JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 30, 36–47 (1978)

Irreductibilité de Certaines Représentations de $G^{(X)}$

P. DELORME*

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau, France

Communicated by I. Gelfand

Received May 23, 1977

Étant donné un groupe localement compact G et un espace mesuré (X, μ) avec μ non atomique, notons $G^{(X)}$ le groupe des applications mesurables de X dans G ne prenant qu'un nombre fini de valeurs. Il existe une méthode pour construire des représentations unitaires de $G^{(X)}$ qui soient invariantes (à équivalence unitaire près) par toutes les permutations de X conservant μ. Cette construction utilise la théorie des produits tensoriels continus de représentations; en gros, on sait associer une telle représentation $\tilde{U}$ à tout triplet (A, b, c) où A est une représentation unitaire de G, b un 1-cocycle pout A et c une application de G dans $\mathbb{R}$ qui vérifie $\operatorname{Im}(b(g) \mid b(g')) = c(gg') - c(g) - c(g')$. Verchik, Gelfand Graiev ont démontré (*Funk. An. igo Priloz.* 8 (1974), 67–69) que $\tilde{U}$ est irreductible si $b(G)$ est total dans l'espace de A et si de plus G contient un sous groupe compact K tel que b restreint à K soit nul et $A_{|K}$ ne contient pas la représentation triviale.

Dans le présent article, nous démontrons un théorème de structure du commutant de $\tilde{U}$; pour cela nous utilisons la théorie des formes standards des algèbres de Von Neumann ainsi qu'un théorème de Araki et Woods sur les algèbres booléennes complètes de facteurs de type I. Comme corollaire nous retrouvons le résultat précité de Verchik, Gelfand, Graiev et d'autre part que $\tilde{U}$ est irréductible dès que A (non triviale) a la même propriété et que b n'est pas un cobord.

1. PRODUITS TENSORIELS CONTINUS DE REPRÉSENTATIONS: DÉFINITION

Soit X, un espace borélien standard muni d'une mesure μ, σ finie, *non atomique*. On note Θ l'algèbre de Boole complète des classes de parties μ mesurables de X. Dans la suite mesurable (resp. intégrable) signifiera toujours μ mesurable (resp. μ intégrable) et on notera en abrégé "p.p." pour "μ presque partout".

On notera $\tilde{\Theta}$ l'ensemble des familles dénombrables $\mathscr{F} = (\theta_i)_{i\in I}$, d'éléments deux à deux disjoints de Θ.

Soit G un groupe localement compact séparable. On considère le groupe $G^{(X)}$ des classes de fonctions mesurables de X dans G prenant un nombre fini de valeurs.

* Laboratoire de Recherche Associé au C.N.R.S. No. 169.

0022-1236/78/0301-0036$02.00/0

On suppose donné:

(1) un champ mesurable d'espaces hilbertien $(H_x)_{x\in X}$

(2) un champ mesurable de représentations continues unitaires de G, $(A_x)_{x\in X}$, où A_x opère dans H_x.

(3) un champ de carré intégrable de 1-cocycles continus de G pour $(A_x)_{x\in X}$, $(b_x)_{x\in X}$, (c'est à dire une famille de 1-cocycles de G, $(b_x)_{x\in X}$, pour $(A_x)_{x\in X}$, telle que, pour tout $g \in G$ $(b_x(g))_{x\in X}$ est de carré intégrable.

(4) un champ intégrable d'application $G \to \mathbb{R}$, $(\gamma_x)_{x\in X}$, (i.e., pour tout $g \in G$ $x \to \gamma_x(g)$ est intégrable) vérifiant p.p. $\forall g$, $g' \in G$ $\gamma_x(gg') = \gamma_x(g) + \gamma_x(g') + \operatorname{Im}(b_x(g) \mid A_x(g)\, b_x(g'))$. Alors p.p on a une représentation U_x de G dans l'espace hilbertien symétrique SH_x :

$$g \to U_x(g) = U_{A_x(g), b_x(g), \exp i\gamma_x(g)}$$

(pour la définition des opérateurs $U_{A,b,c}$ et des espaces hilbertiens symétriques cf. [9]).

En outre on peut définir $\tilde{U}$, représentation de $G^{(X)}$ dans SH (où $H = \int_X^{\oplus} H_x \, d\mu(x)$) par :

$$\tilde{g} \in G^{(X)} \to \tilde{U}(\tilde{g}) = U_{\tilde{A}(\tilde{g}), \tilde{b}(\tilde{g}), \exp i\tilde{\gamma}(\tilde{g})}$$

où

$$\tilde{A}(\tilde{g}) = \int_X^{\oplus} A_x(\tilde{g}(x)) \, d\mu(x), \quad \tilde{b}(\tilde{g}) = \int_X^{\oplus} b_x(\tilde{g}(x)) \, d\mu(x)$$

$$\tilde{\gamma}(\tilde{g}) = \int_X \gamma_x(\tilde{g}(x)) \, d\mu(x)$$

$\tilde{A}$, $\tilde{b}$ et $\tilde{\gamma}$ sont bien définis car $\tilde{g}$ ne prennent qu'un nombre fini de valeurs.

Par définition $\tilde{U}$ est le produit tensoriel continu des représentations U_x. Il résulte de [1, th. 4.4], que la construction ci-dessus est la seule manière de construire des produits tensriels continus de représentations.

