre et si elle est stable, alors elle existera dans un polyèdre proche du précédent. Ainsi, il suffit d'obtenir une trajectoire périodique dans un polyèdre, pour avoir l'existence de trajectoire périodique sur toute une famille de polyèdres. A cet effet, on montre un lemme qui teste la périodicité d'un mot donné. De plus si le mot est périodique on peut calculer explicitement le point périodique associé, ainsi que l'application de premier retour sur la face. On traite ainsi le cas du tétraèdre.

On reproduit l'article sur les trajectoires périodiques [14], qui est soumis pour publication.

### 4.1 Introduction

We consider the billiard problem inside polyhedron. We start with a point of the boundary of the polyhedron and we move along a straight line until we reach the boundary, where there is reflection according to the mirror law. A famous example of a periodic trajectory is Fagnano's orbit : we consider an acute triangle and the foot points of the altitudes. Those points form a billiard trajectory which is periodic [66].

For the polygons some results are known. For example we know that there exists a periodic orbit in all rational polygons (the angles are rational multiples of  $\pi$ ), however it is open if there is a periodic orbit in every polygon even in every obtuse triangle. A good survey of what is known about periodic orbits can be found in the article [41] by Galperin, Stepin and Vorobets. In this article they define the notion of stability. They consider the trajectories which remain periodic if we perturb the polygon. They find a combinatorial rule which characterize the stable periodic words. Moreover they find some results about periodic orbits in obtuse triangles.

The study of the periodic orbits has also been done by some physicians. Indeed Glashow and Mittag prove that the billiard inside a triangle is equivalent to the system of three balls on a ring, [42]. Some others results can be found in the article of Ruijgrok and Rabouw [78].

In the polyhedral case much less is known. The result on the existence of periodic orbit in a rational polygon can be generalized, but it is less important, because the rational polyhedra are not dense in the set of polyhedra. There is no other general result, the other theorem

concerns the example of the tetrahedron. Stenman [85] shows, that a periodic word of length four exists in a regular tetrahedron, and Steinhaus in his book [84], cite Conway for a generalization to all tetrahedra, but it is false. The aim of this section is to find Fagnano's orbit in a regular tetrahedron and to obtain a rule for the stability of periodic words in polyhedra. This allows us to obtain a periodic orbit in a neighborhood of the tetrahedron. Moreover we give examples which prove that the trajectory is not periodic in all tetrahedra, and we find bounds for the neighborhood.

The organization of this work is the following. In Section 4.2 we recall some properties of the orthogonal group. In Section 4.3 we give an algebraic view of the periodic trajectories, it allows us to have a new proof of a result of Galperin, Kruger and Troubetzkoy [39]. In Section 4.4, we obtain the rule of stability, and finally, in the other sections we study the case of the tetrahedron.

## 4.2 Background

### 4.2.1 Orthogonal group of vectorial space

In the following we denote a linear map and its matrix by the same symbol.

**Definition 4.2.1.** *Let  $O_n$  be the group of the linear maps  $A$  of  $\mathbb{R}^n$  such that  $A.A^t = Id$ . Those elements are partitioned in two sets, the matrices of determinant 1, and the matrices of determinant  $-1$ . We note respectively those sets  $O_n(+)$ ,  $O_n(-)$ . The set  $O_n(+)$  is a subgroup of  $O_n$ .*

Now we only interest in the case  $n = 2$  or  $3$ . For  $n = 2$ , in an appropriate basis, an element of  $O_2(+)$  has the following matrix :

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

In an appropriate basis the matrices of the elements of  $O_3(+)$  are of the form

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$R$  has a real eigenvector  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  for the eigenvalue one. This eigenvector is called the axis of  $R$ ,  $\theta \in [0; 2\pi)$  is called the angle of  $R$ .  $R$  is called a rotation of angle  $\theta$  with axis the eigenvector  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

**Definition 4.2.2.** *A vectorial plane is noted  $(n)$  if  $n$  is the unit normal vector to the plane.*

A linear reflection over the plane  $(n)$  is the map

$$x \rightarrow x - 2(x.n)n,$$

where  $(x.n)$  denote the usual scalar product.

A linear reflection has the following matrix, in an appropriate basis :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Theorem 4.2.3.** [19] Let  $A \in O_3$ , then there exist  $r \geq 1$ , and linear reflections  $S_1, ..S_r$  such that

$$A = S_1...S_r.$$

We remark that an element of  $O_2(-)$  is a linear reflection, it is not the case in  $O_3(-)$  (see the following matrix) :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

An algebraic view of the rotation is given by the next result.

**Proposition 4.2.4.** [19] A rotation  $R$  with axis  $d$  and angle  $\theta$  has the following form

$$R(x) = (1 - \cos\theta)(x.d)d + \sin\theta x \wedge d + \cos\theta x.$$

where  $d$  is a vector of norm 1, and  $\wedge$  is the cross product.

## 4.2.2 Affine space

The space  $\mathbb{R}^3$  can be seen either as a vector space or as an affine space.

The first part of Section 4.2 gives a description of the linear isometries of  $\mathbb{R}^3$ , now we will give a description of the affine isometries.

**Definition 4.2.5.** An affine isometry  $a$  is an affine map of  $\mathbb{R}^n$  such that

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad d(a(x), a(y)) = d(x, y),$$

where  $d$  is the euclidean distance.

**Theorem 4.2.6.** [19] Suppose  $a$  is an affine isometry, then there exists an unique vector  $u$  and an unique affine map  $f$  such that

- $f$  has a fixed point or is equal to  $Id$ ,
- $f, t_u$  commute,
- $a = t_u.f$ ,
- $t_u$  is a translation of vector  $u$ .

With this theorem we can describe the affine isometries of  $\mathbb{R}^n$ .

**Corollary 4.2.7.** *Let  $a$  be an affine isometry. We consider an orthonormal basis with the fixed point of  $f$  as center. In this basis  $f$  is a linear map, moreover  $f$  is in  $O_n$ .*

**Definition 4.2.8.** *First assume that  $f$  belongs to  $O_3(+)$ , and is not equal to the identity. If  $u$  is not an eigenvector of  $f$  then  $a$  is called an affine rotation. The axis of  $a$  is the set of invariants points. If  $u$  is an eigenvector of  $f$ ,  $a$  is called a screw motion. In this case the axis of  $a$  is the axis of the affine rotation.*

*If  $f$  in  $O_2(-)$  or  $O_3(-)$  is a reflection and  $u$  is an eigenvector of  $f$  with eigenvector 1, then  $a$  is called a glide reflection.*

**Lemma 4.2.9.** *An affine map is of the form  $AX + B$ .*

*An affine rotation of axis  $d$  can be written*

$$X \mapsto A(X + u) - u,$$

*where  $d$  is the image by the translation  $t_u$  of the eigenvector of  $A$ .*

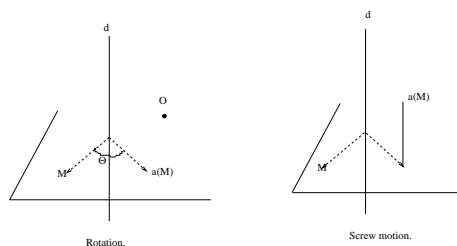


FIG. 4.1 – Affine isometries

It is a screw motion if and only if it has no fixed point. Thus the equation  $(A - I)X = -B$  has no solution. It implies that  $B$  is not orthogonal to the real eigenvector of  $A$  (or  $B_3 \neq 0$ ).

$$AX + B \text{ screw motion} \iff B \text{ not orthogonal to the eigenvector.}$$

• **Rodrigue's formula.** To finish this section we recall Rodrigue's formula which give the axis and the angle of the rotation product of two rotations. It can be done by the following method [20]. We assume that the two rotations are not equal to  $Id$ , or to a rotation of angle  $\pi$ . Let  $\theta, u$  the angle and axis of the first rotation, we call  $t$  the vector  $\tan \theta/2 \cdot u$  and  $t'$  the vector for the second rotation. Then the product of the rotations is given by the vector  $t''$  such that

$$t'' = \frac{1}{1 - t \cdot t'}(t + t' + t \wedge t').$$

### 4.3 Polyhedral billiard

We consider the billiard map inside a polyhedron  $P$ . We code the trajectory by the letters from a finite alphabet where we associate a letter to each face.

We call  $s_i$  the reflection in the face  $i$ ,  $S_i$  the linear reflection in this face. If we start with a point of direction  $\theta$  which has a trajectory of coding  $v = v_o..v_{n-1}$  the image of  $\theta$  is:  $S_{v_{n-1}}...S_{v_1}\theta$ . Indeed the trajectory of the point first meets the face  $v_1$ , then the face  $v_2$  *et caetera*.

If it is a periodic orbit, it meets the face  $v_0$  after the face  $v_{n-1}$  and we have :  
 $S_{v_0}S_{v_{n-1}} \dots S_{v_1}\theta = \theta = S_v\theta$ ,  $S_v$  is the product of the  $S_i$ , and  $s_v$  the product of the  $s_i$ .

We recall a result of [39]: the word  $v$  is the prefix of a periodic word of period  $|v|$  if and only if there exists a point whose orbit is periodic and has  $v$  as coding.

**Remark 4.3.1.** *If a point is periodic, the initial direction is an eigenvector of the map  $S_v$  with eigenvalue 1. It implies that in  $\mathbb{R}^3$ , for a periodic word of odd period,  $S$  is a reflection.*

**Definition 4.3.2.** *Let  $v$  be a finite word. The beam associated to  $v$  is the set of  $(m, \theta)$  where  $m$  is in the face  $v_o$  (resp. edge),  $\theta$  a vector of  $\mathbb{R}^3$  (resp.  $\mathbb{R}^2$ ), such that the orbit of  $(m, \theta)$  has a coding which begins with  $v$ . We denote it  $\sigma_v$ .*

*A vector  $u$  of  $\mathbb{R}^3$  (resp  $\mathbb{R}^2$ ) is admissible for  $v$ , with base point  $m$ , if there exists a point  $m$  in the face (edge)  $v_o$  such that  $(m, u)$  belongs to the beam of  $v$ .*

**Lemma 4.3.3.** *Let  $s$  be an isometry of  $\mathbb{R}^3$  not equal to a translation. By Theorem 4.2.6 let  $S$  be the associated linear map and  $u$  the vector of translation. Assume  $s$  is either a screw motion or a glide reflection. Then the points  $n$  which satisfy  $\overrightarrow{ns(n)} \in \mathbb{R}u$ , are either on the axis of  $s$  (if  $S$  is a rotation), or on the plane of reflection. In this case the vector  $\overrightarrow{ns(n)}$  is the vector of the glide reflection.*

*Proof:* We call  $\theta$  the eigenspace of  $S$  related to the eigenvalue one. We have  $s(n) = s(o) + S\overrightarrow{on}$  where  $o$ , the origin of the base will be chosen later. Elementary geometry yields  $\overrightarrow{ns(n)} = (S - Id)X + Y$  (where  $X = \overrightarrow{on}$ ,  $Y = \overrightarrow{os(o)}$ ) is inside the space  $\theta$ .

