JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **43**, 258–279 (1981)

Sur les représentations des groupes de déplacements de Cartan

C. CHAMPETIER ET P. DELORME

Centre de Mathématiques de l'École Polytechnique, Laboratoire associé au CNRS N° 169, Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex, France

Communicated by the Editors

Received July 31, 1980

Soient G un groupe de Lie semi-simple connexe réel de centre fini, K un sous-groupe compact maximal de G, $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{k}$) l'algèbre de Lie de G (resp. K), $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. Dans cet article, nous classifions à Naïmark-équivalence près les représentations topologiquement complètement irréductibles du groupe de déplacements de Cartan $G_0 = K \ltimes \mathfrak{p}$ produit semi-direct de K et de $\mathfrak{p}$. Notons que la classification des représentations unitaires irréductibles de G_0 est due à G. W. Mackey (cf. "Theory of Group Representations," University of Chicago, 1955, par. 8, en particulier th. 3.11 et la discussion qui suit. Nos méthodes sont très différentes. Tout d'abord, nous démontrons un théorème du sous-module pour ces représentations, analogue à celui de Casselman pour les représentations des groupes semi-simples. Puis nous étudions les représentations ayant un vecteur fixé par K en utilisant la transformation de Poisson attachée à G_0, définie par S. Helgason (A duality for symmetric spaces with applications to group representations. III. Tangent space analysis, preprint). Nous déterminons en particulier le noyau de cette transformation, ce qui améliore un résultat d'Helgason (op. cit. théorème 6.2., p. 39) qu'entre autres nous retrouvons par une méthode plus simple. Le cas général est ensuite étudié grâce à des techniques de produits tensoriels par des modules de dimension finie.

INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe réel de centre fini; $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie; $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$. Soit K le sous-groupe compact maximal de G correspondant à $\mathfrak{k}$. P_0 désigne $\mathfrak{p}$ muni de sa seule structure d'espace vectoriel et de l'action de K. On note G_0 le produit semi-direct $K \ltimes P_0$, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{p}_0$ l'algèbre de Lie de G_0. Dans cet article, nous classifions les représentations topologiquement complètement irréductibles de G_0 dans des espaces de Banach à Naimark-équivalence près, ce qui revient à classer les $(\mathfrak{g}_0, K)$-modules simples admissibles à équivalence près.

Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$; $\mathfrak{q}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{p}$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. On note M le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K, M'

0022-1236/81/110258–22$02.00/0

son normalisateur dans K, $W = M'/M$. On identifie le dual complexifié $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ de $\mathfrak{a}$ au sous-espace de $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}^*$ constitué des formes linéaires nulles sur $\mathfrak{q}$. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, K^λ le stabilisateur de λ dans K, $(\sigma, E_\sigma) \in \widehat{K^\lambda}$ une représentation irréducible de K^λ. On pose:

$$V^\infty(\sigma, \lambda) = \{f \in C^\infty(K, E_\sigma) \mid \forall k \in K, \forall x \in K^\lambda, f(kx) = \sigma(x^{-1}) f(k)\}$$

muni de l'action de G_0:

$$\forall f \in V^\infty(\sigma, \lambda), \forall X \in \mathfrak{p}_0, \forall k, k' \in K, \qquad (\pi_{\sigma,\lambda}(\exp X \cdot k) f)(k') = e^{i\lambda(k'^{-1} \cdot X)} f(k^{-1}k').$$

Soit $V(\sigma, \lambda)$ l'ensemble des vecteurs K-finis de $V^\infty(\sigma, \lambda)$. C'est un $(\mathfrak{g}_0, K)$-module. Nous avons démontré le théorème suivant:

THÉORÈME A. (1) $\forall \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $\forall \sigma \in \widehat{K^\lambda}$, *$V(\sigma, \lambda)$ est un $(\mathfrak{g}_0, K)$-module irréductible.*

(2) *Pour tout $(\mathfrak{g}_0, K)$-module irréductible V, il existe $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et $\sigma \in \widehat{K^\lambda}$ tels que V soit isomorphe à $V(\sigma, \lambda)$.*

(3) *Les $(\mathfrak{g}_0, K)$-modules $V(\sigma, \lambda)$ et $V(\sigma', \lambda')$ sont isomorphes si et seulement s'il existe $w \in W$ tel que $\lambda' = w \cdot \lambda$ et $\sigma' \simeq w \cdot \sigma$.*

Pour arriver à ce résultat, nous démontrons tout d'abord un théorème du sous-module pour G_0 (théorème 1, Sect. 1) analogue à celui démontré par Casselman pour les groupes semi-simples. Pour cela, on définit la "série principale" de G_0 ainsi: soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $(\mu, E_\mu) \in \hat{M}$. On pose:

$$L^\infty(\mu, \lambda) = \{f \in C^\infty(K, E_\mu) \mid \forall k \in K, \forall m \in M, f(km) = \mu(m^{-1}) f(k)\}$$

muni de l'action de G_0:

$$\forall f \in L^\infty(\mu, \lambda), \forall X \in \mathfrak{p}_0, \forall k, k' \in K$$
$$(\pi_{\mu,\lambda}(\exp X \cdot k) f)(k') = e^{i\lambda(k'^{-1} \cdot X)} f(k^{-1}k').$$

On note $L(\mu, \lambda)$ l'ensemble des vecteurs K-finis de $L^\infty(\mu, \lambda)$.

Le résultat du paragraphe I est que pour tout $(\mathfrak{g}_0, K)$-module simple V, il existe $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et $\mu \in \hat{M}$ tels que V soit isomorphe à un sous-module de $L(\mu, \lambda)$. La démonstration est inspirée de Casselman et Osborne [2]. Il s'agit donc maintenant de reconnaître les sous-modules irréductibles de $L(\mu, \lambda)$. Nous montrons au paragraphe IV que $L(\mu, \lambda) = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{K^\lambda}} m(\mu, \sigma) V(\sigma, \lambda)$ où $m(\mu, \sigma)$ désigne la multiplicité de μ dans $\sigma|_M$. Le paragraphe III est entièrement consacré à démontrer l'irréductibilité des $V(\sigma, \lambda)$ (théorème 3). L'irréductibilité des $V(\varepsilon, \lambda)$ (ε est la représentation triviale de K^λ) est démontrée en utilisant une propriété de la transformation de Poisson établie au paragraphe II. Ce que nous appelons transformation de Poisson est ici l'application $\mathscr{P}$ définie de $C^\infty(K/K^\lambda)$ dans $C^\infty(\mathfrak{p}_0)$ pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ fixé, par:

$$\forall X \in \mathfrak{p}_0, \forall f \in C^\infty(K/K^\lambda), \qquad \mathscr{P}(f)(X) = \int_{K/K^\lambda} e^{-i\lambda(k^{-1}\cdot X)} f(\dot{k})\, d\dot{k}$$

où $d\dot{k}$ est la mesure normalisée, invariante par K, sur K/K^λ. Le résultat principal du paragraphe II (théorème 2) est le suivant:

THÉORÈME B. *La transformation de Poisson est injective.*

Dans le cas où λ est régulier ($K^\lambda = M$), ce théorème est démontré par Helgason [5, théorème 6.6]. Notre démonstration, qui a l'avantage de traiter le cas général, est plus élémentaire que celle d'Helgason, en ce sens qu'elle n'utilise que des résultats de [7], alors que celle d'Helgason utilise des résultats beaucoup plus profonds de Kostant sur les séries principales sphériques des groupes de Lie semi-simples. On démontre ensuite l'irréductibilité des $V(\sigma, \lambda)$ en se ramenant au cas sphérique en adaptant à notre problème une technique exposée dans [4, IV.1.1.]

Le paragraphe IV est consacré à la démonstration de la partie 3) du théorème A (théorème 4). Nous utilisons une technique de produit tensoriel par des représentations de dimension finie.

Enfin au paragraphe V, nous classifions les représentations topologiquement complètement irréductibles de G_0 à Naimark-equivalence près. Rappelons que la classification des représentations unitaires irréductibles de G_0 est due à Mackey [10].

1. THÉORÈME DU SOUS-MODULE

1.1. Soit G un groupe de Lie semi-simple réel connexe de centre fini, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$; K le sous-groupe compact maximal de G correspondant à $\mathfrak{k}$. On note P_0, $\mathfrak{p}$ muni de sa seule structure d'espace vectoriel et de l'action de K. Soit $G_0 = K \ltimes P_0$. le groupe de déplacements de Cartan associé à G, produit semi-direct de K et de P_0. Notons $\mathfrak{p}_0$ l'algèbre de Lie de P_0, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k} \ltimes \mathfrak{p}_0$ l'algèbre de Lie de G_0. Les éléments de G_0 seront noté $g = (x, k)$. On posera $k = (0, k)$ et $x = (x, e)$. $(x, k) \times (x', k') = (x + k \cdot x', kk')$ où $\cdot$ désigne l'action de K sur P_0. On a donc $(x, k) = x \times k$.

Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal dans $\mathfrak{p}$. On note $\mathfrak{q}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{p}$ pour la forme de Killing de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{q}$ est ici considéré comme une sous-algèbre de $\mathfrak{p}_0$. Soit M le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K, $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie; M' le normalisateur de $\mathfrak{a}$ dans K. Soit $W = M'/M$ le groupe de Weyl de la paire

$(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$. On pose $H = M \ltimes P_0$, $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} \ltimes \mathfrak{p}_0$. Si $\mathfrak{b}$ est une algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ désignera sa complexifiée, $U(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$, $S(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$ l'algèbre symétrique de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$ que l'on identifie à l'algèbre des fonctions polynômes sur $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^*$ dual de $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}$. Si B est un groupe de Lie, $\hat{B}$ désignera l'ensemble des classes de représentations unitaires irreductibles de B. Dans la suite, on regardera toujours $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ comme sous-espace de $\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}}^*$ en prolongeant toute forme linéaire sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ en une forme linéaire sur $\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}}$ en la prenant nulle sur $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$.

1.2. On définit comme suit la "série principale de représentations" de G_0: soient $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $(\mu, E_\mu) \in \hat{M}$; notons $\mu \otimes \lambda$ la représentation de H définie par

$$\forall m \in M, \forall X \in \mathfrak{p}_0, \forall x \in E_\mu, \qquad \mu \otimes \lambda(\exp X, m)(x) = e^{i\lambda(X)}\mu(m)x.$$

On note $E_{\mu,\lambda}$ l'espace de $\mu \otimes \lambda$. La série principale de G_0 est la famille de représentations:

$$\pi_{\mu,\lambda} = \operatorname*{Ind}_{H \uparrow G_0} \mu \otimes \lambda$$

agissant dans

$$L^\infty(\mu, \lambda) = \{f \in C^\infty(G_0, E_{\mu,\lambda}) \mid \forall X \in \mathfrak{p}_0, \forall m \in M, \forall g \in G_0, \\ f(g \cdot \exp X \cdot m) = e^{-i\lambda(X)}\mu(m^{-1}) f(g)\}$$

par:

$$\forall g, g' \in G_0, \forall f \in L^\infty(\mu, \lambda), \qquad (\pi_{\mu,\lambda}(g)f)(g') = f(g^{-1}g').$$

On note $L(\mu, \lambda)$ l'ensemble des vecteurs K-finis de $L^\infty(\mu, \lambda)$.C'est un $(\mathfrak{g}_0, K)$-module.

LEMME 1 (réciprocité de Frobénius). *Soient (π, V) un $(\mathfrak{g}_0, K)$-module, (r, E) une représentation de dimension finie de H, F l'ensemble des vecteurs K-finis de* $\operatorname{Ind}_{H\uparrow G_0} E$. *Alors*:

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}_0,K}(V, F) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathfrak{h},M}(V, E).$$

Preuve. Considérons l'application:

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}_0,K}(V, F) \to \operatorname{Hom}_{\mathfrak{h},M}(V, E) \\ T \to \tilde{T}: \tilde{T}(v) = T(v)(e), \forall v \in V.$$

Il est facile de voir que cette application est bien définie et fournit l'isomorphisme voulu.

1.3. On note $S(\mathfrak{p}_{0C})^K$ (resp. $S(\mathfrak{a}_C)^W$) les invariants de $S(\mathfrak{p}_{0C})$ (resp. $S(\mathfrak{a}_C)$) sous K (resp. W).

LEMME 2. *Comme module $S(\mathfrak{p}_{0C})$ est de type fini sur $S(\mathfrak{q}_C) \otimes S(\mathfrak{p}_{0C})^K$.*

Preuve. Comme module $S(\mathfrak{a}_C)$ est de type fini sur $S(\mathfrak{a}_C)^W$. Soient $u_1,..., u_m$ des générateurs homogènes de $S(\mathfrak{a}_C)$ sur $S(\mathfrak{a}_C)^W$. Appelons α l'opérateur de restriction de $S(\mathfrak{p}_{0C})$ sur $S(\mathfrak{a}_C)$. C'est un isomorphisme d'algèbre de $S(\mathfrak{p}_{0C})^K$ sur $S(\mathfrak{a}_C)^W$ [9, propositions 2.1.5.1 et 2.1.5.9]. Montrons par récurrence sur n que la composante homogène de degré n, $S(\mathfrak{p}_{0C})^n$, de $S(\mathfrak{p}_{0C})$ est engendrée par les u_i sur $S(\mathfrak{q}_C) \otimes S(\mathfrak{p}_{0C})^K$. Comme: $S(\mathfrak{p}_{0C})^n = S(\mathfrak{a}_C)^n \oplus S(\mathfrak{q}_C)^1 \otimes S(\mathfrak{a}_C)^{n-1} \oplus \cdots \oplus S(\mathfrak{q}_C)^n$, il suffit de le montrer par récurrence pour $S(\mathfrak{a}_C)^n$. Pour $n = 0$, c'est trivial. Supposons l'assertion vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$. Soit $x \in S(\mathfrak{a}_C)^n$. Il existe des X'_i homogènes dans $S(\mathfrak{a}_C)^W$ tels que $x - \sum_{i=1}^m X'_i u_i = 0$. L'action de K préservant la graduation de $S(\mathfrak{p}_{0C})$, on a

$$S(\mathfrak{p}_{0C})^K = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (S(\mathfrak{p}_{0C})^n)^K.$$

D'autre part, il est clair que $\alpha((S(\mathfrak{p}_{0C})^n)^K) = (S(\mathfrak{a}_C)^n)^W$. Donc il existe X_i homogène dans $S(\mathfrak{p}_{0C})^K$ tels que $\alpha(X_i) = X'_i$. D'où $\alpha(x - \sum_{i=1}^m X_i u_i) = 0$. Ainsi, $x - \sum_{i=1}^m X_i u_i$ est homogène de degré n et appartient à $S(\mathfrak{q}_C)^1 \otimes S(\mathfrak{a}_C)^{n-1} \oplus \cdots \oplus S(\mathfrak{q}_C)^n$. L'hypothèse de récurrence permet de conclure.

COROLLAIRE 1. *Sous l'une des hypothèses suivantes, le $(\mathfrak{g}_0, K)$-module V est de type fini en tant que $S(\mathfrak{q}_C)$-module:*

(a) *si V est irréductible;*

(b) *si V est admissible de type fini sur $U(\mathfrak{g}_{0C})$.*

Preuve. D'après le lemme 2:

$$U(\mathfrak{g}_{0C}) = S(\mathfrak{p}_{0C}) \otimes U(\mathfrak{k}_C) = \sum_{i=1}^m S(\mathfrak{q}_C) \otimes S(\mathfrak{p}_{0C})^K \otimes \mathbb{C}u_i \otimes U(\mathfrak{k}_C).$$

Supposons tout d'abord V irréductible. V est engendré sur $U(\mathfrak{g}_{0C})$ par n'importe quel vecteur non nul x. Alors le sous-espace vectoriel E engendré par $(\sum_{i=1}^m \mathbb{C}u_i \otimes U(\mathfrak{k}_C))x$ est de dimension finie. L'algèbre $S(\mathfrak{p}_{0C})^K$ est dans le centre de l'algèbre enveloppante et donc agit scalairement sur V (cf. [3, proposition 2.6.8]. D'où $V = U(\mathfrak{g}_{0C})x = S(\mathfrak{q}_C)E$, ce qui démontre le corollaire dans ce cas.

Supposons maintenant V admissible de type fini, plus précisément V engendré par $x_1,..., x_p$ sur $U(\mathfrak{g}_{0C})$. On peut supposer que chaque x_i se situe dans une composante isotypique de V. Soit E_1 la somme des composantes isotypiques auxquelles appartiennent les x_i et E la somme des composantes isotypiques auxquelles appartiennent les éléments de $\sum_{i=1}^{m} u_i E_1$. L'algèbre $S(\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}})^K$ laisse stable toutes les composantes isotypiques, donc en particulier E, et dans ce cas encore $V = S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})E$.

COROLLAIRE 2. *Pour tout $(\mathfrak{g}_0, K)$-module irréductible (ou admissible de type fini) V, $V/\mathfrak{q}V$ est de dimension finie.*

Preuve. D'après le lemme 2, il existe $v_1, \ldots, v_n$ tel que :

$$V = S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})\, v_1 + \cdots + S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})\, v_n$$

soit $V = \mathbb{C}v_1 + \cdots + \mathbb{C}v_n + \mathfrak{q}_{\mathbb{C}} S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})\, v_1 + \cdots + \mathfrak{q}_{\mathbb{C}} S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})\, v_n$ d'où le résultat.

