

Géométrie des variétés de Deligne-Lusztig, décompositions, cohomologie modulo ℓ et représentations modulaires

Olivier Dudas

Laboratoire de Mathématiques de Besançon

9 juin 2010

Définition

Un groupe fini H est **simple** si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et H lui-même.

Si $L \subset H$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de H "peut" se ramener à celle de L et H/L .

Classification des groupes finis simples

- ▶ Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- ▶ Les groupes alternés \mathfrak{A}_n pour $n \geq 5$;
- ▶ Les groupes simples de type de Lie : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q)$...
- ▶ 26 groupes dits *sporadiques*.

Définition

Un groupe fini H est **simple** si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et H lui-même.

Si $L \subset H$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de H "peut" se ramener à celle de L et H/L .

Classification des groupes finis simples

- ▶ Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- ▶ Les groupes alternés \mathfrak{A}_n pour $n \geq 5$;
- ▶ Les *groupes simples de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q) \dots$
- ▶ 26 groupes dits *sporadiques*.

Définition

Un groupe fini H est **simple** si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et H lui-même.

Si $L \subset H$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de H "peut" se ramener à celle de L et H/L .

Classification des groupes finis simples

- ▶ Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- ▶ Les groupes alternés \mathfrak{A}_n pour $n \geq 5$;
- ▶ Les *groupes simples de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q) \dots$
- ▶ 26 groupes dits *sporadiques*.

Définition

Un groupe fini H est **simple** si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et H lui-même.

Si $L \subset H$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de H "peut" se ramener à celle de L et H/L .

Classification des groupes finis simples

- ▶ Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- ▶ Les groupes alternés \mathfrak{A}_n pour $n \geq 5$;
- ▶ Les *groupes simples de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q) \dots$
- ▶ 26 groupes dits *sporadiques*.

Définition

Un groupe fini H est **simple** si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et H lui-même.

Si $L \subset H$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de H "peut" se ramener à celle de L et H/L .

Classification des groupes finis simples

- ▶ Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- ▶ Les groupes alternés \mathfrak{A}_n pour $n \geq 5$;
- ▶ Les *groupes simples de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q) \dots$
- ▶ 26 groupes dits *sporadiques*.

Définition

Un groupe fini H est **simple** si ses seuls sous-groupes distingués sont $\{1\}$ et H lui-même.

Si $L \subset H$ est un sous-groupe distingué, alors l'étude de H "peut" se ramener à celle de L et H/L .

Classification des groupes finis simples

- ▶ Les groupes cycliques d'ordre premier $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$;
- ▶ Les groupes alternés \mathfrak{A}_n pour $n \geq 5$;
- ▶ Les *groupes simples de type de Lie* : $\mathrm{PSL}_n(q)$, $\mathrm{PSO}_n(q) \dots$
- ▶ 26 groupes dits *sporadiques*.

+ des versions "presque" simples : $\mathrm{GL}_n(q)$, $\mathrm{SL}_n(q)$, $\mathrm{O}_n(q) \dots$

Soit H un groupe fini. L'étude des représentations consiste en l'étude des **actions linéaires de H** sur des espaces vectoriels, ou plus généralement sur des Λ -modules lorsque Λ est un anneau commutatif.

↪ déduction de propriétés structurelles du groupe à partir des outils puissants d'algèbre linéaire

↪ étude des symétries de l'espace des solutions d'un problème linéaire

Alternative ordinaire/modulaire :

- ▶ $\Lambda = K$ corps de caractéristique 0 : théorie des caractères.
- ▶ $\Lambda = k$ corps de caractéristique $\ell > 0$: représentations modulaires
 ↪ modules simples ou projectifs, blocs...

Soit H un groupe fini. L'étude des représentations consiste en l'étude des **actions linéaires de H** sur des espaces vectoriels, ou plus généralement sur des Λ -modules lorsque Λ est un anneau commutatif.

- ↪ déduction de propriétés structurelles du groupe à partir des outils puissants d'algèbre linéaire
- ↪ étude des symétries de l'espace des solutions d'un problème linéaire

Alternative ordinaire/modulaire :

- ▶ $\Lambda = K$ corps de caractéristique 0 : théorie des caractères.
- ▶ $\Lambda = k$ corps de caractéristique $\ell > 0$: représentations modulaires
↪ modules simples ou projectifs, blocs...

Soit H un groupe fini. L'étude des représentations consiste en l'étude des **actions linéaires de H** sur des espaces vectoriels, ou plus généralement sur des Λ -modules lorsque Λ est un anneau commutatif.

↪ déduction de propriétés structurelles du groupe à partir des outils puissants d'algèbre linéaire

↪ étude des symétries de l'espace des solutions d'un problème linéaire

Alternative ordinaire/modulaire :

- ▶ $\Lambda = K$ corps de caractéristique 0 : théorie des caractères.
- ▶ $\Lambda = k$ corps de caractéristique $\ell > 0$: représentations modulaires
↪ modules simples ou projectifs, blocs...

Soit H un groupe fini. L'étude des représentations consiste en l'étude des **actions linéaires de H** sur des espaces vectoriels, ou plus généralement sur des Λ -modules lorsque Λ est un anneau commutatif.

↪ déduction de propriétés structurelles du groupe à partir des outils puissants d'algèbre linéaire

↪ étude des symétries de l'espace des solutions d'un problème linéaire

Alternative ordinaire/modulaire :

- ▶ $\Lambda = K$ corps de caractéristique 0 : théorie des caractères.
- ▶ $\Lambda = k$ corps de caractéristique $\ell > 0$: représentations modulaires
 - ↪ modules simples ou projectifs, blocs...

But : comprendre la théorie des représentations modulaires de H à partir de celle des sous-groupes locaux (ℓ -sous-groupes et leurs normalisateurs) laquelle est généralement bien connue.

But : comprendre la théorie des représentations modulaires de H à partir de celle des sous-groupes locaux (ℓ -sous-groupes et leurs normalisateurs) laquelle est généralement bien connue.