2. Cyclicité du Vecteur Exp $\emptyset$ pour $\tilde{U}$

Lemme 1. *Si p.p. $b_x(G)$ est total dans H_x, Exp $\emptyset$ est cyclique pour $\tilde{U}$.*

Démonstration: Désignons par K, le sous espace fermé de SH engendré par les $\{\tilde{U}(\tilde{g}) \operatorname{Exp} \emptyset \mid \tilde{g} \in G^{(X)}\}$. On va montrer que $(K, \operatorname{Exp} \emptyset)$ admet une algèbre de Boole complète de décomposition tensorielle (cf. [9], [2]). Pour $\theta \in \Theta$, on définit $K_\theta \subset SH_\theta$: c'est le sous espace de Hilbert de SH_θ engendré par

$$\{\operatorname{Exp} P_\theta \, \tilde{b}(\tilde{g}) \mid \tilde{g} \in G^{(X)}\}$$

où P_θ désigne le projecteur $H \to H_\theta$ correspondant à θ, et l'on pose $\omega_\theta = \operatorname{Exp} \emptyset \in SH_\theta$. Comme pour tout $\tilde{g} \in G^{(X)}$ $P_\theta \tilde{b}(\tilde{g}) = \tilde{b}(\tilde{g}')$ où $\tilde{g}'$ est un élément de $G^{(X)}$ à support dans θ, on voit facilement que, pour toute famille $\mathscr{F} = (\theta_i)_{i \in I} \in \tilde{\Theta}$, on a un isomorphisme canonique:

$\Lambda_{\mathscr{F}} : \bigotimes_{i \in I}^{\omega_{\theta_i}} K_{\theta_i} \to K_\theta$ qui envoie $\bigotimes_{i \in I} \omega_{\theta_i}$ sur ω_θ. On vérifie facilement que la donnée des $(K_\theta, \omega_\theta)$, $\theta \in \Theta$ et des $(\Lambda_{\mathscr{F}})_{\mathscr{F} \in \tilde{\Theta}}$ définit une algèbre de Boole complète de décomposition tensorielle de $(K, \operatorname{Exp} \emptyset)$. En outre, les $\operatorname{Exp} \tilde{b}(\tilde{g})$ étant totaux dans K, l'ensemble des vecteurs factorisables ξ qui vérifient $(\operatorname{Exp} \emptyset \mid \xi) = 1$ est total dans K. Le théorème d'Araki Woods (cf [2, th. 6.1]) s'applique. Par suite, il existe une intégrale hilbertienne $L = \int_X^{\oplus} L_x \, d\mu(x)$ et un isomorphisme d'espace de Hilbert $K \xrightarrow{V} SL$ avec $V(\operatorname{Exp} \emptyset) = \operatorname{Exp} \emptyset$ qui échange les vecteurs factorisables de K et SL (pour ce qui concerne l'algèbre de Boole de décomposition tensorielle de $(SL, \operatorname{Exp} \emptyset)$, cf. [2, th. 5.2]). Par suite pour $\tilde{g} \in G^{(X)}$ on peut définir $\tilde{B}(\tilde{g}) \in L$ par: $V(\operatorname{Exp} \tilde{b}(\tilde{g})) = \operatorname{Exp}(\tilde{B}(\tilde{g}))$, car les vecteurs factorisables de SL sont du type $\lambda \operatorname{Exp} \xi$ où $\xi \in L$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

V étant unitaire et $\{\operatorname{Exp} \tilde{b}(\tilde{g}) \mid \tilde{g} \in G^{(X)}\}$ total dans K, $\{\operatorname{Exp} \tilde{B}(\tilde{g}) \mid \tilde{g} \in G^{(X)}\}$ est total dans SL, donc $\tilde{B}(G^{(X)})$ est total dans L. En outre

$$\forall \tilde{g}, \tilde{g}' \in G^{(X)} \ (\tilde{B}(\tilde{g}) \mid \tilde{B}(\tilde{g}')) = (\tilde{b}(\tilde{g}) \mid \tilde{b}(\tilde{g}')) \bmod 2i\pi$$

Cela résulte de l'implication $e^a = e^b \Rightarrow a = b \bmod 2i\pi$. On a même pour tout $\theta \in \Theta$

$$(Q_\theta \tilde{B}(\tilde{g}) \mid \tilde{B}(\tilde{g}')) = (P_\theta \tilde{b}(\tilde{g}) \mid \tilde{b}(\tilde{g}')) \bmod 2i\pi$$

où P_θ (resp Q_θ) est le projecteur de $\int_X^{\oplus} H_x \, d\mu(x)$ (resp. $\int_X^{\oplus} L_x \, d\mu(x)$) correspondant à θ.

On obtient cela en exprimant la factorisabilité de V. Mais alors, pour $\tilde{g}$, $\tilde{g}' \in G^{(X)}$ fixés

$$\theta \to \varphi(\theta) = \frac{1}{2i\pi} [(Q_\theta \tilde{B}(\tilde{g}) \mid \tilde{B}(\tilde{g}')) - (P_\theta \tilde{b}(\tilde{g}) \mid \tilde{b}(\tilde{g}'))]$$

est une application σ-additive de Θ dans $\mathbb{Z}$.

φ détermine une mesure sur X qui peut s'écrire $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$, où φ_+ et φ_- sont des mesures positives sur X étrangères. On est ramené à étudier les fonctions σ additives, positives de Θ dans $\mathbb{Z}^+$. Soit ψ une telle fonction. Il résulte de [9, App C, Lemme C.2], que pour tout $\epsilon > \emptyset$ il existe une partition finie de $\mathbb{1}$ (unité de Θ), $\mathbb{1} = \vee \theta_i$, telle que $\psi(\theta_i) < \epsilon$, $\forall i$. Si l'on prend $\epsilon = 1/2$, on voit que $\psi(\theta_i) = \emptyset$, puisque ψ est à valeur entière. Alors la positivité et la σ-additivité de ψ impliquent que ψ est nulle. Donc

$$(\tilde{B}(\tilde{g}) \mid \tilde{B}(\tilde{g}')) = (\tilde{b}(\tilde{g}) \mid \tilde{b}(\tilde{g}')) \ \forall \tilde{g}, \tilde{g}' \in G^{(X)}$$