1.4. On suppose dorénavant V irréductible. Le but de ce paragraphe est de démontrer que $V/\mathfrak{q}V \neq \{0\}$. Nous allons utiliser des résultats de [7] et pour ce faire, nous allons introduire quelques notations supplémentaires.

Soit $G_{\mathbb{C}}$ le groupe adjoint de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$: $K_{\mathbb{C}}$ le sous-groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ correspondant à $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}\mathbb{C}}\, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$. C'est la composante neutre du sous-groupe algébrique K_θ de $G_{\mathbb{C}}$ des éléments qui commutent à θ, prolongement $\mathbb{C}$-linéaire de l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}$ à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. $K_{\mathbb{C}}$ est donc algébrique. Nous remercions M. Duflo de nous avoir donné la démonstration du lemme suivant:

LEMME 3. *La clôture de toute $K_{\mathbb{C}}$-orbite dans $\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}}$ rencontre $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$.*

Preuve. Soit $X \in \mathfrak{p}_{0\mathbb{C}}$. Le groupe $K_{\mathbb{C}}$ étant algébrique, la clôture de toute $K_{\mathbb{C}}$-orbite contient une orbite fermée. Donc il existe $Y \in \mathfrak{p}_{0\mathbb{C}}$ tel que

$$K_{\mathbb{C}} \cdot Y \subset \overline{K_{\mathbb{C}} \cdot X} \qquad \text{et } K_{\mathbb{C}} \cdot Y \text{ fermée.}$$

Mais [7, théorème 4]:

$$K_{\mathbb{C}} \cdot Y \text{ fermée} \Leftrightarrow Y \text{ semi-simple,}$$

et [7 théorème 1]:

$$Y \text{ semi-simple} \Leftrightarrow K_{\mathbb{C}} \cdot Y \cap \mathfrak{a}_{\mathbb{C}} \text{ est non vide}$$

d'où le lemme.

LEMME 4. $V/\mathfrak{q}_{\mathbb{C}} V \neq \{0\}$.

Preuve. Soit I (resp. J) l'annulateur de V dans $S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})$ (resp. $S(\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}})$). On a $I \subset J$. Soit $\mathscr{V}(J)$ la variété des zéros de J, ensemble des points de $\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}}^*$ où tous les éléments de J s'annulent. $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ agissant par dérivation sur le $S(\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}})$-module V, J est ad $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$-stable [2, proposition 4.4] et donc $\mathscr{V}(J)$ est $K_{\mathbb{C}}$-stable; en effet:

$$\forall P \in J, \qquad \forall X \in \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \qquad (\operatorname{ad} X)(P) \in J,$$

donc:

$$\forall P \in J, \qquad \forall k \in K_{\mathbb{C}}, \qquad (\operatorname{Ad} k)(P) \in J.$$

D'où: $\forall k \in K_{\mathbb{C}}$, $\forall x \in \mathscr{V}(J)$, $\forall P \in J$, $(\operatorname{Ad} k)(P)(x) = P(\operatorname{Ad} k^{-1} \cdot x) = 0$, c'est-à-dire: $\forall k \in K_{\mathbb{C}}$, $\forall x \in \mathscr{V}(J)$, $\operatorname{Ad} k \cdot x \in \mathscr{V}(J)$.

Identifiant $\mathfrak{p}_0$ et $\mathfrak{p}_0^*$ par la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, on voit, grâce au lemme 3, que $\mathscr{V}(J)$ rencontre $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Les éléments de I, restrictions d'éléments de J à $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}^*$, s'annulent donc en 0. On a donc:

$$I \subset S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})\, \mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$$

ce qui équivaut à:

$$V/\mathfrak{q}_{\mathbb{C}} V \neq \{0\} \qquad [1, \text{ch. } 2, \text{sect. } 2, \text{n}^\circ\, 2, \text{corollaire } 3],$$

en utilisant le fait que V est de type fini sur $S(\mathfrak{q}_{\mathbb{C}})$.

THÉORÈME 1. *Pour tout $(\mathfrak{g}_0, K)$-module irréductible (π, V), il existe $\mu \in \hat{M}$ et $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tels que V soit isomorphe à un sous-module de $L(\mu, \lambda)$.*

Preuve. Comme M et $\mathfrak{p}_0$ normalisent $\mathfrak{q}$, $V/\mathfrak{q}V$ est un $(\mathfrak{h}, M)$-module. D'après le corollaire 2 et le lemme 4, il est non nul et de dimension finie. Comme P_0 est connexe, simplement connexe, on peut définir une structure de H-module sur $V/\mathfrak{q}V$. On peut donc choisir $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et $\mu \in \hat{M}$ tels que:

$$\operatorname{Hom}_H(V/\mathfrak{q}V, E_{\mu,\lambda}) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{h},M}(V/\mathfrak{q}V, E_{\mu,\lambda}) \neq \{0\}.$$

Comme $\mathfrak{q}$ agit trivialement sur $E_{\mu,\lambda}$:

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{h},M}(V/\mathfrak{q}V, E_{\mu,\lambda}) = \operatorname{Hom}_{\mathfrak{h},M}(V, E_{\mu,\lambda}) \neq \{0\}.$$

Alors, grâce au lemme 1:

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}_0,K}(V, L(\mu, \lambda)) \neq \{0\}.$$

Le module V étant irréductible, il en résulte que c'est un sous-module de $L(\mu, \lambda)$.

2. La transformation de Poisson

2.1. On rappelle que toute forme linéaire sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ est prolongée en une forme linéaire sur $\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}}$ en la prenant nulle sur $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$.

Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ fixée, Helgason [5] définit la transformation de Poisson $\mathscr{P}$ relative à G_0:

$$\mathscr{P}: C^\infty(K/M) \to C^\infty(\mathfrak{p}_0)$$

par

$$\forall X \in \mathfrak{p}_0, \forall f \in C^\infty(K/M):$$

$$\mathscr{P}(f)(X) = \int_{K/M} e^{-i\lambda(k^{-1}\cdot X)} f(\dot{k})\, d\dot{k}. \tag{2.1.1}$$

Il montre (op. cit. théorème 6.2, p. 39) que $\mathscr{P}$ est injective si et seulement si λ est régulier (c'est-à-dire si son stabilisateur K^λ dans K est égal à M). Dans ce chapitre, nous démontrons par une méthode sensiblement plus élémentaire que si dans la définition 2.1.1 de $\mathscr{P}$ nous remplaçons M par K^λ, $\mathscr{P}$ reste injective, même quand λ n'est plus régulier. Nous allons nous placer dans le groupe adjoint de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ où nous pourrons utiliser des résultats de [7]. Nous reviendrons à notre situation au chapitre suivant.

2.2. Nous allons faire un changement de notations, en nous conformant entièrement à celles de [7], que l'on utilisera tout au long de ce chapitre. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réductive complexe. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ une forme réelle de $\mathfrak{g}$ fixée une fois pour toutes. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{R}} + \mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$. $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ la décomposition de $\mathfrak{g}$ obtenue en complexifiant celle de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$, θ le prolongement de l'involution de Cartan de $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ à $\mathfrak{g}$, G le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$,

$$G_{\mathbb{R}} = \{a \in G \mid a \cdot \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \subset \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}\}.$$

Pour toute sous-algèbre $\mathfrak{b}$ non nécessairement complexe de $\mathfrak{g}$, nous noterons $\exp \operatorname{ad} \mathfrak{b}$ le sous-groupe analytique connexe de G correspondant à $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} \mathfrak{b}$. Pour tout groupe de Lie H, H^0 désignera la composante neutre de H.

Soit K_θ le sous-groupe des éléments de G commutant à θ, i.e.,

$$K_\theta = \{a \in G \mid \operatorname{Ad}_G a \circ \theta = \theta \circ \operatorname{Ad}_G a\}.$$

Soient $K = \exp \operatorname{ad} \mathfrak{k} = (K_\theta)^0$,

$K_{\mathbb{R}} = \exp \operatorname{ad} \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$ sous-groupe compact maximal de K,

$\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ un sous-espace abélian maximal dans $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$,

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ son complexifié, $A = \exp \operatorname{ad} \mathfrak{a}$,

$\mathfrak{m}$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{k}$.

M_θ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K_θ.

$M = \exp \operatorname{ad} \mathfrak{m} = (M_\theta)^0$ et

F le sous-groupe fini abélien constitué des éléments d'ordre 2 dans A.

Nous avons:

$$K_\theta = FK \qquad [7, \text{prop. } 1, \text{p. } 761] \tag{2.2.1}$$

$$M_\theta = FM \qquad [7, \text{lemme } 20, \text{p. } 805]. \tag{2.2.2}$$

Le groupe F normalise K et M (car K et M sont les composantes neutres de K_θ et M_θ).

