Invent. math. 109, 619–664 (1992)

Inventiones mathematicae

Vecteurs distributions H-Invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symetriques reductifs et prolongement meromorphe d'intégrales d'Eisenstein

Jean-Luc Brylinski [1,*] **et Patrick Delorme** [2]

[1] Pennsylvania State University, Department of Mathematics – 305 Mac Allister, University Park, PA, 16802, USA
[2] Faculté des Sciences de Luminy, Département de Mathématique-Informatique – U.R.A. 225 du C.N.R.S. 163, avenue de Luminy, F-13288 – Marseille Cedex 9, France

Oblatum 26-VI-1991 & 30-III-1992

Introduction

Soit G (resp. $\underline{G}$) le groupe les points réels (resp. complexes) d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$ et Zariski-connexe, que l'on supposera semisimple dans cette introduction (au lieu de réductif dans le corps de l'article). On suppose le groupe algébrique muni d'une involution σ qui agit donc sur G et $\underline{G}$. On note H (resp. $\underline{H}$) le groupe des points fixes de σ dans G (resp. $\underline{G}$).

Soit θ une involution de Cartan de G commutant à σ et soit K le groupe des points fixes de θ dans G. Soit P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G. On note N son radical unipotent et $L=P\cap\theta(P)$. Alors L est σ-stable et P admet une σ-décomposition de Langlands $P=MAN$ où A est la partie de la composante déployée du centre de L formée des éléments antiinvariants par σ et θ. M est en général plus gros que le M de la décomposition de Langlands de P. On se donne une série discrète de $M/M\cap H$ c'est à dire une représentation unitaire irréductible (δ, V_δ) de M *et* une injection i: $V_\delta \hookrightarrow L^2(M/M\cap H, d\dot{m})$ (qui entrelace les actions de M). (Noter que les séries discrètes des espaces symétriques réductifs ont été classifiées par Oshima et Matsuki (cf. [OM])). Si $\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ où $\mathfrak{a}=\operatorname{Lie} A$, on note $(\pi_{\delta,\nu}, I_{\delta,\nu})$ la série principale généralisée, C^∞, de G relative à (P, δ, ν):

$$I_{\delta,\nu}=\{\varphi: G\to V_\delta^\infty \mid \varphi \text{ est } C^\infty, \forall g\in G, a\in A, m\in M, n\in N, \varphi(gman) = a^{-\nu-\rho}\delta(m^{-1})\,\varphi(g)\}$$

où V_δ^∞ désigne l'espace des vecteurs C^∞ de V_δ, muni de sa topologie usuelle, ρ est la demisomme des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}=\operatorname{Lie} N$ et $\pi_{\delta,\nu}$ est la représentation définie par action régulière gauche dans $I_{\delta,\nu}$.

* Partially supported by an NSF Grant

La restriction des fonctions de G à K définit un isomorphisme de $I_{\delta,\nu}$ sur I_δ, où:

$$I_\delta = \{\varphi\colon K \to I_\delta^\infty \mid \varphi \text{ est } C^\infty \text{ et } \forall k \in K, m \in M \cap K, \varphi(km) = \delta(m^{-1})\,\varphi(k)\}.$$

Par transport de structure on obtient une représentation $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}$ de G sur I_δ.

Il s'agit dans cet article, de construire une famille de vecteurs distributions H-invariants de $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}$ (c'est à dire des formes linéaires continues sur I_δ invariantes sous l'action contragrédiente de $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}$ par H) dépendant méromorphiquement de ν. La motivation est que l'on espère écrire la formule de Plancherel pour $L^2(G/H)$ à l'aide des vecteurs distributions ainsi construits en se restreignant à $\nu \in i\mathfrak{a}^*$. Bien sûr, cet édifice repose sur les travaux de Oshima et Matsuki sur les séries discrètes (cf. [OM]).

Le cas où P est $\sigma\theta$-stable minimal a été étudié par van den Ban d'une part (cf. [B2]) et Olafsson (cf. [Ol2]) d'autre part. La méthode utilisée par van den Ban est très différente de la nôtre (voir plus loin pour une remarque sur la méthode d'Olafsson). Mentionnons aussi ici le travail antérieur de Oshima et Sekiguchi [OS].

Décrivons le contenu de notre travail.

On décrit d'abord $\underline{H}\underline{P}$ comme ouvert affine de $\underline{G}$. On complète $\mathfrak{a}$ en une sous algèbre de Cartan $\mathfrak{j}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{j}$ soit σ et θ-stable, avec $\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1 \oplus \mathfrak{a}$ (où $\mathfrak{j}_1$ est lui-même σ et θ-stable). Cette écriture permet d'identifier $\mathfrak{a}^*$ à un sous espace de $\mathfrak{j}^*$. On choisit un ordre sur $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$ (système de racines de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{g}$) compatible avec $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ (ensemble des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$).

Alors on montre (cf. lemmes 2 à 5 et proposition 2) qu'il existe des représentations $(\pi_1, V_1), \ldots, (\pi_m, V_m)$ de $\underline{G}$, de plus haut poids $\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_m \in \mathfrak{a}^* \subset \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$, avec $m = \dim \mathfrak{a}$, telles que:

(1) La famille $(\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_m)$ forme une base de $\mathfrak{a}^*$ et pour tout i, $\tilde{\delta}_i$ est dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.

(2) Pour tout i, il existe ξ_i vecteur $\underline{H}$-invariant dans V_i tel que $(\xi_i, v_i) > 0$ où v_i est un vecteur de plus de poids dans V_i et le produit scalaire utilisé est un produit scalaire invariant pour une forme réelle compacte convenable de $\underline{G}$.

(3) Notant $\varepsilon_i(g) = (\pi_i(g)\, v_i, \xi_i)$, on a:

$$\underline{H}\underline{P} = \left\{ g \in G \,\middle|\, \prod_{i=1}^{m} \varepsilon_i(g) \neq 0 \right\}.$$

On définit alors pour $\mathrm{Re}(\nu - \rho)$ strictement dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ une application $\xi_\nu\colon G \to (V_\delta^\infty)'$, où $(V_\delta^\infty)'$ est le dual fort de V_δ^∞, par:

$$\xi_\nu(g) = 0 \quad \text{si } g \notin HP$$
$$\xi_\nu(hman) = a^{\nu-\rho}\,\delta'(m^{-1})\,\eta_\delta, \qquad \forall h \in H, m \in M, a \in A, n \in N$$

où δ' est la contragrédiente de δ dans $(V_\delta^\infty)'$ et η_δ est défini par le diagramme commutatif ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} V_\delta^\infty \arrow[rr, "\eta_\delta"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathbb{C} \\ & C^\infty(M/M \cap H) \arrow[ur, "\delta_{e \cdot M \cap H}"'] & \end{tikzcd}$$

($\delta_{e\cdot M\cap H}$ est la mesure de Dirac en $e\cdot M\cap H$).

On montre que ξ_ν est une fonction continue (lemme 6). Pour cela on écrit:

$$\nu-\rho=\sum_{i=1}^{m}\tilde{\nu}_i\tilde{\delta}_i \quad \text{avec} \quad \operatorname{Re}\tilde{\nu}_i>0.$$

Alors $\xi_\nu(g)=\prod_{i=1}^{m}\varepsilon_i^{\tilde{\nu}_i}(g)\,\delta'(m^{-1})\,\eta_\delta$ si $g=hman$ avec $h\in H$, $m\in M$, $a\in A$, $n\in N$.

Si (g_n) est dans HP et tend vers un élément g de la frontière de HP, il résulte des propriétés des ε_i que:

$$\prod_{i=1}^{m}\varepsilon_i^{\tilde{\nu}_i}(g_n)\to 0.$$

Pour prouver la continuité de ξ_ν, il reste à contrôler $\delta'(m^{-1})\,\eta_\delta$. On se ramène pour cela à prouver que $i(V_\delta^\infty)(\subset C^\infty(M/M\cap H))$ est inclus dans l'espace $\mathscr{A}_0(M/M\cap H)$ des fonctions qui sont bornées sur $M/M\cap H$ ainsi que leurs dérivées sous l'action régulière gauche de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{m}=\operatorname{Lie} M$. L'argument pour montrer ce point est le suivant. Il n'est pas difficile de voir, grâce aux développements asymptotiques (cf. [B1]), que l'espace des vecteurs $M\cap K$-finis de V_δ^∞ s'envoie dans $\mathscr{A}_0(M/M\cap H)$. Mais V_δ^∞ et $\mathscr{A}_0(M/M\cap H)$ sont 2 modules sur M à croissance modérée, au sens de [C] (voir lemme 1). Le théorème de continuité automatique de Casselman (cf. [C]) montre que $i(V_\delta^\infty)\subset\mathscr{A}_0(M/M\cap H)$ comme désiré.

Alors la forme linéaire sur I_δ, $\bar{\xi}_\nu$, définie par:

$$\forall\varphi\in I_\delta,\ \langle\bar{\xi}_\nu,\varphi\rangle=\int_K\langle\xi_\nu(k),\varphi(k)\rangle\,dk$$

est invariante sous $(\tilde{\pi}_{\delta,\nu})'(H)$ et c'est cette famille que l'on veut prolonger méromorphiquement.