Soit S un ℓ -sous-groupe de Sylow **abélien** de H

$$\Lambda H\text{-mod}$$

$$\Lambda N_H(S)\text{-mod}$$

avec Λ un certain anneau associé à ℓ .

But : comprendre la théorie des représentations modulaires de H à partir de celle des sous-groupes locaux (ℓ -sous-groupes et leurs normalisateurs) laquelle est généralement bien connue.

Soit S un ℓ -sous-groupe de Sylow **abélien** de H

$$b\Lambda H\text{-mod}$$

$$b'\Lambda N_H(S)\text{-mod}$$

avec Λ un certain anneau associé à ℓ .

But : comprendre la théorie des représentations modulaires de H à partir de celle des sous-groupes locaux (ℓ -sous-groupes et leurs normalisateurs) laquelle est généralement bien connue.

Conjecture de Broué

Soit S un ℓ -sous-groupe de Sylow **abélien** de H

$$D^b(b\Lambda H\text{-mod}) \simeq D^b(b'\Lambda N_H(S)\text{-mod})$$

avec Λ un certain anneau associé à ℓ .

↪ nombreuses conséquences numériques

But : comprendre la théorie des représentations modulaires de H à partir de celle des sous-groupes locaux (ℓ -sous-groupes et leurs normalisateurs) laquelle est généralement bien connue.

Conjecture de Broué

Soit S un ℓ -sous-groupe de Sylow **abélien** de H

$$D^b(b\Lambda H\text{-mod}) \simeq D^b(b'\Lambda N_H(S)\text{-mod})$$

avec Λ un certain anneau associé à ℓ .

\rightsquigarrow nombreuses conséquences numériques

$$H = \mathfrak{A}_5 = \mathrm{SL}_2(4) \text{ et } \ell = 5$$

	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
1	1	1	1	1	1
χ_3	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ'_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	0	1	0	0

$$N_H(S) = D_5$$

	1	s	r	r^2
1	1	1	1	1
γ_2	2	0	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
γ'_2	2	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
γ_1	1	-1	1	1

$$H = \mathfrak{A}_5 = \mathrm{SL}_2(4) \text{ et } \ell = 5$$

	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
1	1	1	1	1	1
χ_3	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ'_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	0	1	0	0

$$N_H(S) = D_5$$

	1	s	r	r^2
1	1	1	1	1
γ_2	2	0	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
γ'_2	2	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
γ_1	1	-1	1	1

$$H = \mathfrak{A}_5 = \mathrm{SL}_2(4) \text{ et } \ell = 5$$

	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
1	1	1	1	1	1
χ_3	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ'_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	0	1	0	0

$$N_H(S) = D_5$$

	1	s	r	r^2
1	1	1	1	1
γ_2	2	0	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
γ'_2	2	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
γ_1	1	-1	1	1

$$H = \mathfrak{A}_5 = \mathrm{SL}_2(4) \text{ et } \ell = 5$$

	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
1	1	1	1	1	1
χ_3	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ'_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1
χ_5	5	0	1	0	0

$$N_H(S) = D_5$$

	1	s	r	r^2
1	1	1	1	1
γ_2	-3	0	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
γ'_2	-3	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
γ_1	-4	-1	1	1

Problème : comment réaliser l'équivalence ?

Si $H = \mathbf{G}^F = \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ avec

- ▶ \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe
- ▶ $F : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ un endomorphisme de Frobenius

Alors on peut choisir un ℓ -Sylow dans un tore \mathbf{T}_w^F pour un certain $w \in W$

Problème : comment réaliser l'équivalence ?

Si $H = \mathbf{G}^F = \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ avec

- ▶ \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe
- ▶ $F : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ un endomorphisme de Frobenius

Alors on peut choisir un ℓ -Sylow dans un tore \mathbf{T}_w^F pour un certain $w \in W$

Problème : comment réaliser l'équivalence ?

Si $H = \mathbf{G}^F = \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ avec

- ▶ \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe
- ▶ $F : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ un endomorphisme de Frobenius

Alors on peut choisir un ℓ -Sylow dans un tore \mathbf{T}_w^F pour un certain $w \in W$

Candidat

Complexe représentant la cohomologie à support compact de la variété

$$R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$$

Problème : comment réaliser l'équivalence ?

Si $H = \mathbf{G}^F = \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ avec

- ▶ \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe
- ▶ $F : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ un endomorphisme de Frobenius

Alors on peut choisir un ℓ -Sylow dans un tore \mathbf{T}_w^F pour un certain $w \in W$

Candidat

Complexe représentant la cohomologie à support compact de la variété

$$\mathbf{G}^F \curvearrowright \mathrm{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$$

Problème : comment réaliser l'équivalence ?

Si $H = \mathbf{G}^F = \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ avec

- ▶ \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe
- ▶ $F : \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{G}$ un endomorphisme de Frobenius

Alors on peut choisir un ℓ -Sylow dans un tore \mathbf{T}_w^F pour un certain $w \in W$

Candidat

Complexe représentant la cohomologie à support compact de la variété

$$\mathbf{G}^F \curvearrowright \mathrm{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \curvearrowleft \mathbf{T}_w^F, F \rightsquigarrow N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)$$

But : calculer/décoder la cohomologie pour montrer l'équivalence

Problème : comment réaliser l'équivalence ?