The map  $s$  has no fixed point by assumption, thus  $\overrightarrow{ns(n)}$  is non-zero. The condition gives that  $(S - Id)X + Y$  is an eigenvector of  $S$  associated to the eigenvalue one. Thus it implies

$$\begin{aligned} S((S - Id)X + Y) &= (S - Id)X + Y, \\ (S - Id)^2X &= -(S - I)Y. \end{aligned} \tag{4.1}$$

We consider first the case  $\det S > 0$ . We choose  $o$  on the axis of  $s$ . Then  $\theta$  is a line, we call the direction of the line by the same name. Since  $\det S > 0$  we have  $S \in O_3(+)$  and thus in an appropriate basis  $S$  has the following form  $\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , where  $R$  is a matrix of rotation of  $\mathbb{R}^2$ . The preceding equation is equivalent to

$$(R - Id)^2X' = -(R - Id)Y'.$$

where  $X'$  is the vector of  $\mathbb{R}^2$  such that  $X = \begin{pmatrix} X' \\ x \end{pmatrix}$  in this basis. Furthermore since  $S$  is a screw motion with axis  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  in these coordinates,  $Y$  has the following coordinates  $\begin{pmatrix} Y' \\ y \end{pmatrix}$  where  $Y' = 0$ . Since  $S \neq Id$ ,  $R - Id$  is invertible and thus  $X' = 0$ . Thus the vectors  $X$  solutions of this equation are collinear to the axis.

Consider now the case  $\det(S) < 0$ , by assumption  $S$  is a reflection, it implies that the eigenspace related to one is a plane. We will solve Equation 4.1, we keep notation  $X = \begin{pmatrix} X' \\ x \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} Y' \\ y \end{pmatrix}$ .

We can assume that  $o$  is on the plane of reflection. Moreover we can choose the coordinates such that that this plane is orthogonal to the line  $\mathbb{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . It implies that  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ , and  $y = 0$ . The equation 4.1 becomes  $4x = 0$ . It implies that  $X$  is on the plane of reflection. Since  $s$  is a glide reflection, the last point becomes obvious.  $\square$

**Proposition 4.3.4.** *Let  $P$  a polyhedron, the following properties are equivalent.*

- (1) *A word  $v$  is the prefix of a periodic word with period  $|v|$ .*
- (2) *There exists  $m \in v_0$  such that  $\overrightarrow{s_v(m)m}$  is admissible with base point  $m$  for  $vv_0$ , and  $\theta = \overrightarrow{s_v(m)m}$  is such that  $S\theta = \theta$ .*

**Remark 4.3.5.** *Assume  $|v|$  is even. In the polygonal case the matrix  $S_v$  can only be the identity, thus  $s_v$  is a translation. We see by unfolding that  $s_v$  can not have a fixed point, thus in the polyhedral case  $s_v$  is either a translation or a screw motion or a glide reflection. If we do not assume the admissibility in condition (2) it is not equivalent to condition (1) as can be seen in a obtuse triangle, or a right prism above the obtuse triangle and the word  $abc$ .*

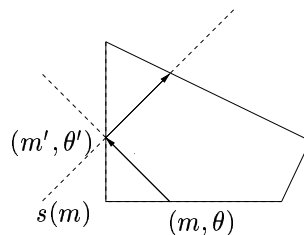


FIG. 4.2 – Billiard orbit and the associated map

*Proof:*

First we claim the following fact. The vector connecting  $T^{|v|}(m, \theta)$  to  $s_v(m)$  is parallel to the direction of  $T^{|v|}(m, \theta)$ . For  $|v| = 1$  if the billiard trajectory goes from  $(m, \theta)$  to  $(m', \theta')$  without reflection between, then the direction  $\theta'$  is parallel to  $\overrightarrow{s(m)m'}$ , where  $s$  is the reflection over the face of  $m'$  see Figure 4.2. Thus the claim follows combining this observation with an induction argument.

Next assume (1). Then there exists  $(m, \theta)$  periodic. We deduce that  $S\theta = \theta$ , moreover this direction is admissible. Then the claim implies that  $\overrightarrow{s_v(m)m} = \theta$  and thus is admissible for  $vv_0$ .

Finally assume (2). First we consider the case where  $S \neq Id$ . Lemma 4.3.3 implies that  $m$  is on the axis of  $s$  if  $|v|$  is even, otherwise on the plane of reflection. If  $|v|$  is even then  $\theta = \overrightarrow{s(m)m}$  is collinear to the axis of the screw motion. Since we have assumed  $\overrightarrow{s_v(m)m}$  admissible we deduce that  $\theta$  is admissible with base point  $m$ . If  $|v|$  is odd then Lemma 4.3.3 implies that  $\theta$  is the direction of the glide. The hypothesis implies that  $\theta$  is admissible for  $v$ . Now we prove that  $(m, \theta)$  is a periodic trajectory. We consider the image  $T^{|v|}(m, \theta)$ . We denote this point  $(p, \theta')$ . We have by hypothesis that  $p$  is in  $v_0$ . The above claim implies that  $\overrightarrow{s_v(m)p}$  is parallel to the direction  $\theta'$ . The equation  $S\theta = \theta$  gives  $\theta' = \theta$ . Thus we have  $\overrightarrow{s_v(m)m}$  is parallel to  $\overrightarrow{s_v(m)p}$ , since we do not consider direction included in a face of a polyhedron this implies  $p = m$ . Thus  $(m, \theta)$  is a periodic point.

If  $S = Id$ , then  $s$  is a translation of vector  $\overrightarrow{s_v(m)m} = u$ . The vector  $u$  is admissible. Then we consider a point  $m$  on the face  $v_0$  which is admissible. Then we show that  $(m, u)$  is a periodic point by the same argument related to the claim.  $\square$

Thus we have a new proof of a result of [39]:

**Theorem 4.3.6.** *Let  $v$  a periodic word of even length. The set of periodic points in the face  $v_0$  with code  $v$  and length  $|v|$  can have two shapes. Either it is an open set or it is a point.*

*If  $v$  is a periodic word of odd length, then the set of periodic points in the face  $v_0$  with code  $v$  and period  $|v|$  is a segment.*

*Proof:* Assume first  $|v|$  is even, we will use Proposition 4.3.4. If  $S_v$  is the identity, then the periodic points are the points such that the coding of the billiard orbit in the direction of the translation begins with  $v$ , otherwise there is a single point, at the intersection of the axis of  $s$  and  $v_0$ . However the set of points with code  $v$  is still an open set.

If  $|v|$  is odd, then  $S_v$  is a reflection, and Proposition 4.3.4 implies that the periodic points with period  $|v|$ , and a code beginning by  $v$ , are at the intersection of two planes.  $\square$  Moreover our proof gives an algorithm to locate this set in the face. We will use it in Section 4.6.

## 4.4 Stability

### 4.4.1 Polygons

In the general study of polygonal billiards, we define the following topology on the set of  $k$ -gons, i.e polygons with  $k$  vertices: Since the study of billiard is invariant by isometry and similarity, we fix an edge of the polygon, and we assume it has length one. Then a  $k$ -gon is given by  $k - 2$  points of  $\mathbb{R}^2$ . Thus we define the topology by the topology of  $\mathbb{R}^{2(k-2)}$ , and we call  $B$  the balls of this topology.

Now the notion of stability is given by the definition.

**Definition 4.4.1.** *Let  $P$  a polygon and  $v$  the prefix of a periodic word of period  $|v|$ . The word  $v$  is called stable if there exists  $\varepsilon > 0$  such that  $\forall Q \in B(P, \varepsilon)$   $v$  is a periodic word of period  $|v|$  in  $Q$ .*

**Remark 4.4.2.** *We only consider small perturbations because it is possible that the word does not exist in the new polyhedron. For example Fagnano's orbit exists in all acute triangles but not in a right triangle, and similarly for triangular prisms. Thus the size of the neighborhood is related to the polyhedron.*

Galperin, Stepin and Vorobets [41] have established a criterium for the stability of a periodic word  $v$  in a polygon :

**Criterium:** A word  $v = v_0..v_{2n-1}$  is stable if and only if  $\sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i v_i = 0$ .

We remark that we have

**Lemma 4.4.3.**  $ss's'' = s''s's$  for any  $s, s', s'' \in O_2(-)$ .

*Proof:* The matrix  $ss's''$  is an element of  $O_2(-)$ , thus it is a reflection, thus it is equal to its inverse.  $\square$

Lemma 4.4.3 implies that, in  $\mathbb{R}^2$ ,  $S_v$  can be equal to the identity without any assumption on the geometry of  $P$ . Thus we deduce the following criterium for the stability of periodic billiard trajectories in  $\mathbb{R}^2$  :

**Corollary 4.4.4.** *A word  $v$  of even length is stable in a polygon if and only if we can prove that  $S_v = Id$  by make use of the equality  $ss's'' = s''s's$ , for all elements of  $O_2(-)$ .*

With this condition we have another proof of the criterium of Galperin, Stepin and Vorobets [41].

**Lemma 4.4.5.** *We introduce the two morphisms  $\phi, \psi$  of monoids such that :*

*For all letters  $a, b, c$  we have  $\phi(abc) = cba$ .*

*For all letters  $a, b, c$  we have  $\psi(baac) = bc$ .*

*Then two following facts are equivalent for a word  $v$  of length  $2n$  :*

(1)  $\sum_{i \leq 2n-1} (-1)^i v_i = 0$ .

(2) *There exist  $i, j \in \mathbb{N}$  such that  $\phi^i \psi^j(v) = \varepsilon$ , where  $\varepsilon$  is the empty word.*



*Proof:* Let  $v$  a finite word. We fix the letters at the odd places, then the map  $\phi$  exchanges the letters at even places. Each iterate of  $\phi$  is a transposition, since the transpositions generate the permutation group we can exchange the even letters as we want.

Assume (1) then each letter appears the same number of times at an even or odd place. Then we exchange the even letters such that we can apply  $\psi$ , and we obtain the empty word. Assume (2), then the preceding argument shows that each letter appears the same number of times at an even or odd place.  $\square$

We remark that Lemma 4.4.3 is false in  $\mathbb{R}^3$ , since  $O_3(-)$  does not only contain reflections.