Comme on l'a déjà remarqué, si $g=hman\in HP$, on a:

$$\xi_\nu(g)=\prod_{i=1}^{m}\varepsilon_i(g)^{\tilde{\nu}_i}\,\delta'(m^{-1})\,\eta_\delta.$$

S'il n'y avait pas le terme $\delta'(m^{-1})\,\eta_\delta$ on obtiendrait facilement une équation fonctionnelle du type Bernstein-Sato pour ξ_ν (au moins sur HP) (Olafsson dans [Ol2] se ramène à ce cas par un procédé de tensorisation par des représentations de dimension finie; dans le cas où P n'est pas $\sigma\theta$-stable minimal, cette méthode n'est pas utilisable).

Ce terme rend les choses moins simples. Toshio Oshima a suggéré au deuxième auteur d'utiliser la généralisation par Kashiwara de l'équation fonctionnelle au cas où l'on dispose d'un polynôme élevé a une puissance complexe, multiplié par une solution d'un système holonome. C'est cette idée qui est développée dans cet article.

Tout d'abord, pour v vecteur $M\cap K$-fini de V_δ^∞, on prolonge méromorphiquement à $\nu\in\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ la fonction holomorphe $\nu\mapsto F_{\nu,v}$, de l'ouvert de $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ formé des

ν tels que $\mathrm{Re}(\nu-\rho)$ soit strictement dominant dans l'espace des distributions sur G, où $F_{\nu,v}$ est la fonction continue sur G définie par:

$$F_{\nu,v}(g)=\langle\xi_\nu(g), v\rangle_{(V_\delta^\infty)', V_\delta^\infty}.$$

Pour cela, on montre que la fonction u_v sur HP, définie par:

$$u_v(hman)=\langle\delta'(m^{-1})\eta_\delta, v\rangle_{(V_\delta^\infty)', V_\delta^\infty}=i(v)(m^{-1})$$

engendre (dans l'espace des fonctions C^∞ sur HP) un $D(\underline{H}\underline{P})$-module holonome (lemmes 8 et 9). Ici $D(\underline{H}\underline{P})$ désigne l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients algébriques sur la variété algébrique affine $\underline{H}\underline{P}$. On utilise pour cela un résultat de Ginsburg (cf [Gi]), l'hypothèse sur v d'être $M\cap K$-fini étant cruciale.

Alors grâce aux résultats de Kashiwara rappelés dans l'appendice A.2, on montre que la fonction sur G, $\varepsilon^{k_0}\tilde{u}_v$, où $\tilde{u}_v$ est le prolongement par 0 en dehors de HP de u_v, $\varepsilon=\prod_{i=1}^{m}\varepsilon_i$ et k_0 entier assez grand, est continue et engendre un sous $D(\underline{G})$-module holonome de l'espace des distributions sur G. Alors:

$$F_{\nu,v}=\left(\prod_{i=1}^{m}\varepsilon_i^{\tilde{\nu}_i-k_0}\right)(\varepsilon^{k_0}\tilde{u}_v)$$

et on est dans la situation d'un produit de fonctions régulières sur G élevées à des puissances complexes multiplié par la solution d'un système holonome. D'où l'on déduit une équation fonctionnelle pour $F_{\nu,v}$ et un prolongement méromorphe (proposition 4). On contrôle les variétés polaires (hyperplans) et leur ordre en fonction de v (proposition 5). Ceci permet de définir pour ν en dehors des variétés polaires des $F_{\nu,v}$, une forme linéaire $\tilde{\xi}_\nu$ sur l'espace $(I_\delta)_{(K)}$ des vecteurs K-finis de I_δ par:

$$\forall\varphi\in(I_\delta)_{(K)}, \langle\tilde{\xi}_\nu, \varphi\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle R_K F_{\nu,v_i}, \psi_i\rangle_{\mathscr{D}'(K),\mathscr{D}(K)}$$

où $\varphi(k)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(k)v_i$, les v_i étant des vecteurs $M\cap K$-finis de V_δ et les ψ_i des éléments de $C^\infty(K)$; $R_K F_{\nu,v_i}$ est la restriction de G à K de la distribution F_{ν,v_i} (dont on montre qu'elle existe). On montre que $\tilde{\xi}_\nu$ est une forme linéaire sur $(I_\delta)_{(K)}$ fixée par $H\cap K$ sous la contragrédiente $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}^*$ de $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}$ et annulée par $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}^*(\mathfrak{h})$ (théorème 2).

Les résultats de [BD] joints au théorème de continuité automatique de Casselman [C] permettent de conclure que $\tilde{\xi}_\nu$ se prolonge en une forme linéaire continue $\bar{\xi}_\nu$ sur I_δ, invariante par l'action de H (théorème 1).

A ce stade on sait seulement que $\nu\mapsto\langle\bar{\xi}_\nu, \varphi\rangle$ est méromorphe pour $\varphi\in(I_\delta)_{(K)}$. Cela est toutefois suffisant pour montrer la méromorphie en ν des fonctions sur G/H, $E_{\nu,\varphi}(g)=\langle\tilde{\pi}'_{\delta,\nu}(g)\bar{\xi}_\nu, \varphi\rangle(\varphi\in(I_\delta)_{(K)})$ que nous appelons dans cet article, intégrales d'Eisenstein (cf. théorème 3).

En effet, les propriétés de $\bar{\xi}_\nu$ montrent que les coefficients de la série de Taylor de $E_{\nu,\varphi}$ sont méromorphes. D'autre part $E_{\nu,\varphi}$ (ou plutôt la série formelle correspondante) est $Z(\mathfrak{g})$-propre (où $Z(\mathfrak{g})$ est le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\, G$) et K-finie.

On applique alors une version à paramètres (cf. appendice C) de l'appendice A de [BD] pour obtenir la méromorphie voulue.

Remarque. Dans ce qui précède la propriété de la série discrète δ de $M/M \cap H$ que nous avons utilisée est que ses vecteurs C^∞ sont des fonctions bornées sur $M/M \cap H$ ainsi que leurs dérivées par des éléments de $U(\mathfrak{m})$. D'après [FOS, corollary 2.2], cette propriété est encore vraie pour les vecteurs $M \cap K$-finis d'un sous-module unitarisable de $C^\infty(M/M \cap H)$. La proposition 1 se généralise alors aux représentations unitaires irréductibles de G munies d'une forme linéaire continue et H-invariante sur l'espace de ses vecteurs C^∞. Il en résulte que dans tout l'article on peut remplacer δ par une représentation unitaire irréductible de M munie d'une forme linéaire, η_δ, sur l'espace de ses vecteurs C^∞ et qui est $M \cap H$-invariante.

0 Notations-rappels

0.1

Si V est un espace vectoriel, on notera V^* son dual algébrique. Si V est réel on notera $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié, $S(V)$ l'algèbre symétrique de $V_{\mathbb{C}}$. Soit V (resp. E) un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ de dimension finie que l'on munit d'une norme quelconque (resp. un Fréchet sur $\mathbb{C}$). On notera $\mathcal{O}_0(V, E)$ l'espace des germes à l'origine de fonctions holomorphes à valeurs dans E (cf. [Bou 2, § 3.2]). Si $E = \mathbb{C}$ on notera simplement $\mathcal{O}_0(V)$. De la façon habituelle $\mathcal{O}_0(V, E)$ peut être regardé comme un sous-espace de l'espace $\hat{\mathcal{O}}_0(V, E)$ des séries formelles à coefficients dans E qui, par définition, est l'espace des applications linéaires de $S(V)$ dans E.

0.2

Si S est un groupe de Lie réel, S° désignera sa composante neutre, $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie, $U(\mathfrak{s})$ l'algèbre enveloppante de la complexifiée $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{s}$. On notera $X \to X^t$ l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{s})$.

On notera ds une mesure de Haar à gauche sur S, $s \mapsto L_s$ (resp. $s \mapsto R_s$) la représentation régulière gauche sur $C^\infty(S)$ (resp. droite) et $X \mapsto L_X$ (resp. $X \mapsto R_X$) la représentation de $U(\mathfrak{s})$ obtenue par différentiation. Si (π, E) est une représentation de S dans E on notera π^* la représentation contragrédiente dans E^*. Si de plus E est un espace vectoriel topologique et si pour tout s dans S, $\pi(s)$ est un endomorphisme continu, on notera π' la représentation contragrédiente de S dans le dual topologique E' de E. Le transposé d'un opérateur continu, A, entre deux espaces vectoriels topologiques étant noté ${}^tA$, on a pour tout $s \in S$, $\pi'(s) = {}^t\pi(s^{-1})$. Si on dispose d'une représentation π de S, dans E, espace localement convexe séparé, continue au sens de [C, § 1], on notera V^∞ l'espace des vecteurs C^∞ de (π, V) qu'on munira de sa topologie naturelle (cf. loc. cit. § 1).

Si S est un groupe compact, on notera $\hat{S}$ son dual unitaire. Si $\delta \in \hat{S}$ et (μ, E) une représentation de S dans un espace localement convexe séparé complet, on notera E^δ sa composante isotypique de type δ et E^S l'espace des invariants de E sous $\mu(S)$. Enfin si X est un espace muni d'une action de S, on appellera fonction μ-sphérique sur X toute application f de X dans E telle que:

$$\forall x \in X, \forall s \in S, f(s \cdot x) = \mu(s) f(x)$$

0.3

Si S est le groupe des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, on notera $\underline{S}$ le groupe des points complexes de celui-ci.