Si $H = \mathbf{G}^F = \mathbf{G}(\mathbb{F}_q)$ avec

- ▶ \mathbf{G} un groupe algébrique réductif connexe
- ▶ $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ un endomorphisme de Frobenius

Alors on peut choisir un ℓ -Sylow dans un tore \mathbf{T}_w^F pour un certain $w \in W$

Candidat

Complexe représentant la cohomologie à support compact de la variété

$$\mathbf{G}^F \curvearrowright \mathrm{R}\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \curvearrowleft \mathbf{T}_w^F, F \rightsquigarrow N_{\mathbf{G}^F}(\mathbf{T}_w)$$

But : calculer/décoder la cohomologie pour montrer l'équivalence

Avantage de la cohomologie : on peut considérer plusieurs anneaux de coefficients, et passer théoriquement de l'un à l'autre :

$$\mathbb{Q}_\ell \longleftarrow \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

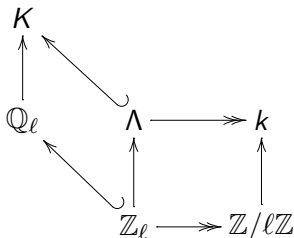
Avantage de la cohomologie : on peut considérer plusieurs anneaux de coefficients, et passer théoriquement de l'un à l'autre :

$$\mathbb{Q}_\ell \longleftarrow \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$$

Avantage de la cohomologie : on peut considérer plusieurs anneaux de coefficients, et passer théoriquement de l'un à l'autre :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K & & \\
 & & \uparrow & \swarrow & \\
 \mathbb{Q}_\ell & & \Lambda & \longrightarrow & k \\
 & \swarrow & \uparrow & & \uparrow \\
 & & \mathbb{Z}_\ell & \longrightarrow & \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}
 \end{array}$$

Avantage de la cohomologie : on peut considérer plusieurs anneaux de coefficients, et passer théoriquement de l'un à l'autre :



Décomposition en blocs

$$\Lambda H = \bigoplus b_i \Lambda H$$

Bloc principal = bloc contenant la représentation triviale

- (\mathbf{G}, F) groupe réductif fini (déployé)
- $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ tore maximal et sous-groupe de Borel F -stables
- \mathbf{U} radical unipotent de \mathbf{B}
- W groupe de Weyl

$$|\mathbf{G}^F| = q^N \prod (q^{d_i} - 1) = q^N \prod \Phi_d(q)^{a(d)}$$

Si ℓ ne divise pas $|\mathbf{G}^F| \rightsquigarrow$ représentations ordinaires

Si $\ell = p \rightsquigarrow$ méthodes spécifiques

Sinon ℓ divise $\Phi_d(q)$ pour un certain d

Cas Coxeter ($d = h$ le nombre de Coxeter)

On suppose que ℓ divise $\Phi_h(q)$ et pas $|W|$. Dans ce cas, q est d'ordre h modulo ℓ .

\rightsquigarrow les ℓ -sous-groupes de Sylow de \mathbf{G}^F sont cycliques

- (\mathbf{G}, F) groupe réductif fini (déployé)
- $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ tore maximal et sous-groupe de Borel F -stables
- \mathbf{U} radical unipotent de \mathbf{B}
- W groupe de Weyl

$$|\mathbf{G}^F| = q^N \prod (q^{d_i} - 1) = q^N \prod \Phi_d(q)^{a(d)}$$

Si ℓ ne divise pas $|\mathbf{G}^F| \rightsquigarrow$ représentations ordinaires

Si $\ell = p \rightsquigarrow$ méthodes spécifiques

Sinon ℓ divise $\Phi_d(q)$ pour un certain d

Cas Coxeter ($d = h$ le nombre de Coxeter)

On suppose que ℓ divise $\Phi_h(q)$ et pas $|W|$. Dans ce cas, q est d'ordre h modulo ℓ .

\rightsquigarrow les ℓ -sous-groupes de Sylow de \mathbf{G}^F sont cycliques

- (\mathbf{G}, F) groupe réductif fini (déployé)
- $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ tore maximal et sous-groupe de Borel F -stables
- \mathbf{U} radical unipotent de \mathbf{B}
- W groupe de Weyl

$$|\mathbf{G}^F| = q^N \prod (q^{d_i} - 1) = q^N \prod \Phi_d(q)^{a(d)}$$

Si ℓ ne divise pas $|\mathbf{G}^F| \rightsquigarrow$ représentations ordinaires

Si $\ell = p \rightsquigarrow$ méthodes spécifiques

Sinon ℓ divise $\Phi_d(q)$ pour un certain d

Cas Coxeter ($d = h$ le nombre de Coxeter)

On suppose que ℓ divise $\Phi_h(q)$ et pas $|W|$. Dans ce cas, q est d'ordre h modulo ℓ .

\rightsquigarrow les ℓ -sous-groupes de Sylow de \mathbf{G}^F sont cycliques

- (\mathbf{G}, F) groupe réductif fini (déployé)
- $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ tore maximal et sous-groupe de Borel F -stables
- \mathbf{U} radical unipotent de \mathbf{B}
- W groupe de Weyl

$$|\mathbf{G}^F| = q^N \prod (q^{d_i} - 1) = q^N \prod \Phi_d(q)^{a(d)}$$

Si ℓ ne divise pas $|\mathbf{G}^F| \rightsquigarrow$ représentations ordinaires

Si $\ell = p \rightsquigarrow$ méthodes spécifiques

Sinon ℓ divise $\Phi_d(q)$ pour un certain d

Cas Coxeter ($d = h$ le nombre de Coxeter)

On suppose que ℓ divise $\Phi_h(q)$ et pas $|W|$. Dans ce cas, q est d'ordre h modulo ℓ .

\rightsquigarrow les ℓ -sous-groupes de Sylow de \mathbf{G}^F sont cycliques

- (\mathbf{G}, F) groupe réductif fini (déployé)
- $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ tore maximal et sous-groupe de Borel F -stables
- \mathbf{U} radical unipotent de \mathbf{B}
- W groupe de Weyl

$$|\mathbf{G}^F| = q^N \prod (q^{d_i} - 1) = q^N \prod \Phi_d(q)^{a(d)}$$

Si ℓ ne divise pas $|\mathbf{G}^F| \rightsquigarrow$ représentations ordinaires

Si $\ell = p \rightsquigarrow$ méthodes spécifiques

Sinon ℓ divise $\Phi_d(q)$ pour un certain d

Cas Coxeter ($d = h$ le nombre de Coxeter)

On suppose que ℓ divise $\Phi_h(q)$ et pas $|W|$. Dans ce cas, q est d'ordre h modulo ℓ .