2.3. Soit $x \in \mathfrak{a}$. x est un élément semi-simple de $\mathfrak{p}$. On appelle $\mathfrak{k}^x$, $\mathfrak{k}^x_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g}^x$, $\mathfrak{g}^x_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{p}^x$, K^x_θ, K^x, $K^x_{\mathbb{R}}$ les stabilisateurs de x dans $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_{\mathbb{R}}$, $\mathfrak{g}$, etc....

K^x et $K^x_{\mathbb{R}}$ sont des sous-groupes fermés de G d'algèbres de Lie respectives $\operatorname{ad} \mathfrak{k}^x$ et $\operatorname{ad} \mathfrak{k}^x_{\mathbb{R}}$. On a donc:

$$(K^x)^0 = \exp \operatorname{ad} \mathfrak{k}^x, \qquad (K^x_{\mathbb{R}})^0 = \exp \operatorname{ad} \mathfrak{k}^x_{\mathbb{R}}.$$

L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^x$ est réductive et $\mathfrak{g}^x = \mathfrak{k}^x + \mathfrak{p}^x$ est une décomposition de Cartan complexifiée de $\mathfrak{g}^x$ [7, Sect. 1.6, p. 779]. De plus:

$$\mathfrak{g}^x = (\mathfrak{g}^x_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}. \tag{2.3.1}$$

En effet, il est clair que: $(\mathfrak{g}^x_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{g}^x$. La réciproque résulte du fait que $y \in \mathfrak{g}$ commute à $x = u + iv$ $(u, v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}})$ si et seulement si y commute à u et à v (op. cit.). On en déduit:

$$\mathfrak{k}^x = (\mathfrak{k}^x_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}. \tag{2.3.2}$$

En effet:

$$\begin{aligned} x \in \mathfrak{k}^x &\Leftrightarrow x \in \mathfrak{g}^x \quad \text{et} \quad \theta x = x \\ &\Leftrightarrow x = u + iv, \quad u, v \in \mathfrak{g}^x_{\mathbb{R}}\ (2.3.1.) \text{ et } \theta u + i\theta v = u + iv \\ &\Leftrightarrow x \in (\mathfrak{k}^x_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Soit $G^{(x)}$ le groupe adjoint de $\mathfrak{g}^x$; $(K^{(x)})_\theta$ le sous-groupe de $G^{(x)}$ laissant fixe θ.

Soit $F^{(x)} = \{a \in \exp \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^x} \mathfrak{a} \mid a^2 = 1\}$. Comme x est semi-simple, G^x est connexe [6, lemme, p. 353]. Alors $\mathfrak{g}^x$ est stable sous G^x, et la restriction à $\mathfrak{g}^x$

des éléments de G^x envoie surjectivement G^x sur $G^{(x)}$ [6, lemme 6, p. 354]. Elle définit une application:

$$\pi_x : K_\theta^x \to (K^{(x)})_\theta .$$

D'après le lemme 10, p. 781 de [7], π_x est surjective.

2.4. Le lemme suivant décrit la disconnexité de K_θ^x:

LEMME 5. $K_\theta^x = F(K^x)^0$.

Preuve. D'après la démonstration du lemme 10, p. 781 (op. cit.):

$$(K^{(x)})_\theta = F^{(x)}((K^{(x)})_\theta)^0,$$
$$((K^{(x)})_\theta)^0 = \exp \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}^x} \mathfrak{k}^x = \pi_x[(K^x)^0]$$

d'où

$$(K^{(x)})_\theta = F^{(x)}\pi_x[(K^x)^0].$$

D'autre part,

$$F^{(x)} = \pi_x(F) \qquad \text{(op. cit.)}$$

et π_x étant surjective:

$$\pi_x(K_\theta^x) = (K^{(x)})_\theta = F^{(x)}\pi_x[(K^x)^0] = \pi_x(F)\,\pi_x[(K^x)^0],$$

soit encore

$$\pi_x(K_\theta^x) = \pi_x[F(K^x)^0]. \tag{2.4.1}$$

D'autre part, le noyau de π_x est le centralisateur de $\mathfrak{g}^x$ dans K_θ^x. Comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}^x$, $\operatorname{Ker} \pi_x \subset M_\theta = FM = MF$ (cf. (2.2.2)). D'après (2.4.1), on a donc:

$$K_\theta^x \subset MF(K^x)^0 = FM(K^x)^0 = F(K^x)^0$$

car $M \subset K$, stabilise x et est connexe. L'inclusion inverse est évidente $(F \subset A \cap K_\theta)$. Le lemme est démontré.

LEMME 6. *Le groupe $K_{\mathbb{R}}^x$ rencontre toutes les composantes connexes de K^x.*

Preuve. On a:

$$K^x = K \cap K_\theta^x = K \cap (F(K^x)^0),$$
$$K^x = (F \cap K)(K^x)^0.$$

Mais $F \subset G_{\mathbb{R}}$ et $G_{\mathbb{R}} \cap K = K_{\mathbb{R}}$ (op. cit. p. 762), donc $F \cap K \subset K_{\mathbb{R}}$ et $F \cap K \subset K_{\mathbb{R}}^{x}$ (car F stabilise x), ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque. Dans tout ce que l'on vient de faire, on peut remplacer $x \in \mathfrak{a}$ par $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, en remarquant que stabiliser $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ revient à stabiliser l'élément semi-simple $x_\lambda \in \mathfrak{a}$ défini par

$$\forall \alpha \in \mathfrak{a}, \qquad B_{\mathfrak{p}}(x_\lambda, \alpha) = \langle \lambda, \alpha \rangle,$$

où $B_{\mathfrak{p}}$ est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathfrak{p}$, K_θ-invariante, définie positive sur $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$.

2.5. On note $\mathscr{H}ol(K)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur K, et $\mathscr{A}(K_{\mathbb{R}})$ l'ensemble des fonctions analytiques sur $K_{\mathbb{R}}$. On fait agir K (resp. $K_{\mathbb{R}}$) sur $\mathscr{H}ol(K)$ (resp. $\mathscr{A}(K_{\mathbb{R}})$) par la représentation régulière gauche. On note $\mathscr{H}ol(K)_K$ (resp. $\mathscr{A}(K_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}}$) l'ensemble des vecteurs K-finis (resp. $K_{\mathbb{R}}$-finis) de $\mathscr{H}ol(K)$ (resp. $\mathscr{A}(K_{\mathbb{R}})$).

LEMME 7. *Soit r la restriction à $K_{\mathbb{R}}$ des fonctions holomorphes sur K. Alors r est un $K_{\mathbb{R}}$-isomorphisme de $\mathscr{H}ol(K)_K$ sur $\mathscr{A}(K_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}}$.*

Preuve. Il est évident que r envoie $\mathscr{H}ol(K)_K$ dans $\mathscr{A}(K_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}}$. Maintenant, soit f une fonction holomorphe sur K. Supposons que sa restriction à $K_{\mathbb{R}}$ soit nulle. Alors:

$$\forall X \in \mathfrak{k}_{\mathbb{R}}, \qquad (X \cdot f)(e) = \frac{d}{dt} f(\exp(-tX))\,|_{t=0} = 0$$

d'où

$$\forall X \in \mathfrak{k}, \qquad (X \cdot f)(e) = 0 \text{ (car } f \text{ est holomorphe).}$$

De la même façon, on montre que les dérivées successives $X_1 \cdots X_n \cdot f$ ($X_1, ..., X_n \in \mathfrak{k}$) de f s'annulent au point e. La fonction f étant holomorphe elle s'annule donc sur un voisinage de e.

Par prolongement analytique, elle s'annule sur K qui est connexe. r est donc injective.

Notons $\hat{K}_{\text{hol}}$ l'ensemble des classes de représentations holomorphes irréductibles de dimension finie de K,

$\widehat{K_{\mathbb{R}}}$ l'ensemble des classes de représentations irréductibles de $K_{\mathbb{R}}$.

Pour $\delta \in \hat{K}_{\text{hol}}$ (resp. $\delta \in \widehat{K_{\mathbb{R}}}$), on note V_δ l'espace d'une représentation de δ. En tant que K-module $\mathscr{H}ol(K)_K$ se décompose en somme directe:

$$\mathscr{H}ol(K)_K = \bigoplus_{\delta \in \hat{K}_{\text{hol}}} \dim_{\mathbb{C}}(V_\delta)\, V_\delta.$$

En effet, K étant un groupe algébrique réductif connexe complexe cela résulte de [6, sect. 2, pp. 347, 348]. D'autre part, d'après [8, corollaire 5.2., p. 118], $\mathcal{O}(K_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}}$ est l'espace des vecteurs K-finis de $L^2(K_{\mathbb{R}})$, donc en tant que K-modules:

$$\mathcal{O}(K_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}} = \bigoplus_{\delta \in \widehat{K_{\mathbb{R}}}} \dim_{\mathbb{C}}(V_\delta)\, V_\delta.$$

Mais $K_{\mathbb{R}}$ étant un sous-groupe compact maximal de K groupe complexe réductif connexe, on sait que la restriction à $K_{\mathbb{R}}$ est une bijection de $\hat{K}_{\text{hol}}$ sur $\widehat{K_{\mathbb{R}}}$. r étant un $K_{\mathbb{R}}$-morphisme injectif, il est donc surjectif pour des raisons de multiplicités.