Dans toute la suite de l'article G désignera le groupe des points réels d'un groupe algébrique réductif défini sur $\mathbb{R}$ qu'on suppose en outre Zariski connexe. En particulier G est dans la classe de Harish Chandra.

De plus σ désignera un automorphisme involutif défini sur $\mathbb{R}$ de ce groupe algébrique. On notera H le groupe des points réels du groupe des points fixes de σ.

On choisit une involution de Cartan, θ, de G, commutant à σ (cf. [Ol1, lemme 2]) et on note K le groupe des points fixes de θ. C'est un sous-groupe compact maximal de G qui est de plus σ-stable. On note $\mathfrak{p}$ (resp. $\mathfrak{q}$) le sous-espace de $\mathfrak{g}$ des éléments antiinvariants par θ (resp. σ). On note $\mathfrak{c}$ le centre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

On se fixe une forme bilinéaire B invariante sur $\mathfrak{g}$, négative définie sur $\mathfrak{k}$, positive défine sur $\mathfrak{p}$ qui coïncide avec la forme de Killing sur $\mathfrak{g}_1$, telle que $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{c}$ soient orthogonaux ainsi que $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{q}$.

On rappelle (cf. par exemple [B1, proposition 1.3 et corollaire 1.4]) que l'application de $K \times (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}) \times (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})$ dans G définie par $(k, X, Y) \mapsto k \exp(X) \cdot \exp(Y)$, est un difféomorphisme. En outre si $\mathfrak{a}_\emptyset$ désigne un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$, pour tout $g \in G$ il existe $X \in \mathfrak{a}_\emptyset$ tel que $g \in K(\exp X) H^\circ$.

On note $\Delta = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$ le système des racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans $\mathfrak{g}$. On se fixe un ensemble de racines positives Δ^+ de Δ. On note $\mathfrak{n}_\emptyset = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha$ où, pour $\alpha \in \Delta$, $\mathfrak{g}^\alpha$ désigne le sous-espace radiciel dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a}_\emptyset$ correspondant à α. On note $L_\emptyset$ le centralisateur dans G de $\mathfrak{a}_\emptyset$. On définit $\mathfrak{m}_\emptyset = \mathfrak{l}_{\emptyset,kq} \oplus \mathfrak{l}_{\emptyset,kh} \oplus \mathfrak{l}_{\emptyset,ph}$ où $\mathfrak{l}_{\emptyset,kq} = \mathfrak{l}_\emptyset \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$ etc.

Soit $P_\emptyset$ le sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_\emptyset \oplus \mathfrak{n}_\emptyset$. Il est clairement $\sigma\theta$-stable. On note $P_\emptyset = M_\emptyset A_\emptyset N_\emptyset$ la σ-décomposition de Langlands de $P_\emptyset$ (cf. [B2, § 2]) où $M_\emptyset$ admet bien $\mathfrak{m}_\emptyset$ comme algèbre de Lie et $A_\emptyset = \exp \mathfrak{a}_\emptyset$, $N_\emptyset = \exp \mathfrak{n}_\emptyset$. On note $\rho_\emptyset = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} (\dim \mathfrak{g}_\alpha)\alpha$. Soit Σ l'ensemble des racines simples de Δ^+. On se fixe une partie Θ de Σ, on notera $\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha \in \Theta} \ker \alpha$, $\mathfrak{l}$ le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a}$. On note $\mathfrak{m}$ l'orthogonal pour B de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{l}$. Il est facile de voir que $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$. On note $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+, \alpha|_\mathfrak{a} \neq 0} \mathfrak{g}^\alpha$ et P le sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$. Il est clairement $\sigma\theta$-stable. Il admet pour σ-décomposition de Langlands $P = MAN$ où M est d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}$, $A = \exp \mathfrak{a}$ et $N = \exp \mathfrak{n}$. Le centralisateur L de $\mathfrak{a}$ dans G est égal à MA. C'est le groupe des points réels d'un groupe algébrique réductif défini sur $\mathbb{R}$. Il est de plus stable par σ. Le triplet $(L, \sigma, H \cap L)$ satisfait les mêmes hypothèses que (G, σ, H).

On note $\mathfrak{c}_1 = \mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}$, C_1 le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{c}_1$. On note ${}^\circ G$ l'intersection de noyaux des homomorphismes continus de G dans le groupe multiplicatif $\mathbb{R}^{+*}$ des réels strictement positifs. On sait que G s'identifie de la façon évidente à ${}^\circ G \times C_1$ (cf. [HC2, § 3]).

On définit une application norme sur G de la façon suivante. On note (π_0, V_0) la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ que l'on munit d'un produit scalaire hermitien invariant par $\mathrm{Ad}(K \cdot \exp i\mathfrak{p})$ (qui est compact).

On munit V_0^* du produit scalaire canonique déduit de celui sur V_0. On définit alors pour $g \in G$:

$$\|g\| = \|\pi_0(g_1)\|_{V_0} \times \exp(\tfrac{1}{2} B(X, X)),$$

où $g = g_1 . \exp X$ avec $g_1 \in {}^\circ G$ et $X \in \mathfrak{c}_1$ et $\|\pi_0(g_1)\|_{V_0}$ est la norme de l'opérateur $\pi_0(g_1)$. Les propriétés suivantes de norme sont alors évidentes:

(0.3.1) $\quad \forall g \in G, \quad \|g\| = \|g^{-1}\| = \|g^\sigma\|$ (où $g^\sigma = \sigma(g)$)

(0.3.2) $\quad \forall x, y \in G, \quad \|xy\| \leqq \|x\| \, \|y\|$

(0.3.3) $\quad \forall k_1, k_2 \in K, \forall X \in \mathfrak{p}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \|k_1 . \exp tX . k_2\| = \|\exp X\|^t$.

On définit une application de G/H dans $\mathbb{R}^+$ notée également $\| \ \|$ et appelée norme sur G/H par $\|gH\| = \|g(g^\sigma)^{-1}\|$; alors $\| \ \|$ vérifie:

(0.3.4) $\quad \forall x, y \in G, \quad \|xyH\| \leqq \|x\|^2 \, \|yH\|$

(0.3.5) $\quad \forall k \in K, \forall X \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \|k . \exp(tX) . H\| = \|\exp X\|^{2t}$

1 Prolongement d'une forme linéaire $(\mathfrak{h}, H \cap K)$-invariante sur un module de Harish-Chandra à sa complétion à croissance modérée

1.1

On définit pour $N \in \mathbb{N}$, $D \in U(\mathfrak{g})$ et $f \in C^\infty(G/H)$:

$$p_{N,D}(f) = \sup_{g \in G} \|gH\|^{-N} |(L_D f)(gH)|.$$

C'est un réel ou le symbole $+\infty$.

On notera aussi $\|f\|_{N,D}$ au lieu de $p_{N,D}(f)$.

On définit pour $N \in \mathbb{N}$

$$\mathscr{A}_N(G/H) = \{ f \in C^\infty(G/H) \mid \forall D \in U(\mathfrak{g}), p_{N,D}(f) < +\infty \}.$$

L'espace $\mathscr{A}_N(G/H)$ muni des semi normes $p_{N,D}$, $D \in U(\mathfrak{g})$, est clairement un espace de Fréchet.

Lemme 1 *Pour l'action régulière gauche de G, $\mathscr{A}_N(G/H)$ est un G-module lisse à croissance modérée au sens de* [C].

Démonstration. Montrons d'abord que c'est un G-module à croissance modérée. Il faut pour cela majorer:

$$\|L_g f\|_{N,D} = \sup_{x\in G} \|xH\|^{-N} |(L_D L_g f)(xH)|.$$

Mais $L_{g^{-1}} L_D L_g = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(g) L_{D_i}$, où les D_i sont dans $U(\mathfrak{g})$ et les φ_i sont des fonctions G-finies. Alors il existe $M\in\mathbb{N}$ et $C>0$ tels que

$$\forall i=1, \ldots, n, \forall g\in G, |\varphi_i(g)| \leqq C \|g\|^M.$$

Donc, en changeant xH en $g^{-1}xH$, on trouve:

$$\|L_g f\|_{N,D} \leqq C \sup_{x\in G} \|g^{-1}xH\|^{-N} \sum_{i=1}^{n} \|g\|^M |L_{D_i} f(xH)|.$$

Mais on a d'après (0.3.4):

$$\|xH\| \leqq \|g\|^2 \|g^{-1}xH\|$$

d'où

(1.1.1) $$\|g^{-1}xH\| \geqq \|g\|^{-2} \|xH\|.$$

Alors en prenant $M'=2N+M$ on a:

(1.1.2) $$\begin{gathered}\forall D\in U(\mathfrak{g}), \exists C>0, \exists M'\in\mathbb{N}, \exists D_i\in U(\mathfrak{g}),\\ i=1, \ldots, n, \forall f\in\mathscr{A}_N(G/H), \forall g\in G,\\ \|L_g f\|_{N,D} \leqq C \|g\|^{M'} \left(\sum_{i=1}^{n} \|f\|_{N,D_i}\right).\end{gathered}$$

Ceci montre que pour tout $g\in G$, L_g définit un opérateur continu de $\mathscr{A}_N(G/H)$ dans lui-même et que le G-module $\mathscr{A}_N(GH)$ est à croissance modérée.

Il reste à voir que $\mathscr{A}_N(G/H)$ est un G-module lisse. Montrons d'abord que c'est un G-module continu. D'après [C, lemme 1.1], il suffit de voir que $\mathscr{A}_N(G/H)$ est un G-module séparément continu.