Ceci et la totalité de $\tilde{B}(G^{(X)})$, (resp. $\tilde{b}(G^{(X)})$) dans L (resp. H) permet de définir un opérateur unitaire

$$WL \to H \quad \text{par} \quad W(\tilde{B}(\tilde{g})) = \tilde{b}(\tilde{g})\ \forall \tilde{g} \in G^{(X)}$$

On définit ensuite $SW : SL \to SH$, opérateur unitaire, par

$$(SW)\,(\operatorname{Exp} \xi) = \operatorname{Exp} W\xi\ \forall \xi \in L.$$

Alors $SW \circ V$ est un opérateur unitaire de K sur SH. Or il est facile de voir que $SW \circ V$ est l'injection canonique de K dans SH. En effet,

$$SW \circ V(\operatorname{Exp} \tilde{b}(\tilde{g})) = SW(\operatorname{Exp} \tilde{B}(\tilde{g})) = \operatorname{Exp} \tilde{b}(\tilde{g}).$$

Le lemme en résulte.

Dans la suite on supposera toujours que p.p $b_x(G)$ est total dans H_x (sauf mention expresse du contraire).

3. L'Algèbre de Boole d'Algèbres de Von Neumann Associée à $\tilde{U}$

On introduit, pour $\theta \in \Theta$, une représentation $\tilde{U}_\theta$ de $G^{(X)}$ dans SH_θ

$$\tilde{U}_\theta(\tilde{g}) = U_{\int_\theta^\oplus A_x(\tilde{g}(x))\,d\mu(x),\ \int_\theta^\ominus b_x(\tilde{g}(x)\,d\mu(x),\ \exp i\int_\theta \gamma_x(\tilde{g}(x))\,d\mu(x)}$$

On note $\mathfrak{A}_\theta$ l'algèbre de Von Neumann engendrée par $\tilde{U}_\theta$ dans SH_θ et ω_θ désigne le vecteur $\operatorname{Exp} \emptyset \in SH_\theta$. Alors on a le

Lemme 2. *Pour toute famille $\mathscr{F} = (\theta_i)_{i\in I}$, $\mathscr{F} \in \tilde{\Theta}$, on a*

$$\mathfrak{A}_{\vee_{i\in I}\theta_i} = \bigotimes_{i\in I}^{\omega_{\theta_i}} \mathfrak{A}_{\theta_i}$$

Démonstration: Il résulte de la définition, que $\bigotimes_{i\in I}^{\omega_{\theta_i}} \mathfrak{A}_{\theta_i}$ est l'algèbre de Von Neumann dans $\bigotimes_{i\in I}^{\omega_{\theta_i}} SH_{\theta_i} = SH_{\vee_{i\in I}\theta_i}$ engendrée par les opérateurs $\bigotimes_{i\in I}^{\omega_{\theta_i}} U_i$ où $U_i \in \mathfrak{A}_{\theta_i}$, $\forall i \in I$ et $U_i = \mathbb{1}_{SH_{\theta_i}}$ sauf pour un nombre fini d'indices. Comme $\mathfrak{A}_{\theta_i}$ est engendrée par $\{U_{\theta_i}(\tilde{g}) \mid \tilde{g} \in G^{(X)}\}$ et même par $\{U_{\theta_i}(\tilde{g}) \mid \tilde{g} \in G^{(X)}, \tilde{g}(\theta_i{}^c) = e\}$ (où $\theta_i{}^c$ est le complémentaire de θ_i dans Θ), $\bigotimes_{i\in I}^{\omega_{\theta_i}} \mathfrak{A}_{\theta_i}$ est engendrée par $\{\bigotimes_{i\in I}^{\omega_{\theta_i}} U_{\theta_i}\tilde{g}_i) \mid \tilde{g}_i \equiv e$ sauf pour un nombre fini d'indices et $\tilde{g}_i(\theta_i{}^c) = e\}$.

Mais si l'on pose $\tilde{g} = \prod_{i\in I} \tilde{g}_i$ (c'est un produit fini), on a:

$$\bigotimes_{i\in I}^{\omega_{\theta_i}} U_{\theta_i}(\tilde{g}_i) = U_{\vee_{i\in I}\theta_i}(\tilde{g}).$$

D'où

$$\mathfrak{A}_{\vee_{i\in I}\theta_i} \supset \bigotimes_{i\in I}^{\omega_{\theta_i}} \mathfrak{A}_{\theta_i}$$

L'inclusion inverse se montre facilement en utilisant la factorisabilité des $U_{\vee_{i\in I}\theta_i}(\tilde{g})$, $\tilde{g} \in G^{(X)}$.

4. Produits Tensoriels Dénombrables de Formes Standards d'Algèbres de Von Neumann

Lemme 3. *Soient $\Phi_n : \mathfrak{A}_n \to \mathscr{B}_n$, $n \in \mathbb{N}$, des isomorphismes d'algèbres de Von Neumann. On suppose que $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathscr{L}(H_n)$, $\mathscr{B}_n \subset \mathscr{L}(K_n)$. Soient $e_n \in H_n$, $f_n \in K_n$ tels que $(\Phi_n(T) f_n \mid f_n) = (Te_n \mid e_n)\ \forall T \in \mathfrak{A}_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Alors il existe un isomorphisme unique Φ entre*

$$\bigotimes_n^{e_n} \mathfrak{A}_n \subset \mathscr{L}\left(\bigotimes_n^{e_n} H_n\right) \quad \text{et} \quad \bigotimes_n^{f_n} \mathscr{B}_n \subset \mathscr{L}\left(\bigotimes_n^{f_n} K_n\right)$$

tel que $\Phi(\otimes_n^{e_n} T_n) = \otimes_n^{f_n} \Phi_n(T_n)$ pour toute famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $T_n \in \mathfrak{A}_n$ pour tout n et $T_n = \mathbb{1}_{H_n}$ pour presque tout n.