Soit maintenant $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, K^λ (resp. $K^\lambda_{\mathbb{R}}$) le stabilisateur de λ dans K (resp. $K_{\mathbb{R}}$). On identifie $\mathscr{H}ol(K/K^\lambda)_K$ (resp. $\mathcal{O}(K_{\mathbb{R}}/K^\lambda_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}}$) à l'ensemble des fonctions dans $\mathscr{H}ol(K)_K$ (resp. $\mathcal{O}(K_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}}$) invariante par l'action régulière droite de K^λ (resp. $K^\lambda_{\mathbb{R}}$).

LEMME 8. *La restriction à $K_{\mathbb{R}}$ est un isomorphisme de $\mathscr{H}ol(K/K^\lambda)_K$ sur $\mathcal{O}(K_{\mathbb{R}}/K^\lambda_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}}$.*

Preuve. Clairement r envoie injectivement $\mathscr{H}ol(K/K^\lambda)_K$ dans $\mathcal{O}(K_{\mathbb{R}}/K^\lambda_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}}$. Pour $f \in \mathscr{H}ol(K)_K$ (resp. $\mathcal{O}(K_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}}$), $a \in K^\lambda$ (resp. $K^\lambda_{\mathbb{R}}$) $k \in K$ (resp. $K_{\mathbb{R}}$), posons: $(\tau_a f)(k) = f(ka)$.

Soit $f \in \mathcal{O}(K_{\mathbb{R}})_{K_{\mathbb{R}}}$ invariante à droite par $K^\lambda_{\mathbb{R}}$, i.e.,

$$\forall a \in K^\lambda_{\mathbb{R}}, \qquad \tau_a f - f = 0.$$

r^{-1} commutant à τ_a, on en déduit que $r^{-1}f$ est invariante à droite par $K^\lambda_{\mathbb{R}}$, et donc par $\mathfrak{k}^\lambda_{\mathbb{R}}$. Comme elle est holomorphe et que $\mathfrak{k}^\lambda = (\mathfrak{k}^\lambda_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ (d'après (2.3.2)), on en déduit, par un raisonnement analogue à celui du début de lemme 7 qu'elle est invariante par $\mathfrak{k}^\lambda$.

$r^{-1}f$ est donc invariante à droite par $(K^\lambda)^0$ et par $K^\lambda_{\mathbb{R}}$. Comme $K^\lambda_{\mathbb{R}}$ rencontre toutes les composantes connexes de K^λ (lemme 6) elle est invariante à droite par K^λ, ce qui démontre le lemme.

D'après [7, proposition 27, p. 802], pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ fixé, la restriction des polynômes de $S(\mathfrak{p})$ à l'orbite $\mathcal{O}_\lambda$ de λ sous K_θ est une surjection de $S(\mathfrak{p})$ sur l'ensemble $R(\mathcal{O}_\lambda)$ des fonctions rationnelles partout définies sur $\mathcal{O}_\lambda$; on sait que $R(\mathcal{O}_\lambda)$ est aussi l'ensemble des fonctions holomorphes sur $\mathcal{O}_\lambda$ qui sont K_θ-finies. Mais:

$$\mathcal{O}_\lambda = K_\theta \cdot \lambda = KF \cdot \lambda = K \cdot \lambda \simeq K/K^\lambda$$

et la condition de K_θ-finitude est équivalente à la condition de K-finitude, puisque F est fini. Finalement:

$$R(\mathcal{O}_\lambda) = \mathscr{H}ol(K/K^\lambda)_K.$$

Du lemme 8 et de ce que l'on vient de dire, on tire facilement la:

PROPOSITION 1. *$\forall \lambda \in \mathfrak{a}^*$, la restriction à l'orbite de λ sous $K_{\mathbb{R}}$ des polynômes de $S(\mathfrak{p})$ est une surjection de $S(\mathfrak{p})$ sur $\mathcal{O}(K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}^{\lambda})_{K_{\mathbb{R}}}$ (en identifiant $K_{\mathbb{R}} \cdot \lambda$ à $K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}^{\lambda}$).*

2.6. Soit $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ fixé. On prolonge comme d'habitude λ à $\mathfrak{p}$ en la prenant nulle sur $(\mathfrak{q}_{\mathbb{R}})_{\mathbb{C}}$ où $\mathfrak{q}_{\mathbb{R}}$ désigne l'orthogonal de $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ dans $\mathfrak{p}_{\mathbb{R}}$ pour la forme bilinéaire $B_{\mathfrak{p}}$.

On définit la transformation de Poisson

$$\mathscr{P}: C^{\infty}(K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}^{\lambda}) \to C^{\infty}(\mathfrak{p}_{\mathbb{R}})$$

comme suit:

$$\forall f \in C^{\infty}(K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}^{\lambda}),\ \forall X \in \mathfrak{p}_{\mathbb{R}},$$

$$\mathscr{P}(f)(X) = \int_{K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}^{\lambda}} e^{-i\lambda(k^{-1}\cdot X)} f(\dot{k})\, d\dot{k},$$

où $d\dot{k}$ est la mesure normalisée $K_{\mathbb{R}}$-invariante sur $K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}^{\lambda}$.

THÉORÈME 2. *La transformation de Poisson ainsi définie est injective.*

Preuve. Supposons $\mathscr{P}(f) = 0$. Alors, en différentiant $\mathscr{P}(f)$ à l'origine, nous obtenons:

$$\forall p \in S(\mathfrak{p}), \qquad \int_{K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}^{\lambda}} p(-ik \cdot \lambda)\, f(\dot{k})\, d\dot{k} = 0,$$

d'où $f = 0$ d'après la proposition 1, puisque $\mathcal{O}(K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}^{\lambda})_{K_{\mathbb{R}}}$ est dense dans $L^2(K_{\mathbb{R}}/K_{\mathbb{R}}^{\lambda})$.

3. UNE SÉRIE DE REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES

3.1. Nous reprenons dans ce chapitre les notations du chapitre 1.

G est un groupe de Lie semi-simple connexe de centre fini:

$\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie,

$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$,

$\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ un sous-espace abélien maximal,

K le sous-groupe compact maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$,

M le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K,

K^λ le stabilisateur de $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ dans K,

$G_0 = K \ltimes P_0$ le groupe de déplacements de Cartan associé à G.

Les notations du chapitre 2 deviennent:

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ algèbre de Lie complexifiée de $\mathfrak{g}$,

$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{k}_{\mathbb{C}} + \mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$,

$G_{\mathbb{C}}$ groupe adjoint de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

On désigne par Ad: $G \to G_{\mathbb{C}}$ l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$. L'image de cette application, notée Ad G, est un sous-groupe connexe de $G_{\mathbb{C}}$ égal à $\exp \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}\mathbb{C}} \mathfrak{g}$ (Ad $G = (G_{\mathbb{R}})^0$ dans les notations du chapitre 2) et Ker Ad $= Z$ centre de G. On a la suite exacte:

$$\{e\} \to Z \to G \to \operatorname{Ad} G \to \{e\}.$$

Le groupe Ad K est connexe et égal à $\exp \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}\mathbb{C}} \mathfrak{k}$. C'est le groupe $K_{\mathbb{R}}$ du chapitre 2. D'autre part, $Z \subset K$ d'où la suite exacte:

$$\{e\} \to Z \to K \to \operatorname{Ad} K \to \{e\}. \tag{3.1.1}$$

En outre, il est clair que $Z \subset K^\lambda$.

3.2. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ régulier (c'est-à-dire $K^\lambda = M$), nous montrerons que les représentations $L(\mu, \lambda)$ définies au chapitre 1 sont irréductibles. Par contre, cela n'est plus vrai quand on prend λ non régulier. Néanmoins dans ce cas, $L(\mu, \lambda)$ est complètement réductible, comme nous le montrerons au chapitre suivant. Nous allons définir dès maintenant une nouvelle série de représentations de G_0 qui vont coincider avec les $L(\mu, \lambda)$ dans le cas régulier, et avec les morceaux irréductibles des $L(\mu, \lambda)$ dans le cas non régulier.