Soit $g=\exp X$, $X\in\mathfrak{g}$, et évaluons pour $\|X\| \leqq r$ la semi-norme $\|L_{\exp t X} f - f\|_{N,D}$.

On va appliquer le théorème des accroissements finis sur $[0, 1]$ à la fonction (complexe) de la variable réelle t:

$$t \mapsto (L_D L_{\exp t X} f - L_D f)(xH)$$

dont la dérivée est égale à $L_{DX} L_{\exp t X} f$.

Soit (X_j) une base de $\mathfrak{g}$. Par application de (1.1.2) aux DX_j on trouve:

(1.1.3) $$\exists M\in\mathbb{N}, \exists D_i\in U(\mathfrak{g}), i=1, \ldots, \ell, \exists C>0,$$

$$\forall f\in\mathscr{A}_N(G/H), \forall g\in G, \forall j=1, \ldots, \dim\mathfrak{g}, \|L_g f\|_{N,DX_j} \leqq C \|g\|^M \sum_{i=1}^{\ell} \|f\|_{N,D_i}.$$

Notons $C_r = \sup_{\|X\| \leqq r} \|\exp X\|$ et

$$\|X\|_\infty = \sup\left\{|t_j(X)| \,|\, j=1, \ldots, \dim \mathfrak{g} \text{ où } X = \sum_{j=1}^{\dim \mathfrak{g}} t_j(X)\, X_j\right\}.$$

Alors de (1.1.3) on déduit:

(1.1.4) $$\forall t \in [0,1], \forall f \in \mathscr{A}_N(G/H), \forall x \in G, \forall X \in \mathfrak{g},$$
$$\|X\| \leqq r \Rightarrow \|L_{\exp tX} f\|_{N,DX} \leqq \|X\|_\infty\, C C_r^M \left(\sum_{i=1}^{\ell} \|f\|_{N,D_i}\right).$$

Le théorème des accroissements finis donne alors:

$$\forall X \in \mathfrak{g},\ \|X\| \leqq r \Rightarrow \|L_{\exp X} f - f\|_{N,D} \leqq \|X\|_\infty\, C C_r^M \left(\sum_{i=1}^{\ell} \|f\|_{N,D_i}\right).$$

Mais $\lim_{X \to 0} \|X\|_\infty = 0$. D'où

(1.1.5) $$\lim_{X \to 0} \|L_{\exp X} f - f\|_{N,D} = 0.$$

Comme, pour tout $g \in G$, L_g est un endomorphisme continu de $\mathscr{A}_N(G/H)$, ceci achève de prouver que $\mathscr{A}_N(G/H)$ est un G-module séparément continu donc continu (voir plus haut). On laisse le soin au lecteur de vérifier, à l'aide de la formule de Taylor à l'ordre 1 avec majoration du reste (cf. [Bou2, § 2.5]) appliqué à la fonction déjà utillisée, que l'application $g \to L_g f$ de G dans $\mathscr{A}_N(G/H)$ admet pour dérivée, selon le champ de vecteur invariant à droite déterminé par X, la fonction

$$g \mapsto L_X\, L_g f.$$

Pour voir que cette fonction est continue on écrit:

$$L_X\, L_g = \sum_{i=1}^{l} \psi_i(g)\, L_g\, L_{X_i}$$

où les X_i sont une base de $\mathfrak{g}$ et les ψ_i des fonctions G-finies sur G, puis on utilise le fait que le G-module est continu.

Une récurrence facile montre alors que $g \mapsto L_g f$ admet des dérivées partielles continues à tout ordre et est donc C^∞.

Ceci achève de prouver le lemme 1. □

1.2

Théorème 1 *Soit V un $(\mathfrak{g}, K)$-module admissible de type fini, donc annulé par un idéal I de codimension finie du centre $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$. Soit ξ un élément du dual algébrique V^* de V qui soit annulé par l'action (contragrédiente) de $\mathfrak{h}$ et* *soit invariant par $H \cap K$. Alors ξ se prolonge en une forme linéaire continue $\bar{\xi}$ sur la complétion lisse à croissance modérée du $(\mathfrak{g}, K)$-module V (cf. [C] pour l'existence et l'unicité de la complétion). De plus $\bar{\xi}$ est H-invariante.*

Démonstration. Le résultat principal de [BD] affirme qu'il existe une unique application linéaire $i_\xi: V \to C^\infty(G/H)$ telle que:

1) i_ξ est un morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules.
2) $\forall v \in V, (i_\xi(v))(eH) = \langle \xi, v \rangle$.

Comme V est annulé par I, les fonctions sur G/H, $i_\xi(v)$, $v \in V$, sont également annulées par I donc par un idéal J de codimension finie de l'algèbre $\mathbb{D}(G/H)$ des opérateurs différentiels invariants par G sur G/H (cf. [B1, proposition 5.1]).

Il n'y a donc qu'un nombre fini de possibilités pour les exposants directeurs le long d'un parabolique donné des fonctions $i_\xi(v)$, $v \in V$ (cf. [B1, théorème 5.8]). On va voir que cela implique qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $i_\xi(v) \in \mathscr{A}_N(G/H)$ pour tout $v \in V$.

Soit $P_\emptyset$ le sous-groupe parabolique introduit en 0.3 correspondant au choix d'un ensemble de racines positives Δ^+ de Δ. Comme il n'y a qu'un nombre fini d'exposants directeurs le long de $P_\emptyset$ pour les $i_\xi(v)$ le théorème 9.1 de [B1] implique l'existence d'une forme linéaire réelle sur $\mathfrak{a}_\emptyset$, ω_{Δ^+} telle que

$$\forall v \in V, \exists C_{v,\Delta^+}, \forall k \in K, \forall a \in C\ell(A_\emptyset^-(\Delta^+)), |i_\xi(v)(kaH)| \leqq C_{v,\Delta^+}\, a^{\omega_{\Delta^+}},$$

où $C\ell(A_\emptyset^-(\Delta^+))$ désigne l'adhérence de

$$A_\emptyset^-(\Delta^+) = \{a \in A_\emptyset \mid \forall \alpha \in \Delta^+, a^\alpha < 1\}.$$

Il est par ailleurs facile de déduire du lemme 2.A.2.3 de [W, p. 72] et de la définition de la norme sur G/H, qu'il existe $C_{\Delta^+} > 0$ et $N_{\Delta^+} \in \mathbb{N}$ tels que:

$$\forall a \in C\ell(A_\emptyset^-(\Delta^+)), \qquad a^{\omega_{\Delta^+}} \leqq C_{\Delta^+} \|aH\|^{N_{\Delta^+}}.$$

D'où:

$$\forall k \in K, \forall a \in C\ell\, A_\emptyset^-(\Delta^+), |i_\xi(v)(kaH)| \leqq C_{v,\Delta^+}\, C_{\Delta^+} \|kaH\|^{N_{\Delta^+}}.$$

(On a utilisé $\|kaH\| = \|aH\|$).

En répétant l'opération pour les différents choix possibles de Δ^+ (qui sont en nombre fini) et en posant:

$$N = \sup_{\Delta^+} N_{\Delta^+}, \qquad C_v = \sup_{\Delta^+} (C_{v,\Delta^+}\, C_{\Delta^+}),$$

on obtient

$$\forall k \in K, \forall a \in A_\emptyset, |i_\xi(v)(kaH)| \leqq C_v \|kaH\|^N.$$

Comme $G = KA_\emptyset H$ (cf. [B1, proposition 1.3]) et que $\forall X \in U(\mathfrak{g})$, $L_X\, i_\xi(v) = i_\xi(X \cdot v)$, ceci implique que:

$$\forall v \in V, i_\xi(v) \in \mathscr{A}_N(G/H).$$

Donc i_ξ est un morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules de V vers $\mathscr{A}_N(G/H)$. Comme $\mathscr{A}_N(G/H)$ est un G-module lisse à croissance modérée, il en va de même de l'adhérence $\bar{V}_1$ de $V_1 := i_\xi(V)$ dans $\mathscr{A}_N(G/H)$. D'après [C, corollaire 10.5], i_ξ se prolonge en un morphisme continu de G-modules, $\bar{i}_\xi$, de la complétion lisse à croissance modérée $\bar{V}$ de V vers $\bar{V}_1$. Il est alors clair que $\bar{\xi} = \delta_{eH} \circ \bar{i}_\xi$ vérifie les propriétés voulues. □

1.3

On a vu dans l'introduction que $G = {}^\circ G \times \exp(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p})$.

Posons $G_1 = {}^\circ G \exp(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h})$.

Alors $G = G_1 C_{p,q}$, où $C_{p,q} = \exp(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$.

Cette décomposition est d'ailleurs la σ-décomposition de Langlands du parabolique G. Soit (δ, V_δ) une série discrète de G_1/H, i.e. $V_\delta \subset L^2(G_1/H, d\dot{g})$ et δ est unitaire irréductible. On regardera δ comme une représentation de G en faisant agir $C_{p,q}$ trivialement.

La donnée de la série discrète (δ, V_δ) pour G_1/H est donc la donnée de la représentation *et* de son inclusion i dans $L^2(G_1/H, d\dot{g})$.