## 4.4.2 Polyhedra

### Notations and definitions

First of all we define the topology on the set of polyhedra with  $k$  vertices. As in the polygonal case we identify this set with  $\mathbb{R}^{3(k-2)}$ . But we remark the following fact: Consider a polyhedron  $P$  such that a face of  $P$  is not a triangle. Then we can find a perturbation of  $P$ , as small as we want, such that the new polyhedron has a different combinatorial type (*i.e.* the number of vertices, number of edges, or number of faces is different).

In this case consider a triangulation of each face which does not add new vertices. Consider the set of all such triangulations of all faces. There are finitely many such triangulations. Each can be considered as a combinatorial type of the given polyhedron. Let  $B(P, \varepsilon)$  be the ball of radius  $\varepsilon$  in  $\mathbb{R}^{3(k-2)}$  of polyhedra  $Q$ . If  $P$  has a single combinatorial type,  $\varepsilon$  is chosen so small that all  $Q$  in the ball have the same combinatorial type. If  $P$  has several combinatorial types, then  $\varepsilon$  is taken so small that all  $Q$  have one of those combinatorial types. The definition of stability is now analogous to the definition in polygons.

In another way we see that if  $v$  is a periodic word in  $P$  and  $g$  a piecewise similitude, then if  $v$  exists in  $g(P)$  it is always a periodic word. We note that the notion of periodicity only depends on the normal vectors to the planes of the faces.

### Theorem

Our main result is the following,

**Theorem 4.4.6.** *Let  $P$  a polyhedron and  $v$  the prefix of a periodic word of period  $|v|$  in  $P$ . If the period is even, and  $S_v$  is different from the identity, then  $v$  is stable. If the period is odd, then the word is stable if and only if  $S_v$  is constant as a function of  $P$ .*

*Proof:* First consider the case of period even. The matrix  $S = S_v$  is not the identity, and  $\theta = \theta_v$  is the eigenvector associated to the eigenvalue one. First note that by continuity  $v$  persists for sufficiently small perturbations of the polyhedron. Fix a perturbation and let  $B = S_v^Q$  be the resulting rotation for the new polyhedron  $Q$ . We will prove that the eigenvalue of  $S$  is a continuous function of  $P$ . We take the reflections which appear in  $v$  two by two. The product of two of those reflections is a rotation. We only consider the rotations different from the identity. The axes of the rotations are a continuous map as a function of  $P$  since they are at the intersection of two faces. Then Rodrigues's formula implies that the axes of the rotation, product of two of those rotations, are continuous maps of the polyhedron, under

the assumption that the rotation is not the identity (because  $t$  must be of non-zero norm). Since  $S^P$  is not equal to  $Id$ , there exists a neighborhood of  $P$  where  $S^Q \neq Id$ . It implies that the axis of  $S^P$  is a continuous function of  $P$ . Thus the two eigenvectors of  $B, S$  are near if  $B$  is sufficiently close to  $S$ . The direction  $\theta$  was admissible for  $v$ , we know that the beam of  $v$  is an open set of the phase space [39], so we have for  $Q$  sufficiently close to  $P$  that  $\alpha$  (the real eigenvector of  $B$ ) is admissible for the same word. Moreover the foot points are not far from the initial points because they are on the axis of the isometries. Thus the perturbed word is periodic by Proposition 4.3.4.

If the length of  $v$  is odd, then Remark 4.3.1 implies that  $S$  is a reflection. We have two cases: Either  $S_v$  is constant, or not. If it is not a constant function, then in any neighborhood there exists a polyhedron  $Q$  such that  $S_v^Q$  is different from a reflection. Then the periodic trajectory can not exist in  $Q$ . If  $S_v$  is constant, then it is always a reflection, and a similar argument to the even case shows that the plane of reflection of  $S$  is a continuous map of  $P$ . It finishes the proof.  $\square$

An obvious consequence is

**Corollary 4.4.7.** *All the words of length odd are stable in a polygon. All the words in the cube are unstable. All the words in a right prism such that the projection of the word is not stable in the polygonal basis are unstable.*

The first point was already mentioned in [41].

*Proof:* For the first point the proof is the same as the proof of the theorem. Indeed if  $|v|$  is odd then  $s$  has a real eigenvector, and we can apply the proof.

The period two trajectory which hits the top and the bottom of the prism is clearly unstable. Let  $v$  be any other periodic word, and  $w$  the word corresponding to the projection of  $v$  to the base of the prism assumed to be unstable. We perturb a vertical face of the prism such that this face contains an edge of  $w$ . The word  $v$  can not be periodic in this polyhedron.  $\square$

We remark that the two and three dimensional cases are different for the periodic trajectories of odd length. They are all stable in one case, and all unstable in the second. Recently Vorobets has shown that if  $S_v = Id$  then the word is not stable [92].

## 4.5 Background about triangles

First we fix some notation :

**Definition 4.5.1.** *A fagnano's orbit in a triangle or a tetrahedron, is a periodic billiard orbit which pass one time through each edge, or face of the billiard before coming back.*

**Lemma 4.5.2.** *Fagnano's orbit exists if and only if the triangle is acute.*

*Proof:* We consider a triangle which vertices  $A, B, C$ .

We apply Proposition 4.3.4. The map  $s_a s_b s_c$  is a glide reflection. The image of  $A$  satisfies :  $s(A) = s_a(A)$ . So we see by elementary geometry (Thales theorem) and Figure 3, that the middle of the segment  $[As(A)]$  is on the axis. Since this point is the foot of the altitude, we

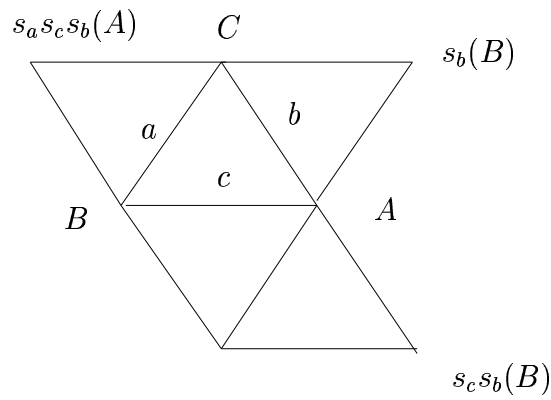


FIG. 4.3 – Proof for the Fagnano's word of triangles.

see, with Proposition 4.3.4 that the foot point of the altitude is the periodic point. And the foot point is inside the edge if and only if the triangle is acute.  $\square$

## 4.6 Tetrahedron

### 4.6.1 Regular tetrahedron

We consider a regular tetrahedron. To be clear we recall the definition.

**Definition 4.6.1.** [19] *A tetrahedron is the convex hull of four points which are not on a single plane. Moreover it is the only convex polyhedron such that each vertex is on three faces, and such that each face has three vertices.*

*A tetrahedron is regular if all the edges have the same length.*

We can construct a periodic trajectory of length four, which is the generalization of Fagnano's orbit. To do this we introduce the appropriate coding (see Figure 4.4).

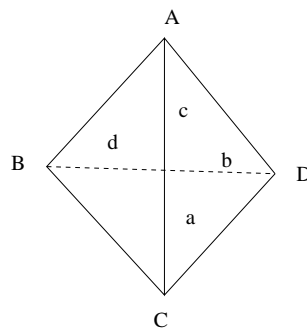


FIG. 4.4 – Coding of a tetrahedron

**Lemma 4.6.2.** *Let  $ABCD$  a regular tetrahedron, with the natural coding. If  $v$  is the word  $adcb$ , there exists a direction  $\theta$ , there exists an unique point  $m$  such that  $(m, \theta)$  is periodic and has  $v$  as prefix of its coding. Moreover  $m$  is on the altitude of the triangle  $BCD$  which starts at  $C$ .*

**Remark 4.6.3.** *If we consider the word  $v^n$ , the preceding point  $m$  is the unique periodic point for  $v^n$ . Indeed the map  $s_{v^n}$  has the same axis as  $s_v$ , and we use Proposition 4.3.4.*

*Proof:* The lemma has already been proved in [85], but we rewrite it in a different form with the help of Proposition 4.3.4.

We have  $S_v = S_a.S_b.S_c.S_d = R_{DC}.R_{AB}$  where  $R_{DC}$  is the linear rotation of axis  $DC$ , it is a product of the two reflections. We compute the real eigenvector of  $S_v$ , and we obtain the point  $m$  at the intersection of the axis of  $s$  and the face  $BCD$ . We consider an orthonormal base of  $\mathbb{R}^3$  such that the points have the following coordinates, see [85]:

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad D = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \frac{\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

The matrices of  $S_a, S_d, S_c, S_b$  are:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Now we obtain  $S$ .

$$S = S_a S_b S_c S_d,$$

$$S = \frac{1}{81} \begin{pmatrix} -79 & -8 & 16 \\ 8 & 49 & 64 \\ -16 & 64 & -47 \end{pmatrix}$$

The real eigenvector is  $u = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Now we compute the vector  $N$  such that  $s(X) =$

$SX + N$ . To do this we use the relation  $s(A) = s_a(A)$ .  $s_a$  is the product of  $S_a$  and a translation of vector  $v$ . We obtain

$$v = \frac{\sqrt{2}}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$s(A) = \frac{5\sqrt{2}}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$N = \frac{\sqrt{2}}{81} \begin{pmatrix} 16 \\ 64 \\ 34 \end{pmatrix}.$$

We see that  $s$  is a screw motion. Finally we find the point at the intersection of the axis and the face  $a$ . The points of the axis verify the equation

$$SX + N = X + \lambda u.$$

where  $X$  are the coordinates of the point of the axis, and  $\lambda$  is a real number.

The point  $m$  is on the face  $a$  if we have

$$(\overrightarrow{Cm} | \overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{CD}) = 0.$$

So  $X$  is the root of the system made by those two equations. The last equation gives  $x+y+z = \frac{\sqrt{2}}{4}$ . We obtain

$$m = \frac{\sqrt{2}}{20} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

We remark that  $(\overrightarrow{Cm} | \overrightarrow{DB}) = 0$  which proves that  $m$  is on the altitude of the triangle  $BCD$ .  
□

In fact there are six periodic trajectories of length four, one for each of the word

$$abcd, abdc, acbd, acdb, adbc, adcb.$$

The six orbits come in pairs which are related by the natural involution of direction reversal. Now we can ask the same question in a non regular tetrahedron. Applying Theorem 4.4.6 yieldt.

**Proposition 4.6.4.** *The word  $abcd$  is periodic for all the tetrahedra in a neighborhood of the regular one.*

Now the natural question is to characterize the tetrahedron which contains this periodic word.

## 4.7 Stability for the tetrahedron

**Definition 4.7.1.** *A tetrahedron is acute if and only if in each face the orthogonal projection of the other vertex is inside the triangle.*

*A tetrahedron is right if and only if there exists a vertex, where the three triangles are right triangles.*

We recall that an acute triangle is a triangle where all the angles are less than  $\frac{\pi}{2}$ . For the polygons our definition is equivalent to the natural definition.