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ prolongé comme d'habitude à $\mathfrak{p}_{\mathbb{C}}$; $(\sigma, E_\sigma) \in \widehat{K^\lambda}$. Soit $\sigma \otimes \lambda$ la représentation de $K^\lambda \ltimes P_0$ définie sur E_σ par:

$$\forall x \in E_\sigma,\ \forall X \in \mathfrak{p}_0,\ \forall m \in K^\lambda, \qquad \sigma \otimes \lambda\ (\exp X, m)x = e^{i\lambda(X)}\sigma(m)x.$$

Désignons par $V(\sigma, \lambda)$ l'ensemble des vecteurs K-finis de l'espace $V^\infty(\sigma, \lambda)$ de la représentation:

$$\pi_{\sigma,\lambda} = \operatorname*{Ind}_{K^\lambda \ltimes P_0 \uparrow G_0} \sigma \otimes \lambda \qquad \text{de } G_0,$$

avec

$$V^\infty(\sigma, \lambda) = \{f \in C^\infty(K, E_\sigma) \mid \forall k \in K, \forall m \in K^\lambda, f(km) = \sigma(m^{-1}) f(k)\}$$

et

$$\forall f \in V^\infty(\sigma,\lambda),\ (\pi_{\sigma,\lambda}(\exp X \cdot k)f)(k') = e^{i\lambda(k^{-1}\cdot X)} f(k^{-1}k').$$

$V(\sigma,\lambda)$ est un $(\mathfrak{g}_0, K)$-module admissible.

3.3. Pour toute représentation δ de dimension finie, on désigne par δ^* la contragrédiente. Remarquons d'autre part que $K^\lambda = K^{-\lambda}$. Définissons une application bilinéaire de $V^\infty(\sigma,\lambda) \times V^\infty(\sigma^*,-\lambda)$ dans $\mathbb{C}$ notée $(f, g) \to \langle f, g\rangle$ par:

$$\langle f, g\rangle = \int_{K/K^\lambda} \langle f(k), g(k)\rangle\, d\dot{k}.$$

On vérifie facilement que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est G_0-invariante, donc en particulier K-invariante. Pour $(\delta, E_\delta) \in \hat{K}$, appelons $V^\infty(\sigma,\lambda)^\delta$ (resp. $V^\infty(\sigma^*,-\lambda)^\delta$) la composante isotypique de type δ de $V^\infty(\sigma,\lambda)$ (resp. $V^\infty(\sigma^*,-\lambda)$). Il est clair que:

(1) la forme bilinéaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est non dégénérée.

(2) l'espace $V^\infty(\sigma,\lambda)^\delta$ est orthogonal à $V^\infty(\sigma^*,-\lambda)^\eta$ si et seulement si $\delta^* \neq \eta$.

Cette dualité entre $V^\infty(\sigma,\lambda)$ et $V^\infty(\sigma^*,-\lambda)$ induit une dualité entre $V(\sigma,\lambda)$ et $V(\sigma^*,-\lambda)$ qui possède les mêmes propriétés.

PROPOSITION 2. *Supposons qu'il existe $\delta \in \hat{K}$ tel que $V(\sigma,\lambda)$ et $V(\sigma^*,-\lambda)$ soient engendrés par n'importe quel sous-K-module irréductible de $V(\sigma,\lambda)^\delta$ (resp. $V(\sigma^*,-\lambda)^{\delta^*}$). Alors $V(\sigma,\lambda)$ et $V(\sigma^*,-\lambda)$ sont irréductibles.*

Preuve. Soit $V \subset V(\sigma,\lambda)$ un sous-$(\mathfrak{g}_0, K)$-module de $V(\sigma,\lambda)$ différent de $V(\sigma,\lambda)$. Alors, par hypothèse, V ne contient aucun vecteur de $V(\sigma,\lambda)^\delta$. Donc $V^\perp$ orthogonal de V contient $V(\sigma^*,-\lambda)^{\delta^*}$. D'où $V^\perp = V(\sigma^*,-\lambda)$ par hypothèse, et $V = \{0\}$. Q.E.D.

3.4. Désignons par ε la représentation triviale de K^λ. $\varepsilon = \varepsilon^*$; on peut identifier $V^\infty(\varepsilon,\lambda)$ à $C^\infty(K/K^\lambda)$. Z agit trivialement sur $V^\infty(\varepsilon,\lambda)$. En effet $Z \subset K^\lambda$ et:

$$\forall z \in Z,\ \forall k \in K,\ \forall f \in V^\infty(\varepsilon,\lambda),$$

$$(\pi_{\varepsilon,\lambda}(z)f)(k) = f(z^{-1}k) = f(kz^{-1}) = f(k).$$

Donc, d'après (3.1.1), $V^\infty(\varepsilon,\lambda)$ peut être considéré comme un $\mathrm{Ad}\, K \ltimes P_0$-module, auquel s'appliquent les résultats du paragraphe précédent.

PROPOSITION 3. *Pour tout* $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, *le* $(\mathfrak{g}_0, K)$*-module* $V(\varepsilon, \lambda)$ *est irréductible.*

Preuve. Soit $\mathbb{1}$ la fonction constante égale à 1 sur Ad K. Il est clair que $\mathbb{1} \in V^\infty(\varepsilon, \lambda)$ et que:

$$\forall k \in \operatorname{Ad} K,\ \forall X \in \mathfrak{p}_0,\ \forall k' \in \operatorname{Ad} K,$$
$$(\pi_{\varepsilon,\lambda}(\exp X \cdot k)\mathbb{1})(k') = e^{i\lambda(k'^{-1}\cdot X)}.$$

Donc $\mathbb{1}$ est Ad K-invariante. En outre $\mathbb{C}.\ \mathbb{1}$ est la composante isotypique de $V(\varepsilon, \lambda)$ de type ε_K (représentation triviale de K). Montrons que $\mathbb{1}$ est cyclique dans $V^\infty(\varepsilon, \lambda)$ (elle le sera donc dans $V(\varepsilon, \lambda)$ puisque qu'elle appartient à cet espace); soit $f \in V^\infty(\varepsilon, -\lambda)$ orthogonale au sous-Ad $K \ltimes P_0$-module de $V^\infty(\varepsilon, \lambda)$ engendré par $\mathbb{1}$. Alors:

$$\forall X \in \mathfrak{p}_0, \qquad \int_{\operatorname{Ad} K/(\operatorname{Ad} K)^\lambda} e^{i\lambda(k^{-1}\cdot X)} f(\dot{k})\, d\dot{k} = \mathscr{F}(f) = 0.$$

D'où $f = 0$ grâce au théorème 2.

De même $\mathbb{1}$ est cyclique dans $V^\infty(\varepsilon, -\lambda)$. La proposition 2 entraîne que $V^\infty(\varepsilon, \lambda)$ est un Ad $K \ltimes P_0$-module topologiquement irréductible. Donc $V(\varepsilon, \lambda)$ est un $(\mathfrak{g}_0, K)$-module irréductible.

3.5. Pour démontrer l'irréductibilité de $V(\sigma, \lambda)$, nous allons nous ramener au cas sphérique en adaptant à notre problème une technique exposée dans [4, sect. IV.1.1.]

Soit $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $(\sigma, E_\sigma) \in \widehat{K^\lambda}$. Soit $(\mu, E_\mu) \in \hat{K}$ tel que $\mu|_{K^\lambda}$ contienne σ. Désignons par F_μ un sous-espace K-irréductible de $\operatorname{Ind}_{K^\lambda \uparrow K} E_\sigma$ isomorphe à E_μ. On fait de F_μ un G_0-module en prenant triviale l'action de P_0 sur F_μ. Rappelons que F_μ est constitué de fonctions définies sur K à valeurs dans E_σ, et que les fonctions de $V^\infty(\varepsilon, \lambda)$ sont définies sur K à valeurs dans $\mathbb{C}$.

LEMME 9. *L'application linéaire*:

$$V(\varepsilon, \lambda) \otimes F_\mu \to V(\sigma, \lambda),$$
$$f \otimes v \to f \cdot v$$

définie par $(f \cdot v)(k) = f(k)\, v(k)$ *est un* $(\mathfrak{g}_0, K)$*-morphisme surjectif.*

Preuve. Il est clair que $f \cdot v \in V^\infty(\sigma, \lambda)$, et qu'elle est K-finie. Il est clair également que $f \otimes v \to f \cdot v$ est un $(\mathfrak{g}_0, K)$-morphisme. Pour montrer la surjectivité, prenons $\varphi \in V(\sigma^*, -\lambda)$ orthogonale à toutes les fonctions $f \cdot v$, $f \in V(\varepsilon, \lambda)$, $v \in F_\mu$. On a donc:

$$\int_{K/K^\lambda} \langle \varphi(k), f(k)\, v(k) \rangle\, d\dot{k} = \int_{K/K^\lambda} \langle \varphi(k), v(k) \rangle f(k)\, d\dot{k} = 0$$

pour tout $f \in V(\varepsilon, \lambda)$, $v \in F_\mu$. D'où:

$$\forall k \in K,\ \forall v \in F_\mu, \qquad \langle \varphi(k), v(k) \rangle = 0.$$

Supposons qu'il existe $k_0 \in K$ tel que $\varphi(k_0) \neq 0$. Alors, il existe $u \in E_\sigma$ tel que $\langle \varphi(k_0), u \rangle \neq 0$.