\rightsquigarrow les ℓ -sous-groupes de Sylow de \mathbf{G}^F sont cycliques

- (\mathbf{G}, F) groupe réductif fini (déployé)
- $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ tore maximal et sous-groupe de Borel F -stables
- \mathbf{U} radical unipotent de \mathbf{B}
- W groupe de Weyl

$$|\mathbf{G}^F| = q^N \prod (q^{d_i} - 1) = q^N \prod \Phi_d(q)^{a(d)}$$

Si ℓ ne divise pas $|\mathbf{G}^F| \rightsquigarrow$ représentations ordinaires

Si $\ell = p \rightsquigarrow$ méthodes spécifiques

Sinon ℓ divise $\Phi_d(q)$ pour un certain d

Cas Coxeter ($d = h$ le nombre de Coxeter)

On suppose que ℓ divise $\Phi_h(q)$ et pas $|W|$. Dans ce cas, q est d'ordre h modulo ℓ .

\rightsquigarrow les ℓ -sous-groupes de Sylow de \mathbf{G}^F sont cycliques

- (\mathbf{G}, F) groupe réductif fini (déployé)
- $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$ tore maximal et sous-groupe de Borel F -stables
- \mathbf{U} radical unipotent de \mathbf{B}
- W groupe de Weyl

$$|\mathbf{G}^F| = q^N \prod (q^{d_i} - 1) = q^N \prod \Phi_d(q)^{a(d)}$$

Si ℓ ne divise pas $|\mathbf{G}^F| \rightsquigarrow$ représentations ordinaires

Si $\ell = p \rightsquigarrow$ méthodes spécifiques

Sinon ℓ divise $\Phi_d(q)$ pour un certain d

Cas Coxeter ($d = h$ le nombre de Coxeter)

On suppose que ℓ divise $\Phi_h(q)$ et pas $|W|$. Dans ce cas, q est d'ordre h modulo ℓ .

\rightsquigarrow les ℓ -sous-groupes de Sylow de \mathbf{G}^F sont cycliques

Cas Coxeter : si q est d'ordre h modulo ℓ , alors \mathbf{T}_w^F contient un ℓ -sous-groupe de Sylow de \mathbf{G}^F lorsque w est un **élément de Coxeter**

Construction géométrique des représentations :

$$Y(w) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}w\mathbf{U}\}$$

$\mathbf{G}^F \supset \mathbf{U} \supset \mathbf{T}_w^F$

\rightsquigarrow variété quasi-projective lisse de dimension $\ell(w)$

Cas Coxeter : si q est d'ordre h modulo ℓ , alors \mathbf{T}_w^F contient un ℓ -sous-groupe de Sylow de \mathbf{G}^F lorsque w est un **élément de Coxeter**

Construction géométrique des représentations :

$$Y(\dot{w}) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\}$$

\mathbf{G}^F ↗ ↖ \mathbf{T}_w^F

↪ variété quasi-projective lisse de dimension $\ell(w)$

Cas Coxeter : si q est d'ordre h modulo ℓ , alors \mathbf{T}_w^F contient un ℓ -sous-groupe de Sylow de \mathbf{G}^F lorsque w est un **élément de Coxeter**

Construction géométrique des représentations :

$$\begin{array}{ccc}
 & Y(\dot{w}) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\} & \\
 \mathbf{G}^F \curvearrowright & & \curvearrowleft \mathbf{T}_w^F
 \end{array}$$

\rightsquigarrow variété quasi-projective lisse de dimension $\ell(w)$

Cas Coxeter : si q est d'ordre h modulo ℓ , alors \mathbf{T}_w^F contient un ℓ -sous-groupe de Sylow de \mathbf{G}^F lorsque w est un **élément de Coxeter**

Construction géométrique des représentations :

$$\begin{array}{ccc}
 & Y(\dot{w}) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\} & \\
 \mathbf{G}^F \curvearrowright & \curvearrowleft & \mathbf{T}_w^F
 \end{array}$$

\rightsquigarrow variété quasi-projective lisse de dimension $\ell(w)$

Cas Coxeter : si q est d'ordre h modulo ℓ , alors \mathbf{T}_w^F contient un ℓ -sous-groupe de Sylow de \mathbf{G}^F lorsque w est un **élément de Coxeter**

Construction géométrique des représentations :

$$\mathbf{G}^F \curvearrowright Y(\dot{w}) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\} \curvearrowleft \mathbf{T}_w^F$$

\rightsquigarrow variété quasi-projective lisse de dimension $\ell(w)$

Géométrie

Variété $\mathbf{Y}(\dot{w})$ munie
d'actions de \mathbf{G}^F et \mathbf{T}_w^F

Cas Coxeter : si q est d'ordre h modulo ℓ , alors \mathbf{T}_w^F contient un ℓ -sous-groupe de Sylow de \mathbf{G}^F lorsque w est un **élément de Coxeter**

Construction géométrique des représentations :

$$\mathbf{G}^F \curvearrowright Y(\dot{w}) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\} \curvearrowleft \mathbf{T}_w^F$$

\rightsquigarrow variété quasi-projective lisse de dimension $\ell(w)$

Géométrie

Variété $\mathbf{Y}(\dot{w})$ munie
d'actions de \mathbf{G}^F et \mathbf{T}_w^F

linéarisation



Cas Coxeter : si q est d'ordre h modulo ℓ , alors \mathbf{T}_w^F contient un ℓ -sous-groupe de Sylow de \mathbf{G}^F lorsque w est un **élément de Coxeter**

Construction géométrique des représentations :

$$\mathbf{G}^F \curvearrowright Y(\dot{w}) = \{g\mathbf{U} \in \mathbf{G}/\mathbf{U} \mid g^{-1}F(g) \in \mathbf{U}\dot{w}\mathbf{U}\} \curvearrowleft \mathbf{T}_w^F$$