Soit $(V_\delta)_{(K)}$ l'espace des vecteurs K-finis de δ. D'après [B1, théorème 9.4 et théorème 9.1], $(V_\delta)_{(K)}$ est inclus dans $\mathscr{A}_0(G_1/H)$. Par ailleurs $L^2(G_1/H)^\infty$ est un G-module lisse à croissance modérée comme espace des vecteurs C^∞ d'une représentation unitaire. On sait aussi (cf. [C, lemme 1.2]) que la topologie sur $L^2(G_1/H)^\infty$ est donnée par les semi-normes:

$$q_D(f) = \|L_D f\|_{L^2(G_1/H)} \quad \text{où } D \text{ décrit } U(\mathfrak{g}) \,(\text{ou } U(\mathfrak{g}_1)).$$

Proposition 1 (i) *V_δ^∞ est contenu dans $\mathscr{A}_0(G_1/H)$, i.e. $\forall f \in V_\delta^\infty$, $\forall D \in U(\mathfrak{g})$, $p_D(f) = \sup_{g \in G_1} |(L_D f)(gH)| < +\infty$.*

(ii) *De plus V_δ^∞ coïncide avec l'adhérence de $(V_\delta)_{(K)}$ dans $\mathscr{A}_0(G_1/H)$ et la topologie sur V_δ^∞ définie par les semi-normes p_D $(D \in U(\mathfrak{g}))$ coïncide avec la topologie sur V_δ^∞ définie par les q_D, $D \in U(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. $\mathscr{A}_0(G_1/H)$ se présente comme le sous-espace (fermé) de $\mathscr{A}_0(G/H)$ des invariants sous $C_{p,q}$. C'est donc un G-module lisse à croissance modérée de même que V_δ^∞ comme espace des vecteurs C^∞ d'une représentation unitaire. Donc l'inclusion se prolonge en une application linéaire bicontinue j de V_δ^∞ dans l'adhérence de $(V_\delta)_{(K)}$ dans $\mathscr{A}_0(G_1/H)$ d'après [C, corollaire 10.5]. La continuité de l'évaluation en un point xH sur V_δ^∞ et sur $\mathscr{A}_0(G_1/H)$ permet de voir que j est l'application identique et que $V_\delta^\infty \subset \mathscr{A}_0(G_1/H)$, ce qui prouve (i). Le point (ii) résulte de l'unicité de la complétion à croissance modérée de $(V_\delta)_{(K)}$. □

1.4 La complétion à croissance modérée d'un module de Harish-Chandra est un espace de Montel.

Nous allons démontrer l'assertion du titre de ce paragraphe. Il résulte de [C § 8 et 10] que la complétion en question s'identifie à un sous-espace fermé d'une série principale «épaissie et lisse», (i.e. une induite C^∞ d'une représentation de dimension finie d'un sous-groupe parabolique minimal). Comme il est trivial qu'un sous-espace fermé d'un espace de Fréchet et de Montel est un espace de Montel, il suffit de voir la propriété pour une série principale «épaissie et lisse». Mais l'espace de celle-ci apparaît comme un sous-espace fermé de $C^\infty(K, F)$, où F est l'espace de dimension finie de l'induisante, qui est clairement de Fréchet et de Montel (pour un résultat analogue pour $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ cf. [Sc, théorème VII p. 70]).

2 (H, P) (resp$(\underline{H}, \underline{P})$)-doubles classes ouvertes dans G (resp. $\underline{G}$)

2.1 Représentations H-sphériques de dimension finie de G

D'après la définition de $\mathfrak{m}_\emptyset$, cette algèbre de Lie est stable par σ et θ. Donc $\mathfrak{m}_\emptyset = (\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{k}) \oplus (\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{p})$ et $\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{p} = (\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q})$ etc.

Toujours par définition de $\mathfrak{m}_\emptyset$, $\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} = \{0\}$ donc $\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{p} = \mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ et $\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} \subset \mathfrak{k}$.

Soit $\mathfrak{t}_{kq}$ un sous-espace abélien maximal dans $\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{q}$. On a $\mathfrak{t}_{kq} \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$.

On note $\mathfrak{a}_{ph}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{p} (\subset \mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{h})$ et $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{a}_{ph} \oplus \mathfrak{a}_\emptyset$.

Remarquons que l'on pourrait définir $\mathfrak{a}_{pq} := \mathfrak{a}_\emptyset$. Soit $Y \in \mathfrak{p}$ commutant à $\mathfrak{a}_p$. Alors $\sigma(Y)$ commute à $\mathfrak{a}_p$ puisque celui-ci est stable sous σ. Alors $Y - \sigma(Y) \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$ (resp. $Y + \sigma(Y) \in \mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{p}$) et commute à $\mathfrak{a}_\emptyset$ (resp. $\mathfrak{a}_{ph}$). Donc $Y - \sigma(Y) \in \mathfrak{a}_\emptyset$ et $Y + \sigma(Y) \in \mathfrak{a}_{ph}$. Finalement $Y \in \mathfrak{a}_p$, ce qui montre que $\mathfrak{a}_p$ est un sous-espace de Cartan de $\mathfrak{p}$. Mais $[\mathfrak{t}_{kq}, \mathfrak{a}_{ph}]$ est clairement contenu dans $[\mathfrak{l}_\emptyset, \mathfrak{l}_\emptyset] \subset \mathfrak{m}_\emptyset$ et dans $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Or $\mathfrak{m}_\emptyset \cap \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q} = \{0\}$. Donc $[\mathfrak{t}_{kq}, \mathfrak{a}_{ph}] = \{0\}$.

On considère une sous-algèbre de Cartan σ-stable, $\mathfrak{t}$, du centralisateur dans $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{t}_{kq} \oplus \mathfrak{a}_{ph} \oplus \mathfrak{a}_\emptyset$ qui peut donc s'écrire $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{kh} \oplus \mathfrak{t}_{kq}$ où $\mathfrak{t}_{kh} = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}$.

On pose alors $\mathfrak{j} := \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{a}_{ph} \oplus \mathfrak{a}_\emptyset$. C'est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, σ et θ stable. La décomposition ci-dessus permet d'identifier $\mathfrak{a}_\emptyset^*$ à un sous-espace de $\mathfrak{j}^*$ ce que nous ferons dans la suite.

On choisit un ensemble de racines positives de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$, $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$, compatible avec Δ^+, i.e. si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$ et $\alpha|_{\mathfrak{a}_\emptyset} \neq 0$ on a:

$$\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{j}) \Leftrightarrow \alpha|_{\mathfrak{a}_\emptyset} \in \Delta^+.$$

On note $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell\}$ les racines simples de Δ^+ de telle sorte que $\Sigma - \Theta = \{\alpha_i | 1 \leqq i \leqq m\}$. Soient $\delta_1, \ldots, \delta_\ell \in \mathfrak{a}_\emptyset^*$ les poids fondamentaux correspondants à Σ, qu'on regarde comme éléments de $\mathfrak{j}^*$.

Lemme 2 *Il existe des entiers $n_i \in \mathbb{N}^*$, $i = 1, \ldots, \ell$ tels que:*

(i) *les éléments $\tilde{\delta}_i := n_i \delta_i$ sont des poids $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$-dominants.*
(ii) *la représentation de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de plus haut poids $\tilde{\delta}_i$ s'intègre en une représentation de $\underline{G}$ notée (π_i, V_i) que possède un vecteur non nul invariant par $\underline{H}$.*
(iii) *en munissant V_i d'un produit scalaire invariant par le sous-groupe analytique de $\underline{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ (qui est compact) on peut choisir $v_i \in V_i$ de norme 1 et de poids $\tilde{\delta}_i$ sous $\mathfrak{j}$ et un vecteur ξ_i, $\underline{H}$-invariant de norme 1 tels que $(v_i, \xi_i) > 0$.*
(iv) *les représentations π_i de $\underline{G}$ sont algébriques,*
(v) *le vecteur v_i est invariant par $\pi_i(\underline{M})$ pour $i = 1, \ldots, m$.*

Démonstration. On se fixe $i \in \{1, \ldots, \ell\}$. On sait qu'il existe un entier m_i tel que $m_i \delta_i$ soit un poids $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$-dominant et qu'en outre la représentation $(\pi_{m_i \delta_i}, V_{m_i \delta_i})$ du recouvrement universel de $\underline{\tilde{G}}$ de $\underline{G}$ admette un vecteur non nul invariant par le sous-groupe analytique $\underline{\tilde{H}}$ de $\underline{\tilde{G}}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ (cf. [Ol2, théorème 2.4]). Pour l'existence du vecteur $\underline{\tilde{H}}$-invariant voir aussi [He, ch. V, théorème 4.1, p. 535]. En fait dans Helgason, il s'agit de groupes compacts. Ici on regarde une situation complexifiée. Il résulte de la preuve que l'on peut choisir $v_{m_i \delta_i}$ vecteur de plus haut poids pour $\pi_{m_i \delta_i}$ et $\xi_{m_i \delta_i}$ vecteur $\underline{\tilde{H}}$-invariant non nul tels que $(v_{m_i \delta_i}, \xi_{m_i \delta_i}) > 0$, pour un produit scalaire invariant par le sous-groupe analytique de $\underline{\tilde{G}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{p}$ (cf. [He, p. 537 eq. (7)]). Le centre de $\underline{\tilde{G}}$

agit par des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité pour un n bien choisi (noter que le centre de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ agit trivialement). Alors la représentation $(V_{m_i\delta_i})^{\otimes n}$ est triviale sur le centre de $\tilde{G}$ et permet de définir une représentation de $\underline{G}$. D'autre part, $v_{nm_i\delta_i}:=(v_{m_i\delta_i})^{\otimes n}$ est de plus haut poids $nm_i\delta_i$. Donc la représentation de plus haut poids $(\pi_{nm_i\delta_i}, V_{nm_i\delta_i})$ apparaît comme sous-représentation de $(V_{m_i\delta_i})^{\otimes n}$. D'autre part $(\xi_{m_i\delta_i})^{\otimes n}$ est invariant par $\underline{H}^0$ et admet une projection orthogonale non nulle sur $V_{nm_i\delta_i}$ car:

$$((\xi_{m_i\delta_i})^{\otimes n}, v_{nm_i\delta_i}) = (\xi_{m_i\delta_i}, v_{m_i\delta_i})^n > 0.$$