Il reste à montrer qu'il existe $v \in F_\mu$ tel que $v(k_0) = u$ pour aboutir à une contradiction. Considérons l'ensemble

$$E = \{v(k_0) \mid v \in F_\mu\} \subset E_\sigma.$$

On a $E \neq \{0\}$. En effet si: $\forall v \in F_\mu$, $v(k_0) = 0$, alors: $(k_0 k'^{-1} \cdot v)(k_0) = v(k') = 0\ \forall k' \in K$, ce qui est absurde. D'autre part, E est un sous-K^λ-module de E_σ. En effet: $\forall m \in K^\lambda$, $\sigma(m) \cdot v(k_0) = v(k_0 m) = (k_0 m^{-1} k_0^{-1} \cdot v)(k_0)$. Donc $E = E_\sigma$ et le lemme est démontré.

THÉORÈME 3. *Pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et tout $\sigma \in \widehat{K^\lambda}$, $V(\sigma, \lambda)$ est irréductible.*

Preuve. Soit $\mu \in \hat{K}$ tel que $\mu|_{K^\lambda}$ contienne σ. Soit $v \in V(\sigma, \lambda)^\mu$. Alors v peut être vu dans $\mathrm{Ind}_{K^\lambda \uparrow K}\, \sigma$, et on considère F_μ un sous-K-module irréductible du sous-K-module engendré par v dans $\mathrm{Ind}_{K^\lambda \uparrow K}\, \sigma$ (F_μ est isomorphe à E_μ). Montrons que $\mathbb{1} \cdot v = v$ est cyclique dans $V(\sigma, \lambda)$. Il est clair que l'on peut supposer $v \in F_\mu$ ce que nous ferons dans la suite. Alors, d'après le lemme 9, il suffit de montrer que:

$$U(\mathfrak{g}_{0\mathbb{C}})(\mathbb{1} \otimes v) = V(\varepsilon, \lambda) \otimes F_\mu.$$

Or:

$$S(\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}})(\mathbb{1} \otimes v) = V(\varepsilon, \lambda) \otimes \mathbb{C}v.$$

En effet,

$$\begin{aligned} V(\varepsilon, \lambda) &= U(\mathfrak{g}_{0\mathbb{C}})\mathbb{1} \qquad \text{(proposition 3)} \\ &= (S(\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}}) \otimes U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}))\mathbb{1} \\ &= S(\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}})\mathbb{1} \qquad \text{car } \mathbb{1} \text{ est } K\text{-invariant} \end{aligned}$$

et

$$S(\mathfrak{p}_{0\mathbb{C}})v = \mathbb{C}v \qquad (v \text{ étant considéré dans } F_\mu).$$

D'où $U(\mathfrak{g}_{0\mathbb{C}})(\mathbb{1} \otimes v) = U(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}})(V(\varepsilon, \lambda) \otimes v) = V(\varepsilon, \lambda) \otimes F_{\mu}$. Le théorème est démontré.

4. Classification des $(\mathfrak{g}_0, K)$-modules simples

4.1. D'après le théorème 1, tout $(\mathfrak{g}_0, K)$-module simple est isomorphe à un sous-module d'un $L(\mu, \lambda)$.

Nous avons montré au chapitre précédent que quant λ était régulier (alors $L(\mu, \lambda) = V(\mu, \lambda)$), $L(\mu, \lambda)$ était irréductible. Ceci n'est plus vrai dans le cas non régulier comme nous le montre le lemme suivant, qui est une conséquence immédiate de l'induction par étage:

LEMME 10. *Soit* $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $(\mu, E_\mu) \in \hat{M}$, $(\sigma, E_\sigma) \in \widehat{K^\lambda}$. *Soit* $m(\mu, \sigma)$ *la multiplicité de* μ *dans* $\sigma|_M$. *En tant que* $(\mathfrak{g}_0, K)$*-module*:

$$L(\mu, \lambda) = \bigoplus_{\sigma \in \widehat{K^\lambda}} m(\mu, \sigma)\, V(\sigma, \lambda).$$

COROLLAIRE 3. *Pour tout* $(\mathfrak{g}_0, K)$*-module irréductible* V, *il existe* $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *et* $\sigma \in \widehat{K^\lambda}$ *tels que* V *soit isomorphe à* $V(\sigma, \lambda)$.

Preuve. Cela résulte du lemme 10, du théorème 1, et du théorème 3.

4.2. Rappelons que le groupe de Weyl $W = M'/M$ de la paire $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ agit sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Soit $w \in W$, $\bar{w} \in M'$ un représentant de w. Pour tout $\sigma \in \widehat{K^\lambda}$, définissons $w \cdot \sigma \in \widehat{K^{w \cdot \lambda}}$ par:

$$\forall k \in K^{w \cdot \lambda}, \qquad (w \cdot \sigma)(k) = \sigma(\bar{w}^{-1} k \bar{w}).$$

D'une part, $K^{w \cdot \lambda} = \bar{w} K^\lambda \bar{w}^{-1}$; ce que l'on a écrit à un sens. D'autre part, la classe de la représentation $w \cdot \sigma$ ainsi définie ne dépend pas du représentant $\bar{w}$ de w choisi (car $M \subset K^\lambda$).

LEMME 11. $\forall w \in W$, $V(w \cdot \sigma, w \cdot \lambda) \simeq V(\sigma, \lambda)$.

Preuve. Définissons l'application:

$$V(\sigma, \lambda) \to V(w \cdot \sigma, w \cdot \lambda),$$
$$f \to f^{\bar{w}}$$

par:

$$\forall k \in K, \qquad f^{\bar{w}}(k) = f(k\bar{w}).$$

Il est clair que $f^{\bar{w}} \in V(w \cdot \sigma, w \cdot \lambda)$ et que $f \to f^{\bar{w}}$ est un $(\mathfrak{g}_0, K)$-isomorphisme. Q.E.D.

LEMME 12. *Supposons $V(\sigma, \lambda) \simeq V(\sigma', \lambda')$. Alors, il existe $w \in W$ tel que $\lambda' = w \cdot \lambda$.*

Preuve. Rappelons que pour $p \in S(\mathfrak{p}_{0\mathbf{C}})$, l'action de p sur $V(\sigma, \lambda)$ s'écrit:

$$\forall f \in V(\sigma, \lambda), \forall k \in K, \qquad (\pi_{\sigma,\lambda}(p)f)(k) = p(ik \cdot \lambda) f(k).$$

Si $p \in S(\mathfrak{p}_{0\mathbf{C}})^K$, l'action de p sur $V(\sigma, \lambda)$ est la multiplication par le scalaire $p(i\lambda)$. Si $V(\sigma', \lambda') \simeq V(\sigma, \lambda)$, alors:

$$p(i\lambda) = p(i\lambda') \qquad \forall p \in S(\mathfrak{p}_{0\mathbf{C}})^K,$$

soit:

$$p(i\lambda) = p(i\lambda') \qquad \forall p \in S(\mathfrak{a}_{\mathbf{C}})^W.$$

Ceci équivaut à ce qu'il existe $w \in W$ tel que $\lambda' = w \cdot \lambda$.