\rightsquigarrow variété quasi-projective lisse de dimension $\ell(w)$

Géométrie

Variété $\mathbf{Y}(\dot{w})$ munie d'actions de \mathbf{G}^F et \mathbf{T}_w^F

linéarisation \longrightarrow

Représentations linéaires

Famille de modules $H_c^i(\mathbf{Y}(\dot{w}))$ munis d'actions linéaires de \mathbf{G}^F et \mathbf{T}_w^F

1ère observation : l'action de T_w^F permet d'isoler les caractères du bloc

1ère observation : l'action de \mathbf{T}_w^F permet d'isoler les caractères du bloc

Théorème (Broué-Malle-Michel)

Caractères
irréductibles du
 ℓ -bloc principal

$$1 - 1$$

$$\longleftrightarrow$$

Composants irréductibles
du module virtuel

$$R_\theta = \sum (-1)^i H_c^i(Y(\dot{w}), K)_\theta$$
 avec $\theta \in \text{Irr } T_\ell$

1ère observation : l'action de \mathbf{T}_w^F permet d'isoler les caractères du bloc

Théorème (Broué-Malle-Michel)

Caractères
irréductibles du
 ℓ -bloc principal

$$1 - 1$$

$$\longleftrightarrow$$

Composants irréductibles
du module virtuel
 $R_\theta = \sum (-1)^i H_c^i(Y(\dot{w}), K)_\theta$
avec $\theta \in \text{Irr } T_\ell$

On distingue

- ▶ caractères non-unipotents : si $\theta \in \text{Irr } T_\ell$ et $\theta \neq 1$ alors

$$\chi_\theta = (-1)^r R_\theta \in \text{Irr } G^F$$

De plus, $\chi_\theta = \chi_\eta$ ssi $\theta \in \langle w \rangle \cdot \eta$

- ▶ caractères unipotents = composants de R_1

1ère observation : l'action de \mathbf{T}_w^F permet d'isoler les caractères du bloc

Théorème (Broué-Malle-Michel)

Caractères
irréductibles du
 ℓ -bloc principal

$$1 - 1$$

$$\longleftrightarrow$$

Composants irréductibles
du module virtuel

$$R_\theta = \sum (-1)^i H_c^i(Y(\dot{w}), K)_\theta$$
 avec $\theta \in \text{Irr } T_\ell$

On distingue

- ▶ **caractères non-unipotents** : si $\theta \in \text{Irr } T_\ell$ et $\theta \neq 1$ alors

$$\chi_\theta = (-1)^r R_\theta \in \text{Irr } G^F$$

De plus, $\chi_\theta = \chi_\eta$ ssi $\theta \in \langle w \rangle \cdot \eta$

- ▶ **caractères unipotents** = composants de R_1

1ère observation : l'action de \mathbf{T}_w^F permet d'isoler les caractères du bloc

Théorème (Broué-Malle-Michel)

Caractères
irréductibles du
 ℓ -bloc principal

$$\longleftrightarrow 1 - 1$$

Composants irréductibles
du module virtuel
 $R_\theta = \sum (-1)^i H_c^i(Y(\dot{w}), K)_\theta$
avec $\theta \in \text{Irr } T_\ell$

On distingue

- ▶ **caractères non-unipotents** : si $\theta \in \text{Irr } T_\ell$ et $\theta \neq 1$ alors

$$\chi_\theta = (-1)^r R_\theta \in \text{Irr } G^F$$

De plus, $\chi_\theta = \chi_\eta$ ssi $\theta \in \langle w \rangle \cdot \eta$

- ▶ **caractères unipotents** = composants de R_1

2ème observation : l'action de F sépare les caractères unipotents

2ème observation : l'action de F sépare les caractères unipotents

Théorème (Lusztig)

Les composants irréductibles de $H_c^i(Y(\dot{w}), K)$ correspondent aux espaces propres de F . Les valeurs propres associées sont congrues à q^j modulo ℓ pour un unique $j \in \{0, \dots, h-1\}$. La répartition est donnée par

$H_c^r(Y(\dot{w}), K)_1$	$H_c^{r+1}(Y(\dot{w}), K)_1$	$H_c^{2r}(Y(\dot{w}), K)_1$
χ_0	χ_1	χ_r
χ_{r+1}	χ_{r+2}	

i	4	5	6	7	8
$H_c^i(X)$	$(St, 1)$	$(\phi_{4,13}, q)$	$(\phi''_{6,6}, q^2)$	$(\phi''_{4,1}, q^3)$	(Id, q^4)

i	4	5	6	7	8
$H_c^i(X)$	$(St, 1)$ $(B_{2,\varepsilon}, -q)$	$(\phi_{4,13}, q)$ $(B_{2,r}, -q^2)$	$(\phi''_{6,6}, q^2)$ $(B_{2,1}, -q^3)$	$(\phi''_{4,1}, q^3)$	(Id, q^4)

i	4	5	6	7	8
$H_c^i(X)$	$(St, 1)$ $(B_{2,\varepsilon}, -q)$ $(F_4[i], iq^2)$ $(F_4[-i], -iq^2)$ $(F_4[\theta], \theta q^2)$ $(F_4[\theta^2], \theta^2 q^2)$	$(\phi_{4,13}, q)$ $(B_{2,r}, -q^2)$	$(\phi''_{6,6}, q^2)$ $(B_{2,1}, -q^3)$	$(\phi''_{4,1}, q^3)$	(Id, q^4)

i	4	5	6	7	8
$H_c^i(X)$	$(St, 1)$ $(B_{2,\varepsilon}, -q)$ $(F_4[i], iq^2)$ $(F_4[-i], -iq^2)$ $(F_4[\theta], \theta q^2)$ $(F_4[\theta^2], \theta^2 q^2)$	$(\phi_{4,13}, q)$ $(B_{2,r}, -q^2)$	$(\phi''_{6,6}, q^2)$ $(B_{2,1}, -q^3)$	$(\phi''_{4,1}, q^3)$	(Id, q^4)

i	4	5	6	7	8
$H_c^i(X)$	$(\text{St}, 1)$ $(B_{2,\varepsilon}, q^7)$ $(F_4[i], q^5)$ $(F_4[-i], q^{11})$ $(F_4[\theta], q^6)$ $(F_4[\theta^2], q^{10})$	$(\phi_{4,13}, q)$ $(B_{2,r}, q^8)$	$(\phi''_{6,6}, q^2)$ $(B_{2,1}, q^9)$	$(\phi''_{4,1}, q^3)$	(Id, q^4)