La projection orthogonale de $(\xi_{m_i\delta_i})^{\otimes n}$ sur $V_{nm_i\delta_i}$ qu'on note $\xi_{nm_i\delta_i}$ est alors $\underline{H}^0$ invariante et vérifie $(\xi_{nm_i\delta_i}, v_{nm_i\delta_i})>0$. D'autre part, dim $V^{\underline{H}^0}_{n,m_i\delta_i}=1$. Donc le groupe fini $\underline{H}/\underline{H}^0$ agit sur $\xi_{nm_i\delta_i}$ par des racines $k^{\text{ièmes}}$ de l'unité pour un k bien choisi. Un argument de tensorisation similaire à celui ci-dessus montre que $n_i=knm_i$ satisfait les points (i), (ii), (iii) du lemme. Pour (iv) on remarque que le centre de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ agit trivialement sous π_i de même que le centre de $\underline{G}$. Alors π_i se factorise à travers une représentation du groupe adjoint de $\underline{G}$ qui est semisimple. De ce fait π_i est bien algébrique. Pour (v) il est facile de voir que v_i est invariant par $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\alpha_j}$ et $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{-\alpha_j}$ pour $j\neq i$. Comme l'algèbre de Lie de $\underline{M}$ est engendrée par les $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\pm\alpha_j}$ avec $\alpha_j\in\Theta$, i.e. $j>m$, on voit que v_i est invariant sous $\pi_i(\underline{M})$, pour $i=1, \ldots, m$.

Ceci achève de prouver (v). □

2.2 (H, P) (resp. $(\underline{H}, \underline{P})$)-doubles classes ouvertes dans G (resp. $\underline{G}$)

On note W le groupe de Weyl de $\Delta=\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_0)$ qui s'identifie d'après [B2] lemme 1.2 au quotient du normalisateur dans K de $\mathfrak{a}_\emptyset$, $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$, par son centralisateur $Z_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$. On note $W_{K\cap H}$ l'image dans W du normalisateur dans $K\cap H$ de $\mathfrak{a}_\emptyset$. Soit $\mathscr{W}$ un ensemble de représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ de $W_{K\cap H}\backslash W$. Alors les orbites ouvertes de H dans $G/P_\emptyset$ sont paramétrées bijectivement par $HwP_\emptyset$, $w\in\mathscr{W}$ (cf. [B2, proposition B.1]).

Lemme 3 (i) *Soit Ω ouvert non vide de G, stable par les translations à gauche par H et à droite par $P_\emptyset$. Alors Ω contient une $(H, P_\emptyset)$-double classe ouverte.*
(ii) *De façon similaire, si $\Omega\subset\underline{G}$ est ouvert non vide est stable par les translations à gauche par $\underline{H}$ et à droite par un parabolique $\underline{P}$ de $\underline{G}$ il contient une $(\underline{H}, \underline{P})$-double classe ouverte.*

Démonstration. Démontrons (i). On se place dans $H\backslash G$ et on regarde l'image $p(\Omega)$ dans $H\backslash G$. C'est un ouvert stable par les translations à droite par $P_\emptyset$. Or, il n'y a qu'un nombre fini d'orbites de $P_\emptyset$ dans $H\backslash G$ (cf. [Ma]). Donc $p(\Omega)$ apparaît comme réunion finie de telles orbites. Supposons que celles-ci soient toutes d'intérieur vide. En présentant $P_\emptyset$ comme une réunion dénombrable de sous-ensemble compacts, chaque orbite sous $P_\emptyset$ d'intérieur vide apparaît comme réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Il en est de même de Ω. Le théorème de Baire fournit la contradiction voulue.

La démonstration de (ii) est similaire. □

Du lemme précédent résulte le fait que les doubles (H, P)-classes ouvertes sont paramétrées par certains des HwP. D'autre part on a $\mathfrak{g}=\mathfrak{h}+\mathrm{Lie}\,P_\emptyset$. En effet, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(P_\emptyset) + \theta(\mathrm{Lie}\, P_\emptyset)$. Soit $X \in \mathrm{Lie}\, P_\emptyset$. Alors $\theta(X) = \theta(X) + \sigma(\theta(X)) - (\sigma\theta)(X)$. Mais Lie $P_\emptyset$ est $\sigma\theta$-stable donc $\sigma\theta(X) \in \mathrm{Lie}\, P_\emptyset$ et $\theta(X) \in \mathfrak{h} \oplus \mathrm{Lie}\, P_\emptyset$. D'où l'égalité voulue. On a donc aussi $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} + \mathrm{Lie}(\underline{P}_\emptyset)$ d'où il résulte que $\underline{H}\underline{P}_\emptyset$ et $\underline{H}\underline{P}$ sont ouverts dans $\underline{G}$.

On notera ε_i, $i = 1, \ldots, \ell$ les fonctions polynômiales sur $\underline{G}$ définies par:

$$\forall g \in \underline{G}, \quad \varepsilon_i(g) = (\pi_i(g)\, v_i, \xi_i).$$

On pose:

$$\varepsilon = \prod_{\{i \mid \alpha_i \notin \Theta\}} \varepsilon_i.$$

On a donc:

$$\varepsilon = \prod_{i=1}^{m} \varepsilon_i \quad \text{puisque } \Sigma - \Theta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}.$$

La démonstration du lemme suivant s'inspire d'une démonstration de G. Olafsson (cf. [Ol2] lemme 2.6).

Lemme 4 (i) *Pour tout* w *élément de* $\mathscr{W}$, $HwP \subset \{g \in G \mid \varepsilon(g) \neq 0\}$ *et si on note* $\overline{HwP}$ *l'adhérence dans* G *de* HwP *on a* $\overline{HwP} - HwP \subset \{g \in G \mid \varepsilon(g) = 0\}$.
(ii) *On a* $\underline{H}\underline{P} \subset \{g \in \underline{G} \mid \varepsilon(g) \neq 0\}$ *et l'adhérence* $\overline{\underline{H}\underline{P}}$ *de* $\underline{H}\underline{P}$ *dans* $\underline{G}$ *vérifie* $\overline{\underline{H}\underline{P}} - \underline{H}\underline{P} \subset \{g \in \underline{G} \mid \varepsilon(g) = 0\}$.

Démonstration. Démontrons (i) (la démonstration de (ii) étant similaire).

D'abord pour i tel que $\alpha_i \notin \Theta$, $\forall m \in M$, $a \in A$, $n \in N$, $\pi_i(man)\, v_i = a^{\delta_i} v_i$, d'après les propriétés de π_i, v_i (cf. lemme 2).

Alors: $(\pi_i(hwman)\, v_i, \xi_i) = a^{\delta_i}(\pi_i(w)\, v_i, \xi_i)$. Mais $(\pi_i(w)\, v_i, \xi_i) \neq 0$ (même démonstration que pour $(v_i, \xi_i) \neq 0$ en changeant de parabolique). On a donc bien

$$HwP \subset \{g \in G \mid \varepsilon(g) \neq 0\}.$$

Soit maintenant $g \in \overline{HwP} - HwP$. Soit (g_n) une suite d'éléments de HwP convergeant vers g. On écrit $g_n = h_n w m_n a_n n_n$ avec $h_n \in H$, $m_n \in M$, $a_n \in A$, $n_n \in N$.

On va montrer que a_n n'est pas bornée modulo $\exp(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}_\emptyset)$. En quotientant par $\exp(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}_\emptyset)$ on se ramène à montrer que a_n est non bornée, en supposant $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}_\emptyset = \{0\}$. Raisonnons par l'absurde et supposons (a_n) bornée. On peut donc supposer (quitte à extraire une sous-suite) que a_n converge vers $a \in A$. On se ramène au cas $w = 1$ en considérant $g_n w^{-1} = h_n w m_n a_n n_n w^{-1}$ et le sous-groupe parabolique $P^w = wPw^{-1}$ qui est du même type que P (relativement à $wP_\emptyset w^{-1}$ qui est du même type que $P_\emptyset$). On supposera donc $w = 1$ dans la suite (pour montrer que a_n est non bornée). Alors $g_n = h_n m_n a_n n_n$.

On pose: $y_n = a_n n_n a_n^{-1} \in N$.

Alors $(h_n m_n y_n) = (g_n a_n^{-1})$ est convergente. Donc $(\sigma(h_n m_n y_n)^{-1} h_n m_n y_n)$ est une suite convergente. Soit encore, en posant $v_n = \sigma(y_n)^{-1}$:$(v_n \sigma(m_n)^{-1} m_n y_n)$ est convergente. Mais $\sigma(m_n) \in M$, donc $m'_n = \sigma(m_n^{-1})\, m_n \in M$.