Démonstration: (a) l'unicité de Φ, s'il existe est claire

(b) existence de Φ.

Considérons une famille maximale $(y_n{}^i)_{i\in I_n}$ de vecteurs non nuls de K_n, telle que les sous espaces fermés $K_n{}^i$ de K_n engendrés par $(\mathscr{B}_n y_n{}^i)$ soient deux à deux orthogonaux et telle que $y_n{}^0 = f_n$. A cause de la maximalité de $(y_n{}^i)$ on a $K_n = \bigoplus_{i\in I_n} K_n{}^i$. Soient $\mathscr{B}_n{}^i$ l'algèbre de Von Neumann induite par $\mathscr{B}_n$ dans $K_n{}^i$ et $\Phi_n{}^i$ l'homomorphisme normal de $\mathfrak{A}_n$ dans $\mathscr{B}_n{}^i$ composé de Φ_n et de l'induction sur $K_n{}^i$. On définit sur $\mathfrak{A}_n$ les états $T \to (\Phi_n{}^i(T)\, y_n{}^i \mid y_n{}^i)$. D'après les propriétés des états normaux, il existe une famille d'espaces de Hilbert $(E_n{}^i)_{i\in I_n}$ et une famille de vecteurs $(x_n{}^i)_{i\in I_n}$ $x_n{}^i \in H_n \otimes E_n{}^i$ tels que

$$(\Phi_n{}^i(T) y_n{}^i \mid y_n{}^i) = (T \otimes \mathbb{1}_{E_n{}^i}\, x_n{}^i \mid x_n{}^i).$$

En particulier on peut prendre $E_n{}^0 \simeq \mathbb{C}$ et $x_n{}^0 = e_n \otimes \xi_n$, $\xi_n \in E_n{}^0$, $\|\xi_n\| = 1$. Alors on sait (cf. [5, p. 55, démonstration du th. 3]) que $\Phi_n = S_n \circ R_n \circ A_n$ où:

A_n est l'ampliation

$$\mathfrak{A}_n \to \mathfrak{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n} \left(E_n = \bigoplus_{i\in I_n} E_n{}^i\right),$$

R_n l'induction

$$\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n} \to [\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n}]_{P_n}$$

où P_n est le projecteur sur le plus petit sous espace fermé de $H_n \otimes E_n$, stable par $\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n}$ et contenant $\{x_n{}^i \mid i \in I_n\}$,

S_n un isomorphisme spatial, induit par un opérateur unitaire V_n, de $[\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n}]_{P_n}$ sur $\mathcal{B}_n$, avec $V_n x_n{}^i = y_n{}^i$. En particulier $V_n(e_n \otimes \xi_n) = f_n$. Mais alors, considérons l'algèbre de Von Neumann $(\otimes_n^{e_n} \mathcal{A}_n) \otimes (\otimes_n^{\xi_n} \mathbb{C}_{E_n})$. De l'isomorphisme canonique $(\otimes_n^{e_n} H_n) \otimes (\otimes_n^{\xi_n} E_n) \to \otimes_n^{e_n \otimes \xi_n} (H_n \otimes E_n)$ on déduit un isomorphisme

$$C : \left(\bigotimes_n^{e_n} \mathcal{A}_n\right) \otimes \mathbb{C}_{\otimes_n^{\xi_n} E_n} \to \bigotimes_n^{e_n \otimes \xi_n} (\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n})$$

qui envoie

$$\left(\bigotimes_n T_n\right) \otimes \mathbb{1}_E \qquad \text{sur} \qquad \bigotimes_n (T_n \otimes \mathbb{1}_{E_n})$$

où $E = \otimes_n^{\xi_n} E_n$. D'autre part, le produit tensoriel des projecteurs P_n existe dans $\otimes_n^{e_n \otimes \xi_n} (H_n \otimes E_n)$, car $P_n(e_n \otimes \xi_n) = e_n \otimes \xi_n$. De plus, si F_n est le support de P_n, comme $e_n \otimes \xi_n \in F_n$, le support de $P = \otimes_n^{e_n \otimes \xi_n} P_n$ s'identifie à $F = \otimes_n^{e_n \otimes \xi_n} F_n$. En outre, P commute à $\otimes_n^{e_n \otimes \xi_n} (\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n})$. Notons R l'induction

$$R : \bigotimes_n^{e_n \otimes \xi_n} (\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n}) \to \left[\bigotimes_n^{e_n \otimes \xi_n} (\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n})\right]_P$$

D'après ce qui précède, il existe un isomorphisme spatial

$$D : \left[\bigotimes_n^{e_n \otimes \xi_n} (\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n})\right]_P \to \bigotimes_n^{e_n \otimes \xi_n} [\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n}]_{P_n}$$

Enfin, on définit un isomorphisme d'espace de Hilbert $F \to K$ où $K = \otimes_n^{f_n} K_n$ par $V = \otimes_n^{e_n \otimes \xi_n} V_n$ (Rappelons que $V_n(e_n \otimes \xi_n) = f_n$). On note S l'isomorphisme spatial déduit de V

$$S : \bigotimes_n^{e_n \otimes \xi_n} [\mathcal{A}_n \otimes \mathbb{C}_{E_n}]_{P_n} \to \bigotimes_n^{f_n} \mathcal{B}_n .$$

Alors, posant $\Psi = S \circ D \circ R \circ C \circ A$, ou A est l'ampliation $\otimes_n^{e_n} \mathcal{A}_n \to (\otimes_n^{e_n} \mathcal{A}_n) \otimes \mathbb{C}_E)$, Ψ définit un homomorphisme normal de $\otimes_n^{e_n} \mathcal{A}_n$ dans $\otimes_n^{f_n} \mathcal{B}_n$ qui envoie $\otimes_n^{e_n} T_n$ sur $\otimes_n^{f_n} \Phi_n(T_n)$. Ici $T_n \in \mathcal{A}_n$ pour tout n, et $T_n = \mathbb{1}_{H_n}$ pour presque tout n.