Avec q d'ordre $h = 12$ dans $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$

2ème observation : l'action de F sépare les caractères unipotents

Théorème (Lusztig)

Les composants irréductibles de $H_c^i(Y(\dot{w}), K)$ correspondent aux espaces propres de F . Les valeurs propres associées sont congrues à q^j modulo ℓ pour un unique $j \in \{0, \dots, h-1\}$. La répartition est donnée par

$H_c^r(Y(\dot{w}), K)_1$	$H_c^{r+1}(Y(\dot{w}), K)_1$	$H_c^{2r}(Y(\dot{w}), K)_1$
χ_0	χ_1	χ_r
χ_{r+1}	χ_{r+2}	

2ème observation : l'action de F sépare les caractères unipotents

Théorème (Lusztig)

Les composants irréductibles de $H_c^i(Y(\dot{w}), K)$ correspondent aux espaces propres de F . Les valeurs propres associées sont congrues à q^j modulo ℓ pour un unique $j \in \{0, \dots, h-1\}$. La répartition est donnée par

$H_c^r(Y(\dot{w}), K)_1$	$H_c^{r+1}(Y(\dot{w}), K)_1$	$H_c^{2r}(Y(\dot{w}), K)_1$
χ_0	χ_1	χ_r
χ_{r+1}	χ_{r+2}	

$$\text{Bloc principal} = \underbrace{\{\chi_0, \dots, \chi_{h-1}\}}_{\text{caractères unipotents}} \cup \underbrace{\{\chi_\theta \mid \theta \in \text{Irr } T_\ell \text{ et } \theta \neq 1\}}_{\text{caractères non-unipotents}} / \langle w \rangle$$

Idée : coder la structure du bloc dans un graphe

Ici, si P est un module projectif indécomposable

$$[P] = \begin{cases} \chi_i + \chi_j & \text{avec } i \neq j \\ \chi_i + \sum \chi_\theta = \chi_i + \chi_{\text{exc}} \end{cases}$$

On construit un arbre Γ avec

- ▶ sommets indexés par $\{\chi_{\text{exc}}, \chi_0, \dots, \chi_{h-1}\}$
- ▶ arêtes $\chi \text{ --- } \chi'$ si $\chi + \chi' = [P]$ avec P un PIM

+ plongement planaire donnant les extensions entre simples

L'arbre de Brauer décrit la catégorie des modules sur le bloc à équivalence de Morita près

Idée : coder la structure du bloc dans un graphe
Ici, si P est un module projectif indécomposable

$$[P] = \begin{cases} \chi_i + \chi_j & \text{avec } i \neq j \\ \chi_i + \sum \chi_\theta = \chi_i + \chi_{\text{exc}} \end{cases}$$

On construit un arbre Γ avec

- ▶ sommets indexés par $\{\chi_{\text{exc}}, \chi_0, \dots, \chi_{h-1}\}$
- ▶ arêtes $\chi \text{ --- } \chi'$ si $\chi + \chi' = [P]$ avec P un PIM

+ plongement planaire donnant les extensions entre simples

L'arbre de Brauer décrit la catégorie des modules sur le bloc à équivalence de Morita près

Idée : coder la structure du bloc dans un graphe
Ici, si P est un module projectif indécomposable

$$[P] = \begin{cases} \chi_i + \chi_j & \text{avec } i \neq j \\ \chi_i + \sum \chi_\theta = \chi_i + \chi_{\text{exc}} \end{cases}$$

On construit un arbre Γ avec

- ▶ sommets indexés par $\{\chi_{\text{exc}}, \chi_0, \dots, \chi_{h-1}\}$
- ▶ arêtes $\chi \text{ — } \chi'$ si $\chi + \chi' = [P]$ avec P un PIM

+ plongement planaire donnant les extensions entre simples

L'arbre de Brauer décrit la catégorie des modules sur le bloc à équivalence de Morita près

Idée : coder la structure du bloc dans un graphe
Ici, si P est un module projectif indécomposable

$$[P] = \begin{cases} \chi_i + \chi_j & \text{avec } i \neq j \\ \chi_i + \sum \chi_\theta = \chi_i + \chi_{\text{exc}} \end{cases}$$

On construit un arbre Γ avec

- ▶ sommets indexés par $\{\chi_{\text{exc}}, \chi_0, \dots, \chi_{h-1}\}$
- ▶ arêtes $\chi \text{ — } \chi'$ si $\chi + \chi' = [P]$ avec P un PIM

+ plongement planaire donnant les extensions entre simples

L'arbre de Brauer décrit la catégorie des modules sur le bloc à équivalence de Morita près

Idée : coder la structure du bloc dans un graphe

Ici, si P est un module projectif indécomposable

$$[P] = \begin{cases} \chi_i + \chi_j & \text{avec } i \neq j \\ \chi_i + \sum \chi_\theta = \chi_i + \chi_{\text{exc}} \end{cases}$$

On construit un arbre Γ avec

- ▶ sommets indexés par $\{\chi_{\text{exc}}, \chi_0, \dots, \chi_{h-1}\}$
- ▶ arêtes $\chi \text{ — } \chi'$ si $\chi + \chi' = [P]$ avec P un PIM