**Theorem 4.7.2.** *In any right tetrahedron Fagnano's orbit does not exist. There exists an open set of obtuse tetrahedron where Fagnano's orbit does not exist.*

### 4.7.1 Proof of Theorem 4.7.2

We consider a tetrahedron  $ABCD$  with vertices

$$A = (0, 0, 0) \quad B = (a, 0, 0) \quad C = (0, b, 0) \quad D = (0, 0, 1).$$

We study the word  $v = abcd$ .

We have  $S = S_a * S_d * S_c * S_b$ .

Since

$$S_b = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

we obtain  $S = -S_a$ , thus  $S$  has 1 for eigenvalue, and the associated eigenvector is the normal vector to the plane  $a$ . We remark that  $s(A) = s_a(A)$ . The fact that  $S = -S_a$  implies that  $S$  is a rotation of angle  $\pi$ , thus  $s$  is the product of a rotation of angle  $\pi$  and a translation.

Consider the plane which contains  $A$  and orthogonal to the axis of  $S$ , let  $O$  the point of intersection. Then  $S$  is a rotation of angle  $\pi$ , thus  $O$  is the middle of  $[AE]$ , where  $E$  is given by  $S(\overrightarrow{OE}) = \overrightarrow{OA}$ . It implies that the middle  $M$  of the edge  $[As(A)]$  is on the axis of  $s$ , see Figure 4.6. Clearly  $m$  is a point in the side  $ABC$ . If  $v$  is periodic then applying Proposition 4.3.4 yields that  $M$  is the base point of the periodic trajectory. Moreover since the direction of the periodic trajectory is the normal vector to the plane  $a$ , we deduce that  $A$  is on the trajectory. So the periodic trajectory cannot exist.

Now we prove the second part of the theorem. We give an example of obtuse tetrahedron where Fagnano's orbit does not exist.

In this example the point on the initial face, which must be periodic see Proposition 4.3.4, is not in the interior of the triangle.

We consider the tetrahedron  $ABCD$

$$A(0, 0, 0) \quad B(2, 0, 0) \quad C(1, 1, 0) \quad D(3, 2, 1).$$

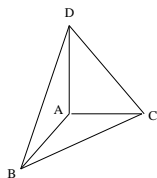


FIG. 4.5 – Right tetrahedron

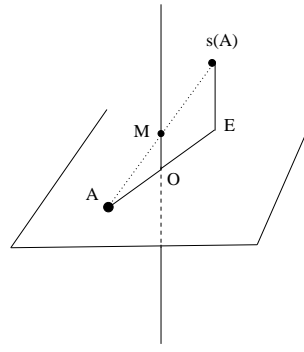


FIG. 4.6 – Screw motion associated to the word  $abcd$

We study the word  $v = abcd$ .

We obtain the matrix of  $S_v$

$$\begin{pmatrix} 1/33 & 8/33 & 32/33 \\ 104/165 & -25/33 & 28/165 \\ 128/165 & 20/33 & -29/165 \end{pmatrix}.$$

Now  $s$  is the map  $SX + N$  where  $N = \begin{pmatrix} 4/11 \\ 4/11 \\ -12/11 \end{pmatrix}$ .

$S$  has the following eigenvalue  $u = \begin{pmatrix} 9/8 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Now  $s$  is a screw motion and we find the point at the intersection of the axis of  $s$  and the face  $a$  : We must solve the system

$$Sm + N = m + \lambda.u \quad (4.2)$$

$$(\overrightarrow{Bm}.n) = 0 \quad (4.3)$$

It is equivalent to the system

$$\begin{pmatrix} S - Id & -u \\ n^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -N \\ 2 \end{pmatrix}.$$

where  $n$  is the normal vector to the face  $BCD$ .

$$n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

We obtain the matrix

$$\begin{pmatrix} -32/33 & 8/33 & 32/33 & -9/8 \\ 104/165 & -58/33 & 28/165 & -1/2 \\ 128/165 & 20/33 & -194/165 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

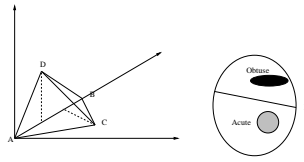


FIG. 4.7 – Space of tetrahedra

We obtain  $m$  :

$$m = \begin{pmatrix} 22/161 \\ 6/23 \\ -86/161 \end{pmatrix}.$$

But this point is not inside  $BCD$ . Moreover we see that this point is not on the altitude at  $BD$  which passes through  $C$ .

The tetrahedron is obtuse, due to the triangle  $ABD$ . The triangle  $BCD$  is acute, and the axis of  $s$  does not cut this face in the interior of the triangle.

Moreover we obtain that there exists a neighborhood of this tetrahedron, where Fagnano's word is not periodic. Indeed in a neighborhood the point  $m$  can not be in the interior of  $ABCD$ .

### 4.7.2 Space of tetrahedra

We give coordinates on the space of the tetrahedron. We call  $A, B, C, D$  the vertices of a tetrahedron. First we remark that a similitude does not change the properties related to the billiard. Thus we can suppose that two vertices  $A, B$  are fixed. Then we can chose arbitrary the third point  $C$ , and the last vertex must be in an other plane than  $ABC$ . Thus this space is of dimension five. The acute and obtuse tetrahedra make a partition of this space. The boundary of those two subspaces is the set  $X$  of tetrahedra such that the planes  $ABC, ABD$  are orthogonal. Thus it is of dimension four. Moreover the right tetrahedra form a subspace of this boundary, of dimension three. If we consider a tetrahedron  $ABCD \in X$  such that the planes  $BCA, ABD$  are orthogonal, we have for  $v = abcd$  :  $S_v = S_a S_d S_c S_b$ . Thus if the trajectory exists, the direction is the line  $CD$ , but the trajectory must start in the face  $BCD$  which contains this line, thus it is impossible.

In Figure 4.7, the grey set is the set where Fagnano's trajectory exists, and the black set is the set where it does not exist.

### 4.7.3 Computing

We have seen that for the regular tetrahedron, there exist three different periodic words of length four. We can give example where one of this periodic words exists without the other. In a face, we are interested in the three base points of the three periodic words. They form a triangle, which moves continuously when the parameters change. Thus it can appear that one vertex go out of the face's triangle. It appears in the picture 4.8. And in this example the tetrahedron is obtuse in the sense of the definition of section 4.7.



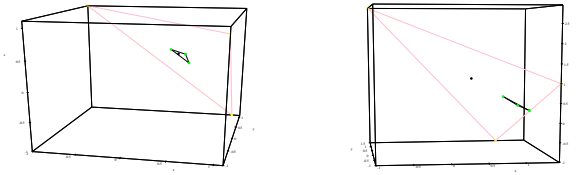


FIG. 4.8 – Examples



# Chapitre 5

## Échanges de rectangles

On s'intéresse ici à une sous-classe de l'ensemble des échanges de rectangles. Pour cette classe on montre la minimalité, et on calcule la complexité.

### 5.1 Minimalité : Résultats connus

#### 5.1.1 Échanges d'intervalles

Tout d'abord nous allons rappeler certains résultats sur les échanges d'intervalles. De manière précise un échange d'intervalles bijectif  $T$  est la donnée d'une partition finie  $D_i$  de  $[0; 1[$  en intervalles telle que  $T$  restreinte à  $D_i$  soit une translation. On appelle  $D_\infty$  les orbites des extrémités de segments de la partition. Keane a introduit les conditions suivantes [56].

**conditions de Keane.**

(1) L'orbite d'un point  $m$  est infinie.

(2) Supposons qu'il existe  $F$  union finie d'intervalles telle que  $TF = F$  et  $\partial F \in D_\infty$ , alors  $F = [0; 1[$ .

Keane a alors montré que ces conditions sont équivalentes à la minimalité de l'échange d'intervalles. Il a ensuite exhibé une condition appelée condition IDOC qui implique ces conditions. Cette condition, facile à vérifier, est vraie pour presque tout échange d'intervalles. Elle signifie que les orbites des points de discontinuités sont infinies, et toutes distinctes.

#### 5.1.2 Échanges de rectangles

On veut étudier la minimalité du billard dans un polyèdre rationnel. Comme l'application de premier retour du flot est une isométrie par morceaux si l'on a bien choisi la section, on considère comme premier exemple un échange de rectangles muni d'une partition : appelons alors  $D$  les arêtes de cette partition. Dans son article Haller [49] donne la condition suffisante suivante pour qu'un échange de rectangles soit minimal. Il se base sur l'article de Keane.

**Définition 5.1.1.** *Un échange de rectangles bijectif  $T$  est la donnée d'une partition finie ( $D_i$ ) de  $[0, 1]^2$  en rectangles, telle que  $T$  restreinte à  $D_i$  soit une isométrie.*

**Définition 5.1.2.** On appelle discontinuités et on note  $D_\infty$  les orbites des segments de la partition associée à l'échange de rectangles.

On appelle (C) les conditions :

(C1) L'orbite d'un point  $m = (x, y)$  est infinie dans les 2 coordonnées.

(C2) Soit  $F$  une union finie de rectangles tel que  $TF = F$  et

$$\partial F \in D_\infty$$

alors  $F = [0; 1]^2$ .

(C3) Soit  $s$  une arête et  $Q$  un polygone, alors il existe  $k$  tel que pour tout  $w$  dans  $s$  on ait

$$\text{Orb}_-(s) \cap \overset{\circ}{Q} \neq \emptyset \Rightarrow (w, T^{-1}w, \dots, T^{-k}w) \cap \overset{\circ}{Q} \neq \emptyset.$$

**Proposition 5.1.3 (Haller).** Soit  $T$  un échange de rectangles, alors la minimalité est impliquée par (C).

Dans le calcul de la complexité des échanges de rectangles on a obtenu une condition naturelle : la condition IDOC2. Si on fait le calcul de la complexité des échanges d'intervalles c'est la condition IDOC qui apparaît. La question naturelle est de savoir si IDOC2 implique la condition (C). C'est faux, un contre exemple a été donné par Boshernitzan, voir le dernier paragraphe et 5.3.

### 5.1.3 Rappels sur les rotations

On rappelle que si un flot est minimal, alors l'application de premier retour est minimale. Pour le cube l'application de premier retour est une rotation.

**Théorème 5.1.4.** Un flot de direction  $(a_1, \dots, a_n)$  sur le tore  $\mathbb{T}^n$  est minimal si et seulement si  $(a_i)_{i=1..n}$  sont  $\mathbb{Q}$  indépendants.

Une rotation d'angle  $(a_1, \dots, a_n)$  est minimale si et seulement si  $1, a_1, \dots, a_n$  sont  $\mathbb{Q}$  indépendants.

Cela revient à montrer le théorème de Dirichlet [50].