THÉORÈME 4. *En tant que $(\mathfrak{g}_0, K)$-modules, $V(\sigma, \lambda) \simeq V(\sigma', \lambda')$ si et seulement s'il existe $w \in W$ tel que $\lambda' = w \cdot \lambda$ et $\sigma' \simeq w \cdot \sigma$.*

Preuve. Grâce aux lemmes 11 et 12, il suffit de démontrer:

$$V(\sigma, \lambda) \simeq V(\sigma', \lambda) \Rightarrow \sigma' \simeq \sigma.$$

Supposons donc $V(\sigma, \lambda) \simeq V(\sigma', \lambda)$ et $\sigma \not\simeq \sigma'$. Comme $V^\infty(\sigma, \lambda)$ est isomorphe en tant que K-module à $\mathrm{Ind}_{K^\lambda \uparrow K}\, \sigma$, il existe donc $(\mu, E_\mu) \in \hat{K}$ tel que $\mu|_{K^\lambda}$ contienne σ et σ'. On note F_μ le G_0-module trivial sur P_0, K-isomorphe à E_μ. Désignons par ε la représentation triviale de K^λ. Les représentations $\sigma \otimes \mu^*|_{K^\lambda}$ et $\varepsilon \otimes \mu|_{K^\lambda}$ de K^λ se décomposent ainsi:

$$\begin{aligned} \sigma \otimes \mu^*|_{K^\lambda} &= m(\sigma, \mu)\varepsilon \oplus m_1\sigma_1 \oplus \cdots \oplus m_p\sigma_p, \\ \varepsilon \otimes \mu|_{K^\lambda} &= m(\sigma, \mu)\sigma \oplus m(\sigma', \mu)\, \sigma' \oplus m'_1\sigma'_1 \oplus \cdots \oplus m'_q\sigma'_q \end{aligned}$$

avec σ_i, $\sigma'_j \in \widehat{K^\lambda}$, où pour tout $i = 1, \ldots, p$, $\sigma_i \neq \varepsilon$ et pour tout $j = 1, \ldots, q$, $\sigma'_j \neq \sigma$ et $\sigma'_j \neq \sigma'$. On vérifie aisément que $V(\sigma, \lambda) \otimes F_{\mu^*}$ est l'espace des vecteurs K-finis de

$$\mathrm{Ind}_{K^\lambda \ltimes P_0 \uparrow G_0} (\sigma \otimes \mu^*|_{K^\lambda}) \otimes \lambda.$$

D'où: $V(\sigma,\lambda)\otimes F_{\mu^*}\simeq m(\sigma,\mu)\,V(\varepsilon,\lambda)\oplus m_1 V(\sigma_1,\lambda)\oplus\cdots\oplus m_p V(\sigma_p,\lambda)$ et de même

$$\begin{aligned}V(\varepsilon,\lambda)\otimes F_\mu \simeq m(\sigma,\mu)\,V(\sigma,\lambda)\oplus m(\sigma',\mu)\,V(\sigma',\lambda)\\ \oplus m'_1 V(\sigma'_1,\lambda)\oplus\cdots\oplus m'_q V(\sigma'_q,\lambda).\end{aligned}$$

On a donc:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0,K}(V(\sigma,\lambda)\otimes F_{\mu^*},V(\varepsilon,\lambda))\\ &\quad\simeq \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0,K}\left(m(\sigma,\mu)\,V(\varepsilon,\lambda)\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{p} m_i V(\sigma_i,\lambda)\right),V(\varepsilon,\lambda)\right).\end{aligned}$$

Or:$\forall\tau\in\widehat{K^\lambda}$, $\tau\neq\varepsilon\Rightarrow V(\tau,\lambda)\not\simeq V(\varepsilon,\lambda)$. Alors, comme pour tout $\tau\in\widehat{K^\lambda}$, $V(\tau,\lambda)$ est irréductible:

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0,K}(V(\sigma,\lambda)\otimes F_{\mu^*},V(\varepsilon,\lambda))=m(\sigma,\mu).$$

D'autre part:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0,K}(V(\sigma,\lambda)\otimes F_{\mu^*},V(\varepsilon,\lambda))\\ &\quad\simeq\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0,K}(V(\sigma,\lambda),V(\varepsilon,\lambda)\otimes F_\mu)\\ &\quad\simeq\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0,K}(V(\sigma,\lambda),m(\sigma,\mu)\,V(\sigma,\lambda)\oplus m(\sigma',\mu)\,V(\sigma',\lambda)\oplus\cdots).\end{aligned}$$

Comme on a supposé que $V(\sigma,\lambda)$ et $V(\sigma',\lambda)$ sont isomorphes, on en déduit:

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}_0,K}(V(\sigma,\lambda)\otimes F_{\mu^*},V(\varepsilon,\lambda))\geqslant m(\sigma,\mu)+m(\sigma',\mu).$$

Comme $m(\sigma',\mu)$ est non nul, on aboutit à une contradiction. Le théorème est démontré.

4.3. Les théorèmes 3 et 4 et le corollaire 3 se résument ainsi:

THÉORÈME 5. (1) $\forall\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $\forall\sigma\in\widehat{K^\lambda}$, *$V(\sigma,\lambda)$ est un $(\mathfrak{g}_0,K)$-module irréductible.*

(2) *Pour tout $(\mathfrak{g}_0,K)$-module irréductible V, il existe $\lambda\in\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ et $\sigma\in\widehat{K^\lambda}$ tels que V soit isomorphe à $V(\sigma,\lambda)$.*

(3) *Les $(\mathfrak{g}_0,K)$-modules $V(\sigma,\lambda)$ et $V(\sigma',\lambda')$ sont isomorphes si et seulement s'il existe $w\in W$ tel que $\lambda'=w\cdot\lambda$ et $\sigma'\simeq w\cdot\sigma$.*

5. Classification des représentations topologiquement completement irréductibles de G_0

5.1. Rappelons que pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $(\sigma, E_\sigma) \in \widehat{K^\lambda}$,

$$V^\infty(\sigma, \lambda) = \{f \in C^\infty(K, E_\sigma) \mid \forall k \in K, \forall m \in K^\lambda, f(km) = \sigma(m^{-1}) f(k)\}.$$

Définissons sur $V^\infty(\sigma, \lambda)$ une norme notée $\|\cdot\|_2$ par:

$$\forall f \in V^\infty(\sigma, \lambda), \qquad \|f\|_2 = \left(\int_{K/K^\lambda} \|f(k)\|^2 \, d\dot{k}\right)^{1/2}.$$

Appelons $V^2(\sigma, \lambda)$ le complété de $V^\infty(\sigma, \lambda)$ pour cette norme. G_0 agit sur $V^2(\sigma, \lambda)$ par:

$$\forall f \in V^2(\sigma, \lambda), \forall X \in \mathfrak{p}_0, \forall k, k' \in K,$$
$$(\pi_{\sigma,\lambda}(\exp X \cdot k) f)(k') = e^{i\lambda(k'^{-1} \cdot X)} f(k^{-1} k').$$

$V^2(\sigma, \lambda)$ est alors un G_0-module admissible dont $V(\sigma, \lambda)$ est l'ensemble des vecteurs K-finis. $V(\sigma, \lambda)$ étant algébriquement irréductible, $V^2(\sigma, \lambda)$ est topologiquement irréductible, et donc topologiquement complètement irréductible [9, prop. 4.2.1.5., p. 231].

5.2. Le théorème 5 conduit au théorème suivant:

Théorème 6. (1) $\forall \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $\forall \sigma \in \widehat{K^\lambda}$, *$V^2(\sigma, \lambda)$ est un G_0-module topologiquement complètement irréductible.*

(2) *Pour tout espace de Banach V muni d'une structure de G_0-module topologiquement complètement irréductible, il existe $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et $\sigma \in \widehat{K^\lambda}$ tels que V soit Naïmark-équivalent à $V^2(\sigma, \lambda)$.*

(3) *$V^2(\sigma, \lambda)$ est Naïmark-équivalent à $V^2(\sigma', \lambda')$ si et seulement s'il existe $w \in W$ tel que $\lambda' = w \cdot \lambda$ et $\sigma' \simeq w \cdot \sigma$.*

Preuve. Comme, d'après le théorème 5, tout $(\mathfrak{g}_0, K)$-module irréductible est admissible, le théorème 6 résulte du théorème 5, de [9, th. 4.5.5.2., p. 326] et de [9, prop. 4.2.1.5., p. 231].

Remerciements

Nous remercions M. Flensted Jensen pour d'utiles conversations.

RÉFÉRENCES

1. N. BOURBAKI, "Algèbre commutative," Hermann, Paris, 1961.
2. W. CASSELMAN AND M. S. OSBORNE, The restriction of admissible representations to n, *Math. Ann.* **233** (1978), 193–198.
3. J. DIXMIER, "Algèbres enveloppantes," Gauthiers–Villars, Paris, 1974.
4. M. DUFLO, Représentations irréductibles des groupes semi-simples complexes, *in* "Analyse harmonique sur les groupes de Lie, Séminaire Nancy-Strasbourg 1973–1975," Lecture Notes in Mathematics n° 497, pp. 26–88, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1975
5. S. HELGASON, A duality for symmetric spaces with applications to group representations. III. Tangent space analysis, preprint, Massachusetts Institute of Technology.
6. B. KOSTANT, Lie groups representations on polynomial rings, *Amer. J. Math.* **86** (1963), 327–402.
7. B. KOSTANT AND S. RALLIS, Orbits and representations associated with symmetric spaces, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 753–809.
8. N. S. POULSEN, On C^{∞}-vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups, *J. Funct. Anal.* **9** (1972), 87–120.
9. G. WARNER, "Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups *I*," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1972.
10. G. W. MACKEY, "Theory of Group Representations," Univ. of Chicago Press, Chicago, 1955.

Printed in Belgium