+ plongement planaire donnant les extensions entre simples

L'arbre de Brauer décrit la catégorie des modules sur le bloc à équivalence de Morita près

Idée : coder la structure du bloc dans un graphe
Ici, si P est un module projectif indécomposable

$$[P] = \begin{cases} \chi_i + \chi_j & \text{avec } i \neq j \\ \chi_i + \sum \chi_\theta = \chi_i + \chi_{\text{exc}} \end{cases}$$

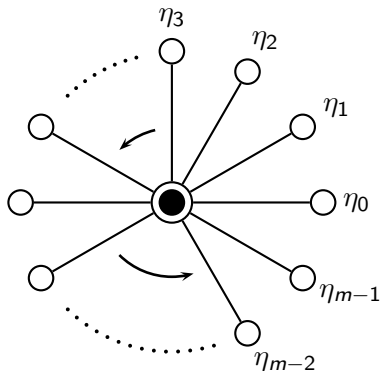
On construit un arbre Γ avec

- ▶ sommets indexés par $\{\chi_{\text{exc}}, \chi_0, \dots, \chi_{h-1}\}$
- ▶ arêtes $\chi \text{ — } \chi'$ si $\chi + \chi' = [P]$ avec P un PIM

+ plongement planaire donnant les extensions entre simples

L'arbre de Brauer décrit la catégorie des modules sur le bloc à équivalence de Morita près

Exemple : arbre en étoile pour le groupe $N_{G^F}(\mathbf{T}_w)$



i	4	5	6	7	8
$H_c^i(X)$	$(\text{St}, 1)$ $(B_{2,\varepsilon}, q^7)$ $(F_4[i], q^5)$ $(F_4[-i], q^{11})$ $(F_4[\theta], q^6)$ $(F_4[\theta^2], q^{10})$	$(\phi_{4,13}, q)$ $(B_{2,r}, q^8)$	$(\phi''_{6,6}, q^2)$ $(B_{2,1}, q^9)$	$(\phi''_{4,1}, q^3)$	(Id, q^4)

Avec q d'ordre $h = 12$ dans $\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$



En caractéristique 0 : espaces propres de $F \rightsquigarrow$ modules simples

En caractéristique ℓ : espaces propres généralisés de F sur le complexe
 $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \rightsquigarrow$ modules projectifs

En caractéristique 0 : espaces propres de $F \rightsquigarrow$ modules simples

En caractéristique ℓ : espaces propres généralisés de F sur le complexe

$R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \rightsquigarrow$ modules projectifs

En caractéristique 0 : espaces propres de $F \rightsquigarrow$ modules simples

En caractéristique ℓ : espaces propres généralisés de F sur le complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \rightsquigarrow$ modules projectifs

Hypothèse

La cohomologie de $Y(\dot{w})$ à coefficients dans Λ est **sans torsion**.

En caractéristique 0 : espaces propres de $F \rightsquigarrow$ modules simples

En caractéristique ℓ : espaces propres généralisés de F sur le complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \rightsquigarrow$ modules projectifs

Hypothèse

La cohomologie de $Y(\dot{w})$ à coefficients dans Λ est **sans torsion**.

Sous cette hypothèse on peut donner un représentant explicite du complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$

Théorème (D)

Sous l'hypothèse précédente :

- ▶ La conjecture de Hiss-Lübeck-Malle est vérifiée
- ▶ Le complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$ induit l'équivalence dérivée prédite par la conjecture de Broué

En caractéristique 0 : espaces propres de $F \rightsquigarrow$ modules simples

En caractéristique ℓ : espaces propres généralisés de F sur le complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \rightsquigarrow$ modules projectifs

Hypothèse

La cohomologie de $Y(\dot{w})$ à coefficients dans Λ est **sans torsion**.

Sous cette hypothèse on peut donner un représentant explicite du complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$

Théorème (D)

Sous l'hypothèse précédente :

- ▶ La conjecture de Hiss-Lübeck-Malle est vérifiée
- ▶ Le complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$ induit l'équivalence dérivée prédite par la conjecture de Broué

En caractéristique 0 : espaces propres de $F \rightsquigarrow$ modules simples

En caractéristique ℓ : espaces propres généralisés de F sur le complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda) \rightsquigarrow$ modules projectifs

Hypothèse

La cohomologie de $Y(\dot{w})$ à coefficients dans Λ est **sans torsion**.

Sous cette hypothèse on peut donner un représentant explicite du complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$

Théorème (D)

Sous l'hypothèse précédente :

- ▶ La conjecture de Hiss-Lübeck-Malle est vérifiée
- ▶ Le complexe $R\Gamma_c(Y(\dot{w}), \Lambda)$ induit l'équivalence dérivée prédite par la conjecture de Broué

$$H = \mathfrak{A}_5 = \mathrm{SL}_2(4) \text{ et } \ell = 5$$

	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
1	1	1	1	1	1
χ_3	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ'_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
χ_4	4	0	1	-1	-1

$$N_H(S) = D_5$$

	1	s	r	r^2
1	1	1	1	1
γ_2	2	0	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
γ'_2	2	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
γ_1	1	-1	1	1

$$H = \mathfrak{A}_5 = \mathrm{SL}_2(4) \text{ et } \ell = 5$$

	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
1	1	1	1	1	1
χ_3	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
χ'_3	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
St	4	0	1	-1	-1

$$N_H(S) = D_5$$

	1	s	r	r^2
1	1	1	1	1
γ_2	2	0	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
γ'_2	2	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$
γ_1	1	-1	1	1

Concernant l'hypothèse de torsion, elle est démontrée les cas suivants

- ▶ (\mathbf{G}, F) est de \mathbb{F}_q -rang 1 (Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type A_n (Bonnafé-Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type ${}^2D_n, B_n, C_n$ + quelques cas dans G_2 (D)

Utilisation de méthodes géométriques :