**Lemme 5.1.5.** Si  $\alpha_1, \dots, \alpha_n, 1$  sont  $\mathbb{Q}$  indépendants alors :

Il existe des suites  $(p_{1,m})_m, \dots, (p_{n,m})_m, (q_m)_m$  d'entiers tels que

$$\left| \alpha_i - \frac{p_{i,m}}{q_m} \right| < 1/q_m^{\frac{n+1}{m}} \quad \text{pour tout } i, m.$$

Il y a deux autres preuves standards de ce théorème. La première consiste à montrer que la rotation n'a pas de fonction invariante, ce qui implique la transitivité topologique, qui implique la minimalité car on est sur un groupe. En fait au cours de la preuve on montre l'ergodicité voir [51]. La deuxième est uniquement valable pour  $\mathbb{R}$ , et consiste à raisonner par l'absurde, et à utiliser le fait qu'un compact de  $\mathbb{R}$  est un intervalle, ce qui ne se généralise pas [51].

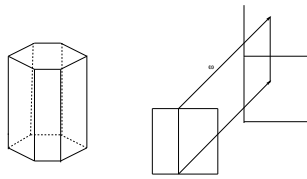


FIG. 5.1 – Premier retour

## 5.2 Échange de rectangles et billard dans un prisme droit

### 5.2.1 Définition

Nous allons montrer que l'application de premier retour du flot directionnel du billard dans un prisme droit rationnel  $P$  est un échange de rectangles particulier.

**Définition 5.2.1.** Soit  $(\chi_i)$  une partition finie de  $[0, 1]$  en  $d$  intervalles,  $T$  un échange d'intervalles relatif à la partition  $\chi$  et  $g$  une fonction constante sur chaque  $\chi_i$ . Un échange de rectangle  $R$  est dit de type  $(H)$  s'il s'écrit sous la forme

$$R(x, y) = (Tx, y + g(x)).$$

Soit  $\omega$  une direction. On sait que  $T_\omega$  est un échange affine de rectangles, voir le chapitre d'introduction. En fait on peut améliorer ce résultat en reprenant la méthode de Galperin [40]. Considérons une face verticale du polyèdre, et soit  $T_\omega$  l'application de premier retour dans la même direction, sur cette face. Nous allons voir que cette application est une isométrie.

**Lemme 5.2.2.** Il existe  $(\chi_i)$  une partition finie de  $[0; 1]$  en intervalles, telle que l'application  $T_\omega$  est de la forme  $(H)$ . La fonction  $g$  est constante sur chaque  $\chi_i$ . En d'autres termes  $T_\omega$  est un produit croisé entre une rotation et un échange d'intervalles.

*Démonstration:* Prenons une droite verticale dans cette face, et faisons le dépliage dans la direction choisie. Considérons le premier temps où l'on intersecte la face. La distance entre deux points de la verticale est la même que la distance entre les points d'arrivée. De plus il est clair que la translatée de la verticale ne peut intersecter que deux polyèdres. Cela implique que  $T_\omega$  est une rotation si  $x$  est fixé. De plus à  $y$  fixé il est clair que l'application est un échange d'intervalles, d'après les propriétés du billard polygonal.  $\square$

On peut remarquer que l'application  $T_\omega$  est la composée de  $s_v$  et d'une projection. Ici si  $S_v$  est une rotation son axe est orthogonal à la base du polyèdre, or la direction est vecteur propre, donc  $s$  est une translation. Si  $s$  est une réflexion glissée alors le plan est aussi orthogonal au plan de base et on obtient le caractère isométrique de  $T$ . Nous présentons une méthode pour étudier ce problème. Ceci permet de voir où se situent les problèmes.

## 5.2.2 Échange de rectangles

On étudie un type particulier d'échanges de rectangles. Pour cette classe on montre la transitivité topologique et on calcule la complexité. Le schéma de la preuve est le suivant. Grâce à une équation cohomologique on peut conjuguer cette application à un produit direct entre la rotation et l'échange d'intervalles. Cette conjugaison n'est valable que pour presque tout échange d'intervalles. Le problème est que les applications venant du billard forment un ensemble de mesure nulle. Ainsi on ne peut déduire de résultat, concernant le billard, de cette conjugaison.

Nous montrons le résultat suivant :

**Théorème 5.2.3.** *Presque tout échange de rectangles du type (H) est ergodique et de complexité équivalente à  $(d - 1)n^2$ .*

La preuve se déroule en plusieurs étapes.

## 5.2.3 Équation cohomologique

On rappelle le théorème de Marmi, Moussa et Yoccoz [63]. Un échange d'intervalles peut être décrit par la donnée de deux bijections  $\pi_0, \pi_1$  admissibles de  $\{1..d\}$  i.e

$$\pi_0(1..k) \neq \pi_1(1..k) \quad \forall \quad 1 < k < d,$$

et d'un vecteur  $(\lambda_i)_{i \leq d}$  avec  $\lambda_i > 0$ . Alors on a pour  $i \in \{1, \dots, d\}, 0 \leq x < \lambda_i$

$$T(x + \sum_{\pi_0(j) < \pi_0(i)} \lambda_j) = x + \sum_{\pi_1(j) < \pi_1(i)} \lambda_j.$$

Soit  $D(\pi_0, \pi_1)$  l'ensemble des vecteurs associés aux deux bijections.

**Théorème 5.2.4.** *Soient  $\pi_0, \pi_1$  deux bijections admissibles ; il existe alors un sous-ensemble de  $D$  de mesure pleine tel que pour tout échange d'intervalles dans cet ensemble et pour toute fonction  $g$  dont la restriction à chaque  $\chi_i$  est à variation bornée, il existe  $\phi$  solution bornée, de moyenne nulle de  $\phi - \phi.T = g$ .*

Le théorème est plus général car les applications  $T$  trouvées sont ergodiques.

**Remarque 5.2.5.** *Si  $T$  est une rotation, la preuve du résultat précédent est beaucoup plus facile, et se traite avec des séries de Fourier, [51].*

## 5.2.4 Conjugaison

On considère l'application suivante, et on conjugue l'échange de rectangles  $R$  par cette fonction :

$$C: (x, y) \longrightarrow (x, y + \phi(x)).$$

On cherche  $\phi$  tel que  $CRC^{-1}$  soit le produit d'une rotation et d'un échange d'intervalles, c'est-à-dire

$$CRC^{-1}(x, y) = (Tx, y + \gamma),$$

on obtient l'équation

$$\phi(Tx) - \phi(x) = \gamma - g(x).$$

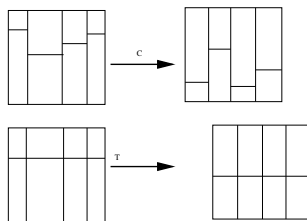


FIG. 5.2 – Échange de rectangles.

**Remarque 5.2.6.** *Ce type d'équation s'appelle une équation cohomologique, voir [51] pour une référence détaillée. Lorsque l'on applique la conjugaison l'angle de la rotation ne peut être choisi arbitrairement. En fait on a*

$$\int \phi(T)(x) - \int \phi = 0.$$

*Donc on doit choisir l'angle pour avoir même moyenne que  $g$ .*

### 5.2.5 Résolution

Le théorème 5.2.4 implique que l'équation a une solution. Ainsi on a montré la conjugaison de  $R$  avec un produit direct d'échange d'intervalles et de rotation. On utilise alors le théorème de Avila, Forni sur le mélange faible des échanges d'intervalles [10]. Si on fixe la permutation, alors presque tout échange d'intervalles est faiblement mélangeant. Comme on sait que le produit entre une application faiblement mélangeante et une application ergodique est ergodique on en déduit la preuve de la proposition. Cela entraîne que l'application est topologiquement transitive. Le résultat sur la complexité découle de manière évidente de la structure produit.

## 5.3 Temps de retour non borné

Nous donnons un exemple d'échange de rectangles avec temps de retour non borné. Soit  $\theta$  un nombre plus grand que  $1/2$ . On considère alors la rotation

$$(x, y) \longrightarrow (x + \theta, y + \theta) \mod 1.$$

On peut montrer qu'il existe une partie avec temps de retour non bornée.

**Lemme 5.3.1.** *Pour la rotation précédente, le temps de retour sur l'ensemble  $[0, \theta] \times [0, \theta]$  est non borné.*

La preuve se trouve dans [76].





# Chapitre 6

## Conclusion

Nous résumons ici les propriétés obtenues dans cette thèse. Nous avons obtenu quatre type de résultats

- Estimation de la complexité directionnelle dans certains polyèdres, et de la complexité globale dans le cube.
- Calcul de l'entropie du billard pour tout polyèdre convexe.
- Stabilité des trajectoires périodiques, et existence d'une orbite de Fagnano dans le tétraèdre.
- Ergodicité d'une sous-classe d'échange de rectangles.

Nous donnons, à cette intention, un tableau comparatif entre le billard polygonal et polyédral.

$p(n, \omega)$	$n + 1$ (carré)	$n^2 + n + 1$ (cube)
$p(n)$	$1 + \sum_{i=1}^n \phi(i)(n + 1 - i)$ (carré)	$n^4 \leq p(n) \leq n^6$ (cube)
$p(n, \omega)$	$an + b$	Conjecture : $n^2$
$p(n)$	$n^3$	Conjecture : $n^6$
entropie	$h_{top} = 0$	$h_{top} = 0$
Orbite de Fagnano	Triangle	Tétraèdre
Stabilité	condition sur le mot	condition sur une matrice
Stabilité	Tout mot de longueur impaire	Aucun mot de longueur impaire
Échange de morceaux	$p(n) = an + b$	$s(n + 1) - s(n) = k(n)$

Nous voyons ainsi des différences de comportement apparaître. Les ordres de grandeur des fonctions de complexité sont différents, et à partir des estimations faites dans le cas du cube et des prismes droits on peut conjecturer des valeurs pour la complexité dans n'importe quel polyèdre rationnel. De même la condition de stabilité des mots périodiques est totalement différente entre les des cas. Dans le cas bidimensionnel la condition était de

nature combinatoire, alors qu'en dimension supérieure la condition est algébrique. Par contre, les deux cas se comportent de la même façon du point de vue de l'entropie topologique.

Pour poursuivre la comparaison, une perspective intéressante semble être de classifier les rotations du tore  $\mathbb{T}^2$  en fonction de leur complexité. Dans le cas du cercle, on sait que la complexité est soit constante soit égale à  $n + 1$ . La situation semble plus complexe en dimension supérieure.