En utilisant Φ_n^{-1} on construit de la même façon un homomorphisme normal $\Psi' : \otimes_n^{e_n} \mathscr{B}_n \to \otimes_n^{e_n} \mathfrak{A}_n$ qui envoie $\otimes_n^{f_n} T'_n$ sur $\otimes_n^{e_n} \Phi_n^{-1}(T'_n)$. Ici $T'_n \in \mathscr{B}_n$ pour tout n et $T_n = \mathbb{1}_{K_n}$ pour presque tout n. On vérifie aisément que Ψ' est l'inverse de Ψ

LEMME 4. *Soit $(H_i, \mathfrak{A}_i, C_i, J_i)_{i\in I}$, une famille finie de formes standard d'algèbres de Von Neumann (cf. [3, 10]). Alors, il existe un unique cône fermé $C_I \subset \otimes_{i\in I} H_i$, tel que*

$$(1) \quad \bigotimes_{i\in I} C_i \underset{\text{def}}{=} \left\{ \xi \mid \xi = \bigotimes_{i\in I} \xi_i\,,\ \xi_i \in C_i\ \forall i \in I \right\} \subset C$$

$$(2) \quad \left(\bigotimes_{i\in I} \mathfrak{A}_i\,, \bigotimes_{i\in I} H_i\,, C_I\,, \bigotimes_{i\in I} J_i \right) \text{ est une forme standard.}$$

Démonstration.

(a) *Existence.* On peut supposer, d'après [10], que pour tout $i \in I$, $(H_i, \mathfrak{A}_i, C_i, J_i)$ est construite à partir d'un poids normal fidèle semi fini φ_i sur $\mathfrak{A}_i$. Le produit tensoriel $\varphi = \otimes_{i\in I} \varphi_i$ est un poids normal fidèle semi fini sur $\otimes_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ (voir les préliminaires de la Thèse d'A. Connes). La forme standard que l'on peut associer à φ fournit un cône C qui vérifie toutes les conditions voulues.

(b) *Démonstrons l'unicité.* Soient $(\otimes_i \mathfrak{A}_i, \otimes_i H_i, C, \otimes_i J_i)$ et $(\otimes_i \mathfrak{A}_i, \otimes_i H_i, C', \otimes_i J_i)$ deux formes standards avec $\otimes_{i\in I} C_i \subset C, C'$.

Alors il existe un unique opérateur unitaire U dans $H = \otimes_{i\in I} H_i$ implémentant l'automorphisme identité de $\mathfrak{A} = \otimes_{i\in I} \mathfrak{A}_i$ et tel que $U(C) = C'$ [10, th. 2.18].

Montrons que U restreint à $\otimes_{i\in I} C_i$ agit comme l'identité. Soit $\xi \in \otimes_{i\in I} C_i$; U implémentant l'identité de $\mathfrak{A}$, l'état de $\mathfrak{A}$ correspondant à $U\xi$ est le même que celui correspondant à ξ. Or il existe un unique vecteur de C', tel que l'état lui correspondant soit égal à celui correspondant à ξ (cf. [10, th. 2.17]. Comme $\xi \in \otimes_{i\in I} C_i \subset C'$ on a nécessaurement $U\xi = \xi$. Comme $\otimes_{i\in I} C_i$ est total dans H on en déduit que U est égal à l'identité et $C = C'$.

LEMME 5. *Soit $(H_i, \mathfrak{A}_i, C_i, J_i)_{i\in I}$ une famille dénombrable de formes standards d'algèbres de Von Neumann. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs unitaires, où $e_i \in C_i$ pour tout i. Alors, il existe un unique cône fermé $C \subset \otimes_{i\in I}^{e_i} H_i$ tel que:*

$$(1) \quad \bigotimes_{i\in I}^{e_i} C_i = \left\{ \xi \mid \xi \in \bigotimes_{i\in I}^{e_i} H_i\ ;\ \xi = \bigotimes_{i\in I} \xi_i\,,\ \xi_i = e_i \text{ pour presque tout } i, \right.$$
$$\left. \xi_i \in C_i \text{ pour tout } i \right\} \subset C$$

$$(2) \quad \left(H = \bigotimes_{i\in I}^{e_i} H_i\,, \mathfrak{A} = \bigotimes_{i\in I}^{e_i} \mathfrak{A}_i\,, C, \bigotimes_{i\in I}^{e_i} J_i \right) \text{ soit une forme standard.}$$

L'unicité se démontre exactement comme dans le Lemme 4. Montrons l'existence de C. Pour chaque partie finie $K \subset I$ on définit un cone fermé C'_K de H comme suit.

On considère le cône $C_K \subset \otimes_{i\in K} H_i$, déterminé grace au Lemme 4 par les formes standards $(H_i, \mathcal{A}_i, C_i, J_i)_{i\in K}$ et l'on pose

$$C'_K = (C_K) \otimes \left(\bigotimes_{i\in I-K} e_i \right)$$

Nous définissons alors C comme la fermeture de la réunion des C'_K, où K décrit l'ensemble des parties finies de I.

Montrons que C vérifie les propriétés voulues:

(a) il est clair que C vérifie 1.