Par ailleurs $v_n \in \sigma(N) = \theta(N) = N^-$ où N^- est le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}^- = \theta(\mathfrak{n})$.

On va voir que le fait que $(v_n m'_n y_n)$ est convergente implique la convergence de (v_n), (m'_n) et (y_n).

Pour cela on considère la représentation $(\pi, \tilde{V})$ de G de plus haut poids $\tilde{\delta} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\delta}_i$, et $\tilde{v} \in \tilde{V}$ un vecteur de plus haut poids. Notons que π peut se réaliser comme la sous-représentation de $\bigotimes_{i=1}^{m} \pi_i$ engendrée par $\bigotimes_{i=1}^{m} v_i = \tilde{v}$.

Alors $\tilde{v}$ est fixé par M et $\pi(v_n m'_n y_n)\tilde{v} = \pi(v_n)\tilde{v}$ d'après le lemme 2 (v). Donc $\pi(v_n)\tilde{v}$ converge dans V.

On va utiliser le lemme suivant qui généralise un résultat d'Harish Chandra (HC1, lemme 40 p. 284].

Lemme 5 *Avec les notations et hypothèses ci-dessus, supposons que Y varie dans $\mathfrak{n}^- = \theta(\mathfrak{n})$ et que $\pi(\exp Y)\tilde{v}$ converge. Alors Y converge dans $\mathfrak{n}^-$.*

Démonstration. On note $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ le sous-espace réel de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ défini par $(i\cdot(\mathfrak{j} \cap \mathfrak{k})) \oplus (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{p})$. Les racines sont réelles sur $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$. On a $\mathfrak{a}_\emptyset \subset \mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ et $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}} = (\mathfrak{j}_{\mathbb{R}} \cap (\mathfrak{m}_\emptyset)_{\mathbb{C}}) \oplus \mathfrak{a}_\emptyset$. On a une décomposition similaire du dual $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}^*$. On fixe un ordre lexicographique sur $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}^*$ en prenant une base qui commence par la base $(\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ de $\mathfrak{a}_\emptyset^*$, (on rappelle que $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}_\emptyset = \{0\}$ dans cette partie) et se termine par une base de $(\mathfrak{j}_{\mathbb{R}} \cap (\mathfrak{m}_\emptyset)_{\mathbb{C}})^*$. C'est à partir de cet ordre qu'on détermine $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{j})$. On numérote l'ensemble des racines de $\mathfrak{j}$ dans $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$ par ordre croissant i.e. $\Delta(\mathfrak{j}, \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}) = \{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ avec $\beta_1 < \beta_2 \ldots < \beta_q$.

On se fixe $X_{-\beta_i}$ un élément non nul de l'espace radiciel de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^-$ correspondant à $-\beta_i$. On écrit $Y = \sum_{i=1}^{q} t_i(X) X_{-\beta_i}$, $t_i(Y) \in \mathbb{C}$. Il suffit de voir que $t_i(Y)$ converge pour tout i. Supposons que cela soit faux et soit j le plus petit entier pour lequel $t_j(Y)$ ne converge pas. Soit $\tilde{V}_j$ le sous-espace de $\tilde{V}$ formé des vecteurs de poids $\tilde{\delta} - \beta_j$ et E_j la projection de $\tilde{V}$ sur $\tilde{V}_j$ parallèlement à la somme de tous les autres sous-espaces poids de $\tilde{V}$ sous $\mathfrak{j}$.

Alors:

$$E_j(\pi(\exp Y)\tilde{v}) = \sum_{m \geqq 0} (m!)^{-1} E_j(\pi(Y^m)\tilde{v}).$$

Mais si $Y' = \sum_{1 \leqq i < j} t_i(Y) X_{-\beta_i}$ on a:

$$E_j(\pi(Y^m)\tilde{v}) = E_j(\pi(Y'm)\tilde{v}) \qquad \text{pour } m > 1,$$

car la différence entre le premier et le second membre est une somme d'images par E_j de vecteurs de poids de la forme $\tilde{\delta} - \beta_j - \gamma$ où γ strictement positifs pour l'ordre lexicographique sur $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}^*$. De plus, $E_j(\pi(Y')\tilde{v}) = 0$ tandis que $E_j(\pi(Y)\tilde{v}) = t_j(Y)\pi(X_{-\beta_j})\tilde{v}$. D'où:

$$E_j(\pi(\exp Y)\tilde{v}) = t_j(Y)\pi(X_{-\beta_j})\tilde{v} + E_j(\pi(\exp Y')\tilde{v}).$$

D'après la définition de j, Y' converge dans $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}^-$ donc aussi $\pi(\exp Y')\tilde{v}$. La même chose est donc vraie pour $t_j(Y)\pi(X_{-\beta_j})\tilde{v}$. Il reste à prouver que $\pi(X_{-\beta_j})\tilde{v} \neq 0$. Pour cela on choisit X_{β_j} non nul dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\beta_j}$ tel que $[X_{\beta_j}, X_{-\beta_j}] = H_{\beta_j}$ représente la forme linéaire β_j dans $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ (identifié à $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$ grâce à B).

On note γ_j la restriction à $\mathfrak{a}_\emptyset$ de β_j. C'est un élément de $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\emptyset)$. Alors si $H_{\beta_j} = H_1 + H_{\gamma_j}$ avec $H_1 \in \mathfrak{j}_{\mathbb{R}} \cap (\mathfrak{m}_\emptyset)_{\mathbb{C}}$ et $H_{\gamma_j} \in \mathfrak{a}_\emptyset$, il est clair que H_{γ_j} représente la forme linéaire γ_j. Donc $\tilde{\delta}(H_{\beta_j})=\tilde{\delta}(H_{\gamma_j})$ et cette dernière quantité est non nulle car $\tilde{\delta}=\sum_{i=1}^{m}\delta_i$ et $\gamma_j=\sum_{i=1}^{\ell} n_i\alpha_i$ avec $n_i\in\mathbb{N}$ et $n_i\neq 0$ pour un $i\in\{1,\ldots,m\}$ (vu que $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}^{\gamma_j}\subset\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$). Par la théorie des représentations de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ cela implique $\pi(X_{-\beta_j})\tilde{v}\neq 0$. Donc $t_j(Y)$ converge, une contradiction qui achève de prouver le lemme 5. $\square$

Retour à la démonstration du lemme 4. Du lemme 5 il résulte que v_n est convergente. De façon symétrique y_n converge donc aussi $m'_n=\sigma(m_n^{-1})\,m_n$.

Mais l'élément m_n de M peut s'écrire sous la forme $h'_n(\exp X_n)\,k_n$ avec $k_n\in M\cap K$, $X_n\in\mathfrak{a}_\emptyset\cap\mathfrak{m}$ et $h'_n\in H\cap M$.

Alors $m'_n=\sigma(k_n^{-1})(\exp 2X_n)\,k_n$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (k_n) et donc $(\sigma(k_n)^{-1})$ convergent. Mais alors comme (m'_n) converge, il en va de même de $(\exp(2X_n))$ donc de (X_n) car exp est un difféomorphisme de $\mathfrak{a}_\emptyset$ sur $\exp\mathfrak{a}_\emptyset$, qui est fermé dans G. On en déduit que $(h_n'^{-1}\,m_n)=(m''_n)$ converge dans M. On a alors:

$$g_n=h''_n\,m''_n\,a_n\,n_n \quad \text{où} \quad h''_n=h_n\,h'_n\in H$$

et (g_n), (m''_n), (a_n), (n_n) convergent, donc aussi (h''_n). Mais on aurait alors $g\in HP$.

On a donc bien prouvé que (a_n) est non bornée modulo $\exp(\mathfrak{c}\cap\mathfrak{a}_\emptyset)$. Par ailleurs, pour $i=1,\ldots,m$, $\varepsilon_i(g_n)=a_n^{\delta_i}$. Comme (g_n) converge, $\varepsilon_i(g_n)$ converge vers $\varepsilon_i(g)$ pour tout i. Si pour tout $i=1,\ldots,m$, $\varepsilon_i(g_n)$ convergeait vers une limite non nulle, on en déduirait que (a_n) est bornée modulo $\exp(\mathfrak{c}\cap\mathfrak{a}_\emptyset)=\exp(\mathfrak{c}\cap\mathfrak{a})$. Donc l'un des $\varepsilon_i(g)$ est nul et $\varepsilon(g)=0$ comme on voulait. $\square$

Proposition 2 (i) *$\underline{H}\underline{P}$ est la seule double $(\underline{H},\underline{P})$-classe ouverte dans $\underline{G}$.*
(ii) $\underline{H}\underline{P}=\{g\in\underline{G}\,|\,\varepsilon(g)\neq 0\}$.

Démonstration. Comme chaque $(\underline{H},\underline{P})$-double classe est constructible pour la topologie de Zariski, elle est ouverte pour la topologie ordinaire si et seulement si elle est ouverte pour la topologie de Zariski. Mais le complémentaire d'un ouvert non vide de Zariski est d'intérieur vide, ce qui implique (i).

Prouvons (ii). D'après le lemme 4, $\underline{H}\underline{P}$ est fermé dans $\{g\in\underline{G}\,|\,\varepsilon(g)\neq 0\}|$. Son complémentaire dans $\{g\in\underline{G}\,|\,\varepsilon(g)\neq 0\}$ est alors ouvert et stable par les translations à gauche par $\underline{H}$ et à droite par $\underline{P}$. S'il était non vide il devrait contenir une $(\underline{H},\underline{P})$-double classe ouverte. Or celle-ci est unique (voir ci-dessus) et incluse dans $\underline{H}\underline{P}$. D'où l'égalité voulue.