# Appendice

Dans cet appendice se trouve le programme Mupad qui donne l'existence d'une trajectoire périodique de longueur quatre dans le tétraèdre. Il peut aussi tracer la trajectoire.

```
sym:=proc(a,b,c,m)
local i,i1,i2,j1,j2,l,j;
begin
l:=matrix(3,1);
for i from 1 to 3 do
i1[i]:=b[i]-a[i];
i2[i]:=c[i]-a[i];
end_for:
j1[1]:=i2[3]*i1[2]-i2[2]*i1[3];
j1[2]:=i2[1]*i1[3]-i1[1]*i2[3];
j1[3]:=i1[1]*i2[2]-i2[1]*i1[2];

j2:=j1[1]^2+j1[2]^2+j1[3]^2;
for j from 1 to 3 do
l[j]:=m[j]-2*(j1[1]*(m[1]-a[1])+j1[2]*(m[2]-a[2])+
j1[3]*(m[3]-a[3]))*j1[j]/j2;
end_for:
return(l);
end_proc:
Cette procédure calcule le symétrique d'un point par rapport au plan abc.
```

```
norma:=proc(a,b,c)
local i,i1,i2,j;
begin
j:=matrix(3,1);
for i from 1 to 3 do
i1[i]:=b[i]-a[i];
i2[i]:=c[i]-a[i];
end_for:
j[1]:=i2[3]*i1[2]-i2[2]*i1[3];
```

```

j[2]:=i2[1]*i1[3]-i1[1]*i2[3];
j[3]:=i1[1]*i2[2]-i2[1]*i1[2];
return(j);
end_proc:

```

```

affine1:=proc(a,b,c)
local i,j;
begin
j:=sym(a,b,c,[0,0,0]);
i:=matrix([[sym(a,b,c,[1,0,0])[1]-j[1],sym(a,b,c,[0,1,0])[1]-j[1],
sym(a,b,c,[0,0,1])[1]-j[1]],
[sym(a,b,c,[1,0,0])[2]-j[2],sym(a,b,c,[0,1,0])[2]-j[2],
sym(a,b,c,[0,0,1])[2]-j[2]],
[sym(a,b,c,[1,0,0])[3]-j[3],sym(a,b,c,[0,1,0])[3]-j[3],
sym(a,b,c,[0,0,1])[3]-j[3]]]);
return(i);
end_proc:

```

Ce programme donne la matrice de la réflexion par rapport au plan abc

```

affine2:=proc(a,b,c)
local i;
begin
i:=sym(a,b,c,[0,0,0]);
return(i);
end_proc:

```

On donne le vecteur de la réflexion par rapport au plan abc

```

vec:=proc(a,b,c,d)
local i;
begin
i[1]:=affine2(b,c,d);
i[2]:=affine2(b,c,a);
i[3]:=affine2(b,a,d);
i[4]:=affine2(a,c,d);
return(i);
end_proc:

```

```

mat:=proc(a,b,c,d)
local i;

```

```

begin
i[1]:=affine1(b,c,d);
i[2]:=affine1(a,b,c);
i[3]:=affine1(a,b,d);
i[4]:=affine1(a,d,c);
return(i);
end_proc:
On stocke les matrices des réflexions du tétraedre dans une liste.

```

```

//prod:=proc(s,a)
//local i;
//begin
//i[1]:=s[1]*a[1];
//i[2]:=s[1]*a[2]+s[2];
//return(i);
//end_proc:
//compose des applications affines a puis s.

```

```

periode:=proc(a,b,c,d)
local i,i1,i2,j,k,k1,k2,k3,l1,l2,l3,l;
begin
i:=norma(b,c,d):
i1:=mat(a,b,c,d)[1]*mat(a,b,c,d)[2]*mat(a,b,c,d)[3]*mat(a,b,c,d)[4]:
k1:=numeric::eigenvectors(i1)[2]:
k2:=k1::dom::col(k1,1):
k3:=sqrt(k2[1]^2+k2[2]^2+k2[3]^2);
k[1]:=k2[1]/k3:
k[2]:=k2[2]/k3:
k[3]:=k2[3]/k3:
l1:=matrix([[i1[1,1]-1,i1[1,2],i1[1,3],k[1]],
[i1[2,1],i1[2,2]-1,i1[2,3],k[2]],
[i1[3,1],i1[3,2],i1[3,3]-1,k[3]],
[i[1],i[2],i[3],0]]);
j:=sym(b,c,d,a)-i1*a;
l2:=matrix([[ -j[1]], [-j[2]], [-j[3]], [b[1]*i[1]+b[2]*i[2]+b[3]*i[3]]]);
l3:=numeric::inverse(l1):
l:=l3*l2;
for i2 from 1 to 4 do
    l[i2]:=Re(l[i2]):
end_for:
return(l);
end_proc:

```

Cette procédure donne le point de base  
intersection de l'axe de s et de la face  
pour le mot adcb.

```
pts:=proc(a,b,c,d)
```

```
local i;
```

```
begin
```

```
i[1]:=periode(a,b,c,d);
```

```
i[2]:=periode(b,c,d,a);
```

```
i[3]:=periode(c,d,a,b);
```

```
i[4]:=periode(d,a,b,c);
```

```
return(i);
```

```
end_proc:
```

On calcule les points de base de la trajectoire associée au mot abcd.

```
posi:=proc(a,b,c,d)
```

```
local i,i1,i2,i3,l;
```

```
begin
```

```
i[1]:=pts(a,b,c,d)[1][1];
```

```
i[2]:=pts(a,b,c,d)[1][2];
```

```
i[3]:=pts(a,b,c,d)[1][3];
```

```
i1:=matrix([[b[1],c[1],d[1]],
```

```
[b[2],c[2],d[2]],
```

```
[b[3],c[3],d[3]],
```

```
[1,1,1]]);
```

```
i2:=matrix([[i[1]], [i[2]], [i[3]], [1]]):
```

```
i3:=numeric::matlinsolve(i1,i2):
```

```
if eval(min(i[1],i[2],i[3]))>0 then
```

```
l:=1;
```

```
else
```

```
l:=0;
```

```
end_if;
```

```
end_proc:
```

```
tourne:=proc(a,b,c,d)
```

```
begin
```

```
if posi(a,b,c,d)*posi(b,c,d,a)*posi(c,d,a,b)*posi(d,a,b,c)=1 then  
return(1);
```

```
//return(periode(a,b,c,d),periode(b,c,d,a),
```

```
periode(c,d,a,b),periode(d,a,b,c));
```

```

else return(0);
//return(print(mauvais));
end_if;
end_proc:

```

Cette procédure retourne l'existence de Fagnano avec 1 pour oui 0 pour non

```

proj:=proc(a,b,c,m)
local i,i1,i2,j1,j2,l,j;
begin
l:=matrix(3,1);
for i from 1 to 3 do
i1[i]:=b[i]-a[i];
i2[i]:=c[i]-a[i];
end_for:
j1[1]:=i2[3]*i1[2]-i2[2]*i1[3];
j1[2]:=i2[1]*i1[3]-i1[1]*i2[3];
j1[3]:=i1[1]*i2[2]-i2[1]*i1[2];

j2:=j1[1]^2+j1[2]^2+j1[3]^2;
for j from 1 to 3 do
l[j]:=m[j]-(j1[1]*(m[1]-a[1])+j1[2]*(m[2]-a[2])+
j1[3]*(m[3]-a[3]))*j1[j]/j2;
end_for:
return(l);
end_proc:

```

```

inte:=proc(a,b,c,m)
local i1,i2,i3,l;
begin
i1:=matrix([[b[1],c[1],a[1]],
[b[2],c[2],a[2]],
[b[3],c[3],a[3]],
[1,1,1]]):
i2:=matrix([[m[1]], [m[2]], [m[3]], [1]]):
i3:=numeric::matlinsolve(i1,i2):
print(i2,i1,i3):
if eval(min(i3[1],i3[2],i3[3]))>0 then
l:=1;
else
l:=0;
end_if;
//return(l);

```

```
end_proc:
```

On donne la position du point dans le triangle

```
obtus:=proc(a,b,c,d)
local i1,i2,i3,i4;
begin
i1:=proj(a,b,c,d):
i2:=proj(a,b,d,c):
i3:=proj(a,c,d,b):
i4:=proj(c,b,d,a):
if inte(a,b,c,i1)*inte(a,b,d,i2)*inte(a,c,d,i3)*inte(c,b,d,i4)=1 then
return(1):
else return(0):
end_if:
end_proc:
```

Cette procédure retourne si le tétraèdre est obtus ou aigu, avec définition selon la projection.

```
trace:=proc(a,b,c,d)
local i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8,i9,i10,i11,i12,i13,
i14,i15,i16,i17,i18,i19,i20,
j1,j2,j3,j4,j5,j6,j7,j8,j9,j10,j12,j11,t;
begin
i1:=point(a[1],a[2],a[3]);
i2:=point(b[1],b[2],b[3]);
i3:=point(c[1],c[2],c[3]);
i4:=point(d[1],d[2],d[3]);
i5:=pts(a,b,c,d)[1];
i6:=point(i5[1],i5[2],i5[3], Color=RGB:: Pink);
i7:=pts(a,b,c,d)[2];
i8:=point(i7[1],i7[2],i7[3], Color=RGB:: Blue);
i9:=pts(a,b,c,d)[3];
i10:=point(i9[1],i9[2],i9[3], Color=RGB:: Red);
i11:=pts(a,b,c,d)[4];
i12:=point(i11[1],i11[2],i11[3], Color=RGB:: Black);
i13:=proj(a,b,c,d):
i14:=point(i13[1],i13[2],i13[3], Color=RGB:: Blue):
i15:=proj(b,c,d,a):
i16:=point(i15[1],i15[2],i15[3], Color=RGB:: Blue):
i17:=proj(c,d,a,b):
i18:=point(i17[1],i17[2],i17[3], Color=RGB:: Blue):
i19:=proj(d,a,b,c):
```



```

i20:=point(i19[1],i19[2],i19[3], Color=RGB:: Blue):
j1:=polygon(i1,i2,i3, Closed=TRUE, Color=RGB:: Green);
j2:=polygon(i1,i3,i4, Closed=TRUE, Color=RGB:: Green );
j3:=polygon(i2,i3,i4, Closed=TRUE, Color=RGB:: Green);
j4:=polygon(i1,i2,i4, Closed=TRUE, Color=RGB:: Green);
j5:=polygon(i6,i8, Closed=TRUE, Color=RGB:: Black);
j6:=polygon(i10,i8, Closed=TRUE, Color=RGB:: Black);
j7:=polygon(i10,i12, Closed=TRUE, Color=RGB:: Black);
j8:=polygon(i12,i6, Closed=TRUE, Color=RGB:: Black);
j9:=polygon(i20,i3, Color=RGB:: Blue);
j10:=polygon(i18,i2, Color=RGB:: Blue);
j11:=polygon(i16,i1, Color=RGB:: Blue);
j12:=polygon(i14,i4, Color=RGB:: Blue);
t:= [Mode = List, [i1,i2,i3,i4,i6,i8,i10,i12,i14,
i16,i18,i20,j1,j2,j3,j4,j5,j6,j7,j8,j9,j10,j11,j12]]:
return(plot3d(BackGround = RGB::White, ForeGround = RGB::Black,
PointWidth = 70, PointStyle = FilledCircles,
Axes = Box, t)):