(b) C est autopolaire dans H:

Soit donc $\xi \in H$ tel que:

$$(\xi \mid \eta) \geqslant 0 \qquad \forall \eta \in C$$

Soit $\epsilon > \emptyset$; il existe $K \subset I$, K fini tel que $\| P_K\xi - \xi \| < \epsilon$, où P_K est la projection sur $(\otimes_{i\in K} H_i) \otimes (\otimes_{i\in I-K} e_i)$. Donc

$$P_K\xi = (\xi_K) \otimes \left(\bigotimes_{i\in I-K} e_i \right) \qquad \text{où} \quad \xi_K \in \bigotimes_{i\in K} H_i$$

D'après la définition de P_K, ξ_K et C_K, il est facile de voir que $(\xi_K \mid \eta) \geqslant \emptyset$ $\forall \eta \in C_K$. C_K étant autopolaire $\xi_K \in C_K$, donc $P_K\ \xi \subset C$. C étant fermé on en déduit que $\xi \in C$. (c.q.f.d.).

(c) Etudions maintenant le commutant de $\mathcal{A}$.

On sait (cf. [8, p. 35]) que ce dernier est égal à $\otimes_{i\in I}^{e_i} \mathcal{A}'_i$. Comme $J_i \mathcal{A}_i J_i = \mathcal{A}'_i$ et $J = \otimes_{i\in I}^{e_i} J_i$ on a facilement $J\mathcal{A}J = \mathcal{A}'$.

(d) Etudions maintenant le centre $Z(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}'$.

Le centre $Z(\mathcal{A})$ est en fait égal au produit tensoriel $\otimes_{i\in I}^{e_i} Z(\mathcal{A}_i)$ des centres des $\mathcal{A}_i$ (ceci est démontré dans [8], sous l'hypothèse supplémentaire que les $\mathcal{A}_i$ sont semi finies, mais est vrai dans le cas général puisque le théorème du commutant des produits tensoriels finis est démontré sans cette restriction). Alors tout élément de $Z(\mathcal{A})$ est limite faible d'opérateurs de la forme $Z = T \otimes \otimes_{i\in I-K}^{e_i} \mathbb{1}_{H_i}$ où $K \subset I$ est fini et T dans le centre de $\otimes_{i\in K} \mathcal{A}_i$.

D'après le Lemme 4 on a $(\otimes_{i\in K} J_i)\ T(\otimes_{i\in K} J_i) = T^*$. D'où $JZJ = Z^*$ et la propriété correspondante pour les éléments de $Z(\mathcal{A})$ en résulte grâce à la continuité faible de $T \to JTJ$ et $T \to T^*$.

(e) J laisse fixe les éléments de C (clair).

(f) Montrons enfin que: $\forall T \in \mathcal{A}\ (TJTJ)\ (C) \subset C$.

D'après la définition de C il suffit de montrer que $\forall T \in \mathfrak{A}$, $\forall K_0 \subset I$, K_0 fini, $TJTJ(C'_{K_0}) \subset C$.

Or tout élément de $\mathfrak{A}$ est limite forte d'opérateurs de la forme ${}_KT = T_K \otimes \bigotimes_{i\in I-K}^{e_i} \mathbb{1}_{H_i}$ où $K \subset I$ est fini,

$$T_K \in \bigotimes_{i\in K} \mathfrak{A}_i \qquad \text{et} \qquad \| T_K \| \leqslant \| T \|$$

Il est clair que l'on peut supposer $K_0 \subset K$. Or

$${}_KTJ_KTJ = \left[T_K\left(\bigotimes_{i\in K} J_i\right) T_K\left(\bigotimes_{i\in K} J_i\right)\right] \otimes \mathbb{1}_{\otimes_{i\in I-K}^{e_i} H_i}$$

Alors le Lemme 4 permet de conclure

$${}_KTJ_KTJ(C'_{K_0}) \subset C'_K \subset C$$

Le produit des opérateurs étant fortement continu sur les parties bornées de $\mathscr{L}(H)$, $TJTJ$ est limite forte d'opérateurs ${}_KTJ_KTJ$ où ${}_KT$ est comme ci-dessus. On en déduit $\forall T \in \mathfrak{A}$, $\forall K_0 \subset I$, (K_0 fini), $TJTJ(C'_{K_0}) \subset C$, ce qui achève la démonstration du lemme.

5. Commutant d'un Produit Tensoriel Continus de Représentations Unitaires

Théorème 1. *Le commutant de $\hat{U}$ (cf. Section 1) est engendré par des opérateurs unitaires factorisables, c'est à dire par des opérateurs de la forme $U_{A,b,c}$, où A est décomposable dans $\int_X^{\oplus} H_x d_\mu(x)$.*

Démonstration: Pour chaque $\theta \in \Theta$, on considère la forme standard de $\mathfrak{A}_\theta$, $(F_\theta, \mathscr{B}_\theta, J_\theta, C_\theta)$. L'isomorphisme correspondant entre $\mathfrak{A}_\theta$ et $\mathscr{B}_\theta$ est noté Φ_θ. On note f_θ, l'élément de C_θ tel que Φ_θ transporte l'état de $\mathfrak{A}_\theta$ correspondant à Exp $\emptyset$ en celui correspondant à f_θ. f_θ existe et est unique (cf. [10, Theorem 2.17]. De plus $\| f_\theta \| = 1$. Soit $\mathscr{F} = (\theta_i)_{i\in I}$, $\in\tilde{\Theta}$. D'après le Lemme 2, on a un isomorphisme canonique entre $\bigotimes_{i\in I}^{\mathrm{Exp}\,\emptyset} \mathfrak{A}_{\theta_i}$ et $\mathfrak{A}_{\vee\theta_i}$. Le Lemme 3 permet de définir un isomorphisme canonique $\Psi_{\mathscr{F}} : \bigotimes_{i\in I}^{f_{\theta_i}} \mathscr{B}_{\theta_i} \to \mathscr{B}_\theta$ qui transporte l'état correspondant à $\bigotimes_{i\in I}^{f_{\theta_i}} f_{\theta_i}$ en l'état correspondant à f_θ.