- décompositions
- étude de certains quotients

mais aussi algébriques

- cuspidalité
- modules de Gelfand-Graev généralisés

Concernant l'hypothèse de torsion, elle est démontrée les cas suivants

- ▶ (\mathbf{G}, F) est de \mathbb{F}_q -rang 1 (Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type A_n (Bonnafé-Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type ${}^2D_n, B_n, C_n$ + quelques cas dans G_2 (D)

Utilisation de méthodes géométriques :

- décompositions
- étude de certains quotients

mais aussi algébriques

- cuspidalité
- modules de Gelfand-Graev généralisés

Concernant l'hypothèse de torsion, elle est démontrée les cas suivants

- ▶ (\mathbf{G}, F) est de \mathbb{F}_q -rang 1 (Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type A_n (Bonnafé-Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type ${}^2D_n, B_n, C_n$ + quelques cas dans G_2 (D)

Utilisation de méthodes géométriques :

- décompositions
- étude de certains quotients

mais aussi algébriques

- cuspidalité
- modules de Gelfand-Graev généralisés

Concernant l'hypothèse de torsion, elle est démontrée les cas suivants

- ▶ (\mathbf{G}, F) est de \mathbb{F}_q -rang 1 (Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type A_n (Bonnafé-Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type ${}^2D_n, B_n, C_n$ + quelques cas dans G_2 (D)

Utilisation de méthodes géométriques :

- décompositions
- étude de certains quotients

mais aussi algébriques

- cuspidalité
- modules de Gelfand-Graev généralisés

Concernant l'hypothèse de torsion, elle est démontrée les cas suivants

- ▶ (\mathbf{G}, F) est de \mathbb{F}_q -rang 1 (Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type A_n (Bonnafé-Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type ${}^2D_n, B_n, C_n$ + quelques cas dans G_2 (D)

Utilisation de méthodes géométriques :

- décompositions
- étude de certains quotients

mais aussi algébriques

- cuspidalité
- modules de Gelfand-Graev généralisés

Concernant l'hypothèse de torsion, elle est démontrée les cas suivants

- ▶ (\mathbf{G}, F) est de \mathbb{F}_q -rang 1 (Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type A_n (Bonnafé-Rouquier)
- ▶ (\mathbf{G}, F) est de type ${}^2D_n, B_n, C_n$ + quelques cas dans G_2 (D)

Utilisation de méthodes géométriques :

- décompositions
- étude de certains quotients

mais aussi algébriques

- cuspidalité
- modules de Gelfand-Graev généralisés

Étudier les variétés $Y(\tilde{w})$ pour d'autres éléments réguliers, à savoir

- ▶ calculer explicitement la cohomologie à coefficients dans K à l'aide de décomposition du type Deodhar (travaux en cours pour les types F_4 , E_6 , E_7 et E_8 avec Jean Michel)
- ▶ identifier les groupes qui font apparaître de la torsion (lien avec la cuspidalité, étude du lieu de ℓ -lissité de certaines compactifications)

Établir des liens précis entre la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig et la forme des arbres de Brauer dans les autres cas de défaut cyclique

- ▶ compléter la classification des arbres de Brauer des groupes finis simples (forme conjecturale des arbres pour les types E_7 et E_8)

Étudier les variétés $Y(\tilde{w})$ pour d'autres éléments réguliers, à savoir

- ▶ calculer explicitement la cohomologie à coefficients dans K à l'aide de décomposition du type Deodhar (travaux en cours pour les types F_4 , E_6 , E_7 et E_8 avec Jean Michel)
- ▶ identifier les groupes qui font apparaître de la torsion (lien avec la cuspidalité, étude du lieu de ℓ -lissité de certaines compactifications)

Établir des liens précis entre la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig et la forme des arbres de Brauer dans les autres cas de défaut cyclique

- ▶ compléter la classification des arbres de Brauer des groupes finis simples (forme conjecturale des arbres pour les types E_7 et E_8)

Étudier les variétés $Y(\tilde{w})$ pour d'autres éléments réguliers, à savoir

- ▶ calculer explicitement la cohomologie à coefficients dans K à l'aide de décomposition du type Deodhar (travaux en cours pour les types F_4 , E_6 , E_7 et E_8 avec Jean Michel)
- ▶ identifier les groupes qui font apparaître de la torsion (lien avec la cuspidalité, étude du lieu de ℓ -lissité de certaines compactifications)

Établir des liens précis entre la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig et la forme des arbres de Brauer dans les autres cas de défaut cyclique

- ▶ compléter la classification des arbres de Brauer des groupes finis simples (forme conjecturale des arbres pour les types E_7 et E_8)

Étudier les variétés $Y(\tilde{w})$ pour d'autres éléments réguliers, à savoir

- ▶ calculer explicitement la cohomologie à coefficients dans K à l'aide de décomposition du type Deodhar (travaux en cours pour les types F_4 , E_6 , E_7 et E_8 avec Jean Michel)
- ▶ identifier les groupes qui font apparaître de la torsion (lien avec la cuspidalité, étude du lieu de ℓ -lissité de certaines compactifications)

Établir des liens précis entre la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig et la forme des arbres de Brauer dans les autres cas de défaut cyclique

- ▶ compléter la classification des arbres de Brauer des groupes finis simples (forme conjecturale des arbres pour les types E_7 et E_8)

Étudier les variétés $Y(\tilde{w})$ pour d'autres éléments réguliers, à savoir

- ▶ calculer explicitement la cohomologie à coefficients dans K à l'aide de décomposition du type Deodhar (travaux en cours pour les types F_4 , E_6 , E_7 et E_8 avec Jean Michel)
- ▶ identifier les groupes qui font apparaître de la torsion (lien avec la cuspidalité, étude du lieu de ℓ -lissité de certaines compactifications)

Établir des liens précis entre la cohomologie des variétés de Deligne-Lusztig et la forme des arbres de Brauer dans les autres cas de défaut cyclique

- ▶ compléter la classification des arbres de Brauer des groupes finis simples (forme conjecturale des arbres pour les types E_7 et E_8)