```

end\_proc:

On trace le tétraèdre et les quatre points

```

facedessin:=proc(a,b,c,d)
local i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8,i9,i10,i11,i12,i13,i14,j1,j2,j3;
begin
i1:=point(d[1],d[2],d[3]);
i2:=point(b[1],b[2],b[3]);
i3:=point(c[1],c[2],c[3]);
i5:=pts(a,b,c,d)[1];
i6:=point(i5[1],i5[2],i5[3], Color=RGB::Green);
i7:=pts(a,b,d,c)[1];
i8:=point(i7[1],i7[2],i7[3], Color=RGB::Green);
i9:=pts(a,c,b,d)[1];
i10:=point(i9[1],i9[2],i9[3], Color=RGB::Green);
i11:=pts(a,c,d,b)[1];
i12:=point(i11[1],i11[2],i11[3], Color=RGB::Green);
i13:=haut(b,c,d):
i14:=point(i13[1],i13[2],i13[3], Color=RGB::Blue):
j3:=polygon(i14,i1, Closed=TRUE, Color=RGB:: Blue):
j1:=polygon(i1,i2,i3, Closed=TRUE, Color=RGB:: Pink);
j2:=polygon(i6,i8,i10, Closed=TRUE, Color=RGB:: Black);
fac:= [Mode = List, [i1,i2,i3,i6,i8,i10,i12,j3,j1,j2]]:
return(plot3d(BackGround = RGB::White, ForeGround = RGB::Black,
PointWidth = 70, PointStyle = FilledCircles,
Axes = Box, fac)):

```

```
end_proc:
```

On trace les différents points bases d'une face

```
haut:=proc(a,b,c)
local i,i1,j,j1,j2;
begin
i:=norma(a,b,c):
i1[1]:=b[1]-a[1]:
i1[2]:=b[2]-a[2]:
i1[3]:=b[3]-a[3]:
j:=matrix([[i[1],i[2],+i[3]],
[i1[1],i1[2],i1[3]],
[-i1[2],-i1[1],0]]):
j1:=matrix([[a[1]*i[1]+a[2]*i[2]+a[3]*i[3]],
[i1[1]*c[1]+i1[2]*c[2]+i1[3]*c[3]],
[-i1[2]*a[1]-i1[1]*a[2]]]):
j2:=numeric::matlinsolve(j,j1)[1]:
return(j2):
end_proc:
```

```
deplie:=proc(a,b,c,d)
local i1,i2,i3,i4,i5,i6,i7,i8,j1,j2,j3,j4,j5,j6,
j7,j8,j9,j10,j11,j12,
k,k1,
u,x,X;
begin
i1:=point(a[1],a[2],a[3]);
i2:=point(b[1],b[2],b[3]);
i3:=point(c[1],c[2],c[3]);
i4:=point(d[1],d[2],d[3]);
j1:=polygon(i1,i2,i3, Closed=TRUE);
j2:=polygon(i1,i3,i4, Closed=TRUE);
j3:=polygon(i2,i3,i4, Closed=TRUE);
j12:=polygon(i1,i2,i4, Closed=TRUE);
i5:=sym(a,c,d,b);
i6:=point(i5[1],i5[2],i5[3]);
j4:=polygon(i1,i4,i6, Closed=TRUE);
j5:=polygon(i1,i3,i6, Closed=TRUE);
k:=polygon(i3,i4,i6, Closed=TRUE);
i7:=sym(a,d,i5,c);
i8:=point(i7[1],i7[2],i7[3]);
j6:=polygon(i8,i1,i6, Closed=TRUE);
```

```

j7:=polygon(i8,i1,i4, Closed=TRUE);
k1:=polygon(i8,i6,i4, Closed=TRUE);
u:=sym(d,i7,i5,a);
U:=point(u[1],u[2],u[3]);
j8:=polygon(U,i8,i6, Closed=TRUE);
j9:=polygon(U,i4,i6, Closed=TRUE);
x:=sym(i7,i5,u,d);
X:=point(x[1],x[2],x[3]);
j10:=polygon(X,i8,i6, Closed=TRUE);
j11:=polygon(X,i6,U, Closed=TRUE);
t:= [Mode = List, [i1,i2,i3,i4,i6,i8,j1,j2,j3,j4,
j5,j6,j7,j8,j9,j10,j11,j12,
k,k1,U,X]];
return(plot3d(BackGround = RGB::White, ForeGround = RGB::Black,
PointWidth = 70, PointStyle = FilledCircles,
Axes = Box, t));

end_proc:

```

A partir de quatre points on trace le tétraédre, et le dépliage associé.



# Bibliographie

- [1] A. Aberkane. Exemples de suites de complexité inférieure à  $2n$ . *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 8(2) :161–180, 2001. Journées Montoises d’Informatique Théorique (Marne-la-Vallée, 2000).
- [2] B. Adamczewski and D. Damanik. Linearly recurrent circle map subshifts and an application to Schrödinger operators. *Ann. Henri Poincaré*, 3(5) :1019–1047, 2002.
- [3] R. Adler, B. Kitchens, and C. Tresser. Dynamics of non-ergodic piecewise affine maps of the torus. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(4) :959–999, 2001.
- [4] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew. Topological entropy. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 114 :309–319, 1965.
- [5] P. Arnoux, S. Ferenczi, and P. Hubert. Trajectories of rotations. *Acta Arith.*, 87(3) :209–217, 1999.
- [6] P. Arnoux, C. Mauduit, I. Shiokawa, and J. Tamura. Complexity of sequences defined by billiard in the cube. *Bull. Soc. Math. France*, 122(1) :1–12, 1994.
- [7] P. Arnoux, C. Mauduit, I. Shiokawa, and J. Tamura. Rauzy’s conjecture on billiards in the cube. *Tokyo J. Math.*, 17(1) :211–218, 1994.
- [8] P. Arnoux and G. Rauzy. Représentation géométrique de suites de complexité  $2n + 1$ . *Bull. Soc.1 Math. France*, 119(2) :199–215, 1991.
- [9] P. Ashwin and A. Goetz. Polygonal invariant curves for a planar piecewise isometry. *Transaction of the American Mathematical Society*, 2004.
- [10] A. Avila and G. Forni. Weak mixing for interval exchange transformations and translation flows. *Preprint*, 2004. Preprint.
- [11] P. Bálint and S. Troubetzkoy. Ergodicity of two hard balls in integrable polygons. *Nonlinearity*, 17(6) :2069–2090, 2004.
- [12] Y. Baryshnikov. Complexity of trajectories in rectangular billiards. *Comm. Math. Phys.*, 174(1) :43–56, 1995.
- [13] N. Bedaride. Billiard complexity in rational polyhedra. *Regul. Chaotic Dyn.*, 8(1) :97–104, 2003.
- [14] N. Bedaride. Periodics orbits in polyhedral billiard. *Preprint*, 2004.
- [15] N. Bedaride. Billiard complexity in the cube. *Preprint*, 2005.
- [16] N. Bedaride. échange de rectangles, ergodicité et complexité. *Preprint*, 2005.
- [17] N. Bedaride. Entropy of polyhedral billiard. *Preprint*, 2005.

- [18] M. Berger. *Géométrie. Vol. 1.* CEDIC, Paris, 1977. Actions de groupes, espaces affines et projectifs. [Actions of groups, affine and projective spaces].
- [19] M. Berger. *Géométrie. Vol. 2.* CEDIC, Paris, 1977. Espaces euclidiens, triangles, cercles et sphères. [Euclidian spaces, triangles, circles and spheres].
- [20] M. Berger. *Géométrie. Vol. 3.* CEDIC, Paris, 1977. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes. [Convexes and polytopes, regular polyhedra, areas and volumes].
- [21] J. Bernat. Continued fractions and numeration in Fibonacci basis. *soumis*, 2004.
- [22] L. Bers. Spaces of Riemann surfaces. In *Proc. Internat. Congress Math. 1958*, pages 349–361. Cambridge Univ. Press, New York, 1960.
- [23] J. Berstel and M. Pocchiola. A geometric proof of the enumeration formula for Sturmian words. *Internat. J. Algebra Comput.*, 3(3) :349–355, 1993.
- [24] M. Bialy. Convex billiards and a theorem by E. Hopf. *Math. Z.*, 214(1) :147–154, 1993.
- [25] G. Birkhoff. Surface transformations and their dynamical applications. *Acta Math.*, 43 :1–119, 1922.
- [26] C. Boldrighini, M. Keane, and F. Marchetti. Billiards in polygons. *Ann. Probab.*, 6(4) :532–540, 1978.
- [27] M. Boshernitzan. A unique ergodicity of minimal symbolic flows with linear block growth. *J. Analyse Math.*, 44 :77–96, 1984/85.
- [28] M. Boshernitzan. Billiards and rational periodic directions in polygons. *Amer. Math. Monthly*, 99(6) :522–529, 1992.
- [29] N. Bourbaki. *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4–6.* Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Translated from the 1968 French original by Andrew Pressley.
- [30] X. Bressaud and G. Poggiaspalla. Classification des isométries par morceaux du plan euclidien. *Prépublication*, 2005.
- [31] L. A. Bunimovič. The ergodic properties of certain billiards. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 8(3) :73–74, 1974.
- [32] J. Buzzi. Piecewise isometries have zero topological entropy. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(5) :1371–1377, 2001.
- [33] J. Cassaigne. Complexité et facteurs spéciaux. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 4(1) :67–88, 1997. Journées Montoises (Mons, 1994).
- [34] J. Cassaigne, P. Hubert, and S. Troubetzkoy. Complexity and growth for polygonal billiards. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 52(3) :835–847, 2002.
- [35] B. Cipra, R. M. Hanson, and A. Kolan. Periodic trajectories in right-triangle billiards. *Phys. Rev. E (3)*, 52(2) :2066–2071, 1995.
- [36] H. S. M. Coxeter. *Introduction to geometry.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Reprint of the 1969 edition.
- [37] A. Eskin and H. Masur. Asymptotic formulas on flat surfaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(2) :443–478, 2001.