D'après le Lemme 5 et l'unicité des formes standards il existe un unique isomorphisme

$$\Lambda_{\mathscr{F}} : \bigotimes_{i\in I}^{f_{\theta_i}} F_{\theta_i} \to F_{\vee_{i\in I}\theta_i}$$

qui vérifie

$$\Lambda_{\mathscr{F}}\left(\overset{f_{\theta_i}}{\underset{i\in I}{\bigotimes}} C_{\theta_i}\right) \subset C_{\vee_{i\in I}\theta_i}$$

$$\Lambda_{\mathscr{F}}\left(\overset{f_{\theta_i}}{\underset{i\in I}{\bigotimes}} J_{\theta_i}\right)\Lambda_{\mathscr{F}}^{-1} = J_{\vee_{i\in I}^{\theta_i}}$$

et

$$\Psi_{\mathscr{F}}(T) = \Lambda_{\mathscr{F}} T \Lambda_{\mathscr{F}}^{-1}, \qquad \forall T \in \overset{f_{\theta_i}}{\underset{i\in I}{\bigotimes}} \mathscr{B}_{\theta_i}$$

Rappelons que

$$\Psi_{\mathscr{F}}\left(\overset{f_{\theta_i}}{\underset{i\in I}{\bigotimes}} P_i\right) = \Phi_{\vee_{i\in I}\theta_i}\left(\overset{\mathrm{Exp}\,\emptyset}{\underset{i\in I}{\bigotimes}} \Phi_{\theta_i}^{-1}(P_i)\right).$$

Utilisant les Lemmes 3 et 5, et l'associativité des produits tensoriels infinis d'algèbres de von Neumann, on voit facilement que

$$((F_\theta)_{\theta\in\Theta}, (f_\theta)_{\theta\in\Theta}, (\Lambda_{\mathscr{F}})_{\mathscr{F}\in\tilde{\Theta}})$$

est une algèbre de décomposition tensorielle de $(F_{\mathbb{1}}, f_{\mathbb{1}})$. En outre, il est clair que $\mathscr{B}_{\mathbb{1}} \subset \mathscr{L}(F_{\mathbb{1}})$ est engendré par des opérateurs unitaires factorisables à savoir les $\Phi_{\mathbb{1}}(\tilde{U}(\tilde{g}))$, $\tilde{g} \in G^{(X)}$. En outre $J_{\mathbb{1}}$ est factorisable. Alors le commutant de $\mathscr{B}_{\mathbb{1}}$ dans $\mathscr{L}(F_{\mathbb{1}})$ est engendré par des opérateurs factorisables. Étudions alors $\Phi_\theta^{-1}\colon \mathscr{B}_\theta \to \mathscr{A}_\theta$. Comme Exp $\emptyset$ est totalisateur pour $\mathscr{A}_\theta$, d'après le Lemme 1 et que l'état de $\mathscr{B}_\theta$ associé à f_θ et celui de $\mathscr{A}_\theta$ associé à Exp $\emptyset$ se correspondent par Φ_θ, Φ_θ^{-1} se décompose en l'induction $\mathscr{B}_\theta \to [\mathscr{B}_\theta]_{Q_\theta}$ où Q_θ est le projecteur sur la fermeture E_θ de $\mathscr{B}_\theta f_\theta$ et un isomorphisme spatial implémenté par un opérateur unitaire $V_\theta : E_\theta \to SH_\theta$ qui envoie f_θ sur Exp $\emptyset$. De la factorisation de $\mathscr{B}_{\vee_{i\in I}\theta_i}$ et de celle de $f_{\vee_{i\in I}\theta_i}$, résulte facilement un isomorphisme canonique $\otimes_{i\in I}^{f_{\theta_i}} E_{\theta_i} \simeq E_{\vee_{i\in I}\theta_i}$ qui envoie $\otimes_{i\in I} f_{\theta_i}$ sur $f_{\vee_{i\in I}\theta_i}$. On détermine ainsi une structure d'algèbre de Boole de décomposition tensorielle (A.B.D.T. en abrégé) de $(E_{\mathbb{1}}, f_{\mathbb{1}})$. $Q_{\mathbb{1}}$ est alors un opérateur factorisable de $F_{\mathbb{1}}$ dans $E_{\mathbb{1}}$ pour les A.B.D.T. définies plus haut sur $F_{\mathbb{1}}$ et $E_{\mathbb{1}}$. De même $V_{\mathbb{1}}$ est factorisable. $\mathscr{B}_{\mathbb{1}}'$ étant engendré par des opérateurs unitaires factorisables il en est de même de $[\mathscr{B}_{\mathbb{1}}]_{E_{\mathbb{1}}}$, puis par transport de structure, de $\mathscr{A}_{\mathbb{1}}'$. Or d'après [2, Théorème 6.2; 9, Théorème 5.2] ceux ci sont de la forme décrite dans le théorème.

6. Irréductibilité de Certains Produits Tensoriels Continus

Dans ce paragraphe, on ne suppose plus, à priori, que $b_x(G)$ est total dans H_x, p.p.

THÉORÈME 2. *Si pour presque tout x, A_x est somme discrète de représentations irréductibles 2 à 2 inéquivalentes, non triviales, $A_x = \bigoplus_{i\in I_x} A_x^i$ ($H_x = \bigoplus_{i\in I_x} H_x^i$) et si les cocycles b_x^i pour tout $i \in I_x$, projections de b_x sur H_x^i, sont non triviaux, $\tilde{U}$ est irreductible.*

Démonstration: (a) p.p. b_x est total dans H_x. En effet le sous espace $K_x \subset H_x$ engendré par $b_x(G)$ est stable par G. D'autre part, la restriction du projecteur P_x^i sur H_x^i à K_x, envoie b_x sur b_x^i et par suite K_x sur H_x^i. Comme cette restriction est un entrelacement, la représentation de G dans K_x contient une sous représentation équivalente à $\bigoplus_{i\in I_x} A_x^i$. D'où $K_x = H_x$.

(b) D'après le Théorème 1 il suffit de démontrer que tout opérateur de la forme $U_{T,e,1}$, où T est décomposable, qui commute à $\tilde{U}$ est scalaire. En écrivant que $U_{T,e,1}$ commute à $\tilde{U}$ on obtient

$$\forall \tilde{g} \in G^{(X)},\ T\tilde{A}(\tilde{g}) = \tilde{A}(\tilde{g})T$$
$$\forall \tilde{g} \in G^{(X)},\ e + T\tilde{b}(\tilde{g}) = \tilde{b}(\tilde{g}) + \tilde{A}(\tilde{g})e.$$

On déduit facilement de ces conditions, de la séparabilité de G et de la continuité des A_x et b_x que:

p.p.
$$\forall g \in G,\ T_x(g) = A_x(g)\,T_x\,.$$
p.p.
$$\forall g \in G,\ e_x + T_x b_x(g) = b_x(g) + A_x(g)\,e_x\,.$$

Comme $A_x = \bigoplus_{i\in I_x} A_x^i$ est la désintégration centrale de A_x, T_x est diagonalisable, soit encore $T_x = \bigoplus_{i\in I_x} t_x^i\, \mathbb{1}_{H_x^i}$ ou t_x^i est un nombre complexe de module 1. En projetant sur H_x^i la deuxième condition on a:

$$e_x^i + t_x^i b_x^i(g) = b_x^i(g) + A_x^i(g)\,e_x^i$$

où e_x^i est la projection de e_x sur H_x^i. Si t_x^i est différent de 1, il est facile de voir que b_x^i est un cobord. Une contradiction qui montre que $t_x^i = 1$ et $e_x^i = A_x^i(g)\,e_x^i$. Or A_x^i est irréductible non triviale; on a donc $e_x^i = \emptyset$. En définitive $T = \mathbb{1}_H$, $e = \emptyset$ et $U_{T,e,1}$ est bien scalaire. Le théorème est démontré.

THÉORÈME 3. *Si G contient un sous groupe compact K tel que: pour μ presque tout x*

(a) *$A_{x|K}$ ne contient pas la représentation triviale de K,*

(b) *b_x est nul sur K et $b_x(G)$ est total dans H_x,*

$\tilde{U}$ est irréductible.

Démonstration: Il suffit de démontrer que tout opérateur $U_{T,e,1}$ (où T est décomposable) qui commute à $\tilde{U}$, est scalaire. On obtient facilement p.p. $\forall g \in G,\ T_x A_x(g) = A_x(g)\,T_x$

$$\forall g \in G,\ e_x + T_x b_x(g) = b_x(g) + A_x(g)\,e_x\,.$$

Si l'on prend $g \in K$ dans la 2ème équation on a:

$$\text{p.p. } \forall k \in K \qquad e_x = A_x(k)\, e_x$$

D'après les propriétés des A_x on en déduit $e = \emptyset$. Mais alors

$$\text{p.p. } \forall g \in G \qquad T_x b_x(g) = b_x(g).$$

D'où, puisque $b_x(G)$ est total dans H_x p.p.

$$T_x = \mathbb{1}_{H_x} \text{ p.p} \qquad \text{et} \qquad T = \mathbb{1}_H .$$

D'où $U_{T,e,1} = \mathbb{1}_{SH}$ et le théorème est démontré.

Remarque. Lorsque $A_x = A$, $b_x = b$ pour tout $x \in X$ le Théorème 3 est identique au Théorème 1 de [7].

References

1. H. Araki, Factorizable representations of current algebra, *Publ Res. Inst. Math. Sci.* **5** (1970), 361–422.
2. H. Araki et J. Woods, Complete Boolean algebras of type I factors, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **2** (1966), 157–242.
3. A. Connes, Caractérisation des espaces vectoriels ordonnés sous jacents aux algèbres de Von Neumann, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **24** (1974), 121–156.
4. P. Delorme, 1-cohomologie des représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples et résolubles, produits tensoriels continus, *Bull. Soc. Math. France*, à paraitre.
5. J. Dixmier, "Les Algèbres d'Opérateurs dans l'espace Hilbertien," Gauthier–Villars, Paris, 1969.
6. I. M. Gelfand, M. I. Graiev, and A. M. Verchik, Representations of the group $SL(2, R)$, where R is a ring of functions, *Russian Math. Surveys* **28** (1973), 87–132.
7. I. M. Gelfand, M. I. Graiev, and A. M. Verchik, Représentations des groupes $G^{(X)}$ et cohomologie (en russe), *Funkcional Anal. Prilozen.* **8** (1974), 67–69.
8. A. Guichardet, "Tensor Products of C^* Algebras," Vol. 12, Mat. Inst., Aarhus Univ., Lecture Notes, 1969.
9. A. Guichardet, "Symmetric Hilbert Spaces and Related Topics," Lecture Notes in Mathematics No. 261, Springer-Verlag, Berlin, 1972.
10. U. Haagerup, "The Standard Form of Von Neumann Algebras," Math. Inst. Copenhagen, Preprint séries No. 15, 1973.
11. K. R. Parthasarathy and K. Schmidt, Factorisable representations of current group and the Araki–Woods unbedding theorem, *Acta Math.* **128** (1972), 53–71.
12. R. F. Streater, Current commutations relations, continuous tensor products and infinitely divisible group representations, *Rend. Sci. Inst. Fis. E. Fermi* **11** (1969), 247–263.
13. M. Takesaki, "Tomita's Theory of Modular Hilbert Algebras and it's Application," Lecture Notes in Mathematics No. 128, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
14. A. Guichardet, Representations de $G^{(X)}$ selon Gelfand et Delorine, Exposé au Seminaire Bourbaki, No. 486.