- [38] A. Eskin, H. Masur, and M. Schmoll. Billiards in rectangles with barriers. *Duke Math. J.*, 118(3) :427–463, 2003.
- [39] G. Gal’perin, T. Krüger, and S. Troubetzkoy. Local instability of orbits in polygonal and polyhedral billiards. *Comm. Math. Phys.*, 169(3) :463–473, 1995.
- [40] G. A. Gal’perin. The existence of nonperiodic and not everywhere dense billiard trajectories in polygons and polyhedra. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 275(1) :18–22, 1984.
- [41] G. A. Gal’perin, A. M. Stëpin, and Y. B. Vorobets. Periodic billiard trajectories in polygons : generation mechanisms. *Uspekhi Mat. Nauk*, 47(3(285)) :9–74, 207, 1992.
- [42] S. L. Glashow and L. Mittag. Three rods on a ring and the triangular billiard. *J. Statist. Phys.*, 87(3-4) :937–941, 1997.
- [43] A. Goetz. Dynamics of a piecewise rotation. *Discrete Contin. Dynam. Systems*, 4(4) :593–608, 1998.
- [44] A. Goetz. A self-similar example of a piecewise isometric attractor. In *Dynamical systems (Luminy-Marseille, 1998)*, pages 248–258. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.
- [45] A. Goetz and G. Poggiaspalla. Rotations by  $\pi/7$ . *Nonlinearity*, 17(5) :1787–1802, 2004.
- [46] E. Gutkin. Blocking of orbits and the phenom of security for the billiard in polygons and flat surfaces. *Prépublication IHES*, 2003.
- [47] E. Gutkin and N. Haydn. Topological entropy of polygon exchange transformations and polygonal billiards. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(4) :849–867, 1997.
- [48] E. Gutkin and S. Troubetzkoy. Directional flows and strong recurrence for polygonal billiards. In *International Conference on Dynamical Systems (Montevideo, 1995)*, volume 362 of *Pitman Res. Notes Math. Ser.*, pages 21–45. Longman, Harlow, 1996.
- [49] H. Haller. Rectangle exchange transformations. *Monatsh. Math.*, 91(3) :215–232, 1981.
- [50] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, fifth edition, 1979.
- [51] B. Hasselblatt and A. Katok. Principal structures. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 1–203. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [52] A. Heinis. The  $P(n)/n$ -function for bi-infinite words. *Theoret. Comput. Sci.*, 273(1-2) :35–46, 2002. WORDS (Rouen, 1999).
- [53] P. Hiemer and V. Snurnikov. Polygonal billiards with small obstacles. *J. Statist. Phys.*, 90(1-2) :453–466, 1998.
- [54] P. Hubert. Complexité de suites définies par des billards rationnels. *Bull. Soc. Math. France*, 123(2) :257–270, 1995.
- [55] A. Katok. The growth rate for the number of singular and periodic orbits for a polygonal billiard. *Comm. Math. Phys.*, 111(1) :151–160, 1987.
- [56] M. Keane. Interval exchange transformations. *Math. Z.*, 141 :25–31, 1975.
- [57] M. S. Keane and G. Rauzy. Stricte ergodicité des échanges d’intervalles. *Math. Z.*, 174(3) :203–212, 1980.

- [58] S. Kerckhoff, H. Masur, and J. Smillie. Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials. *Ann. of Math. (2)*, 124(2) :293–311, 1986.
- [59] A. N. Kolmogorov. A new metric invariant of transient dynamical systems and automorphisms in Lebesgue spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 119 :861–864, 1958.
- [60] A. N. Kolmogorov. Entropy per unit time as a metric invariant of automorphisms. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 124 :754–755, 1959.
- [61] D. Lind and B. Marcus. *An introduction to symbolic dynamics and coding*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [62] M. Lothaire. *Algebraic combinatorics on words*, volume 90 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002. A collective work by Jean Berstel, Dominique Perrin, Patrice Seebold, Julien Cassaigne, Aldo De Luca, Steffano Varricchio, Alain Lascoux, Bernard Leclerc, Jean-Yves Thibon, Veronique Bruyere, Christiane Frougny, Filippo Mignosi, Antonio Restivo, Christophe Reutenauer, Dominique Foata, Guo-Niu Han, Jacques Desarmenien, Volker Diekert, Tero Harju, Juhani Karhumaki and Wojciech Plandowski, With a preface by Berstel and Perrin.
- [63] S. Marmi, P. Moussa, and J.-C. Yoccoz. On the cohomological equation for interval exchange maps. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 336(11) :941–948, 2003.
- [64] H. Masur. Interval exchange transformations and measured foliations. *Ann. of Math. (2)*, 115(1) :169–200, 1982.
- [65] H. Masur. The growth rate of trajectories of a quadratic differential. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 10(1) :151–176, 1990.
- [66] H. Masur and S. Tabachnikov. Rational billiards and flat structures. In *Handbook of dynamical systems, Vol. 1A*, pages 1015–1089. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [67] C. T. McMullen. Coxeter groups, Salem numbers and the Hilbert metric. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 1(95) :151–183, 2002.
- [68] F. Mignosi. On the number of factors of Sturmian words. *Theoret. Comput. Sci.*, 82(1, Algorithms Automat. Complexity Games) :71–84, 1991.
- [69] T. Monteil. A counter-example to the theorem of Hiemer and Snurnikov. *J. Statist. Phys.*, 114(5-6) :1619–1623, 2004.
- [70] T. Monteil. Finite blocking property versus pue periodicity. *prépublication*, 2004.
- [71] T. Monteil. On the finite blocking property. *Annales institut Fourier*, A paraitre.
- [72] M. Morse and G. A. Hedlund. Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62 :1–42, 1940.
- [73] D. Ornstein. Bernoulli shifts with the same entropy are isomorphic. *Advances in Math.*, 4 :337–352 (1970), 1970.
- [74] K. Petersen. *Ergodic theory*, volume 2 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1983.
- [75] G. Poggiaspalla. Thèse de doctorat. *Université de la méditerranée*, 2003.
- [76] G. Poggiaspalla. Thèse de doctorat. *Université de la méditerrané*, page 63, 2003.



- [77] N. Pytheas Fogg. *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, volume 1794 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.
- [78] F. Rabouw and T. W. Ruijgrok. Three particles on a ring. *Phys. A*, 109(3) :500–516, 1981.
- [79] J. Rauch. Illumination of bounded domains. *Amer. Math. Monthly*, 85(5) :359–361, 1978.
- [80] G. Rauzy. Des mots en arithmétique. In *Avignon conference on language theory and algorithmic complexity (Avignon, 1983)*, pages 103–113. Univ. Claude-Bernard, Lyon, 1984.
- [81] J. Schmeling and S. Troubetzkoy. Inhomogeneous diophantine approximation and angular recurrence for polygonal billiards. *to appear*, 2002.
- [82] Y. G. Sinai. *Introduction to ergodic theory*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976. Translated by V. Scheffer, Mathematical Notes, 18.
- [83] Y. G. Sinai. *Hyperbolic billiards*. ICM-90. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1990. A plenary address presented at the International Congress of Mathematicians held in Kyoto, August 1990.
- [84] H. Steinhaus. *One hundred problems in elementary mathematics*. With a foreword by Martin Gardner. Basic Books Inc. Publishers, New York, 1964.
- [85] F. Stenman. Periodic orbits in a tetrahedral mirror. *Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math.*, 45(2-3) :103–110, 1975.
- [86] S. Tabachnikov. Billiards. *Panor. Synth.*, pages vi+142, 1995.
- [87] W. A. Veech. Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps. *Ann. of Math. (2)*, 115(1) :201–242, 1982.
- [88] W. A. Veech. Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards. *Invent. Math.*, 97(3) :553–583, 1989.
- [89] W. A. Veech. Erratum : “Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards”. *Invent. Math.*, 103(2) :447, 1991.
- [90] E. Vinberg. Reflection groups as coxeter groups, euclidean and hyperbolic reflection groups. *Edited by K. Ranestad, Summerschool Reflection groups*, 1998.
- [91] Y. B. Vorobets. Ergodicity of billiards in polygons : explicit examples. *Uspekhi Mat. Nauk*, 51(4(310)) :151–152, 1996.
- [92] Y. B. Vorobets. Periodic orbit in polygon. *Communication personnelle*, 2004.
- [93] A. N. Zemljakov and A. Katok. Letter to the editors : “Topological transitivity of billiards in polygons” (Mat. Zametki **18** (1975), no. 2, 291–300). *Mat. Zametki*, 20(6) :883, 1976.
- [94] A. N. Zemljakov and A. B. Katok. Topological transitivity of billiards in polygons. *Mat. Zametki*, 18(2) :291–300, 1975.



Dans cette thèse, on s'intéresse au billard dans un polyèdre. On étudie cette application en codant les orbites sur un alphabet fini. On étudie alors deux problèmes : la complexité des mots infinis obtenus, et l'existence de trajectoires périodiques. On montre que la complexité est reliée à la notion de diagonale généralisée : une diagonale généralisée est une trajectoire de billard, qui part d'une arête et qui arrive à une arête. On obtient alors, au premier chapitre, une nouvelle preuve du calcul de la complexité d'une rotation du tore  $\mathbb{T}^2$ , totalement irrationnelle. Cette preuve permet de plus, d'obtenir une estimation de la complexité directionnelle du billard dans certains prismes droits. Au deuxième chapitre, on obtient, grâce aux diagonales généralisées, une estimation de la complexité globale du billard cubique. On donne alors au chapitre trois une estimation valable dans n'importe quel polyèdre convexe. On montre en fait que le billard est d'entropie topologique nulle. Le chapitre quatre traite alors du problème des orbites périodiques. On donne une condition suffisante pour qu'un mot soit stable. On montre de plus l'existence d'une trajectoire périodique dans le tétraèdre régulier. Pour finir, on s'intéresse dans le chapitre cinq à une sous classe d'échange de rectangles. On montre que ces applications sont ergodiques et de complexité quadratique. Ces applications sont reliées au billard puisque, à direction fixée, l'application de premier retour est une application affine par morceaux.

**Mots clés :** *Théorie ergodique, billard, complexité, échange de polygones.*

---

## Polyhedral billiard.

In this work, we study polyhedral billiard. We code the orbit of a point with a letter by face. Then we study two sorts of problems : The complexity function of the billiard words, and the existence of periodic orbits. We show that the complexity function is related to the notion of generalized diagonal : A generalized diagonal is a billiard trajectory between two edges of the polyhedron. First we show a new proof for the computation of the complexity of a rotation of the torus  $\mathbb{T}^2$ . This proof allows us to obtain estimates for the complexity in some right prisms. Then we search for bounds of the global complexity in the case of the cube. Then we prove that the billiard in any convex polyhedron is of zero topological entropy. Then we study the periodic orbits. We find a sufficient condition for the existence of stable periodic words, and we obtain periodic trajectories of length four in a tetrahedron. Then we obtain ergodicity and equivalent for the complexity of a subclass of rectangle exchanges. This is related to the billiard map, since they represent the first return map to a transverse set.

**Keywords :** *Ergodic theory, billiard, complexity, polygonal exchanges.*