Proposition 3 (i) *L'application $\underline{H}\times\underline{L}\times\underline{N}\to\underline{H}\underline{P}$ se factorise en un isomorphisme de variétés algébriques affines*

$$\underline{H}\underset{\underline{L}\cap\underline{H}}{\times}\underline{L}\times\underline{N}\to\underline{H}\underline{P}.$$

(ii) *Notant $\underline{Y}=\underline{H}\underline{P}$, $\underline{Y}$ est une variété algébrique définie sur* $\mathbb{R}$.
(iii) *HP est réunion de composantes connexes pour la topologie ordinaire sur G de l'ensemble des points réels $Y=\underline{Y}\cap G$ de $\underline{Y}$.*

Démonstration. (i) Notons que $\underline{L}$, qui est le centralisateur dans $\underline{G}$ de $\mathfrak{a}_\emptyset$, est réductif et stable par σ, donc aussi $\underline{L}\cap\underline{H}=\underline{L}^\sigma$. Comme $\underline{H}$ et $\underline{L}$ sont des variétés affines le quotient $\underline{H}\underset{\underline{L}\cap\underline{H}}{\times}\underline{L}$ par l'action du groupe réductif $\underline{L}\cap\underline{H}$ est la variété affine d'algèbre de fonctions régulières $\mathcal{O}(\underline{H}\times\underline{L})^{\underline{L}\cap\underline{H}}$ (où $\mathcal{O}(-)$ désigne l'algèbre des fonctions régulières). Cet anneau de fonctions est intégralement clos par un argument classique.

Comme $\underline{L}\cap\underline{H}$ agit sans point fixe, toutes les orbites de $\underline{L}\cap\underline{H}$ dans $\underline{H}\times\underline{L}$ sont (Zariski) fermées et les points de la variété quotient (sur $\mathbb{C}$) correspondent à ces orbites i.e. forment l'espace $\underline{H}\underset{\underline{L}\cap\underline{H}}{\times}\underline{L}$. Un tel quotient est «geometric» et «categorical» au sens de [Mu ch. 1]. De même le quotient $\underline{H}\times\underline{L}\times\underline{N}$ par $\underline{H}\cap\underline{L}$ est catégorique. Il s'ensuit que le morphisme $\underline{H}\times\underline{L}\times\underline{N}\to\underline{HP}$ donné par $(h,\ell,n)\mapsto h\ell n$ se factorise en un morphisme $\underline{H}\underset{\underline{L}\cap\underline{H}}{\times}\underline{L}\times\underline{N}\to\underline{HP}$, d'après la définition même du concept «categorical». Or, on a $\underline{H}\cap\underline{P}=\underline{H}\cap\underline{P}\cap\sigma(\underline{P})$ car $\underline{H}$ est fixé par σ. Mais $\sigma\theta(\underline{P})=\underline{P}$. D'où $\underline{P}\cap\sigma(\underline{P})=\underline{P}\cap\theta(\underline{P})=\underline{L}$. D'où $\underline{H}\cap\underline{P}=\underline{L}$ et le morphisme ci-dessus induit une bijection sur les points complexes. Alors d'après [Bo Th. 18.2 p. 78] cela implique que c'est un isomorphisme et (i) est prouvé.

Prouvons (ii). Le morphisme de variétés algébriques $\underline{H}\underset{\underline{L}\cap\underline{H}}{\times}\underline{L}\times\underline{N}\to\underline{G}$ est défini sur $\mathbb{R}$ donc aussi son image $\underline{Y}$.

Prouvons (iii). On a déjà vu que HP est ouvert dans G pour la topologie ordinaire. Pour $g\in\underline{Y}\cap G$, analysons l'obstruction à trouver $h\in H$, $p\in P$ tels que $g=hp$. On a $g=hp$ avec $h\in\underline{H}$, $p\in\underline{P}$. Notons τ la conjugaison par rapport à la forme réelle G de $\underline{G}$. On a $g=g^\tau=h^\tau p^\tau$. Posant $y=(h^\tau)^{-1}h=p^\tau p^{-1}$, y est un élément de $\underline{H}\cap\underline{P}=\underline{H}\cap\underline{L}$ tel que $yy^\tau=1$. S'il existe $z\in\underline{H}\cap\underline{L}$ tel que $y=(z^\tau)^{-1}z$, on a $hz^{-1}=h^\tau(z^\tau)^{-1}=(hz^{-1})^\tau$ donc $hz^{-1}\in H$. D'où $g=(hz^{-1})(zp)$ avec $hz^{-1}\in H$ et $zp\in G\cap\underline{P}=P$. L'obstruction à trouver $h,p\in G$ tels que $g=hp$ est donc l'ensemble de cohomologie galoisienne $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}),\underline{H}\cap\underline{L}))$ qui est défini (cf. [Se 1, Sp]) comme quotient de $\{y\in\underline{H}\cap\underline{L}\,|\,yy^\tau=1\}$ par l'action suivante de $\underline{H}\cap\underline{L}$: $z*y=z^\tau yz^{-1}$ pour $z\in\underline{H}\cap\underline{L}$. Cet ensemble est fini (cf. [Sp]). On montre facilement que toute orbite de $\underline{H}\cap\underline{L}$ dans $\{y\in\underline{H}\cap\underline{L}\,|\,yy^\tau=1\}$ est ouverte donc $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}),\underline{H}\cap\underline{L})$, muni de la topologie quotient, est discret. On a une application continue φ: $\underline{Y}\cap G\to H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}),\underline{H}\cap\underline{L})$ définie par $\varphi(g)=$classe de y où $y=h^\tau h^{-1}$ comme ci-dessus.

Comme $Y=HP=\varphi^{-1}(\bar{1})$, Y est une réunion de composantes connexes de $\underline{Y}\cap G$. □

3 Séries principales généralisées H-sphériques

3.1

On se fixe maintenant une représentation $(\delta,V_\delta)\in\hat{M}$ qui est une série discrète de $M/M\cap H$; on peut la regarder comme représentation de $L=MA$ triviale sur A et lui appliquer les résultats du § 1.3.

Pour $\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ on introduit la série principale généralisée lisse correspondante, $(\pi_{\delta,\nu},I_{\delta,\nu})$ où $I_{\delta,\nu}=\{\varphi\colon G\to V_\delta^\infty\,|\,\varphi$ est C^∞ de G dans V_δ^∞ et $\forall(g,m,a,n)\in G\times M\times A\times N$, $\varphi(gman)=a^{-\nu-\rho}\delta(m^{-1})\varphi(g)\}$ et G agit par représentation régulière gauche.

Ici $\rho=(\rho_\emptyset)_{|\mathfrak{a}}$. On se fixe comme topologie sur $I_{\delta,\nu}$ celle donnée par les semi-normes:

$$\|\varphi\|_{D,q}=\sup_{k\in K}q((L_D\varphi)(k))$$

où D décrit $U(\mathfrak{g})$ et q les semi-normes définissant la topologie de V_δ^∞ (cf. [C, § 4]). D'après la proposition 1, § 1.3 on peut prendre pour celles-ci la famille (q_D), $D \in U(\mathfrak{m})$ définie par:

$$q_D(v) = \int_{M/M \cap H} |(L_D v)(\dot{m})|^2 \, d\dot{m}$$

(où l'on regardé V_δ^∞ comme un sous-espace de $L^2(M/M \cap H, d\dot{m})$ pour une mesure $d\dot{m}$ invariante sur $M/M \cap H$).

D'après [C, proposition 4.1], $\pi_{\delta,\nu}$ est lisse et à croissance modérée. Les constructions qui suivent dépendent de l'identification de V_δ^∞ avec un sous-espace de $L^2(M/M \cap H, d\dot{m})$. On définit $\eta \in (V_\delta^{-\infty})^{M \cap H}$ en restreignant à V_δ^∞ la mesure de Dirac en $e(M \cap H)$.

On veut définir des vecteurs distributions H-invariants sur $I_{\delta,\nu}$ dépendant faiblement méromorphiquement de ν. Le résultat sera légèrement plus faible. On définit d'abord un espace indépendant de ν:

$$I_\delta = \{\varphi : K \to V_\delta^\infty \mid \varphi \text{ est } C^\infty \text{ et } \forall (k, m) \in K \times (M \cap K), \varphi(km) = \delta(m^{-1}) \varphi(k)\}.$$

On munit I_δ des semi-normes

$$\|\varphi\|_{D,q} = \sup_{k \in K} q((L_D \varphi)(k))$$

où q décrit des semi-normes définissant la topologie de V_δ^∞ et D décrit $U(\mathfrak{k})$. On note $\sim$ l'homomorphisme de restrictions des fonctions dans $I_{\delta,\nu}$ de G à K ce qui détermine pour tout ν un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $I_{\delta,\nu}$ et I_δ qui est clairement continu. Comme $I_{\delta,\nu}$ et I_δ sont des espaces de Fréchet, il s'agit donc d'un isomorphisme topologique d'après le théorème du graphe fermé. On obtient par transport de structure des représentations notées $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}$ sur I_δ.

On suppose dans tout le paragraphe 3.1 que $\mathrm{Re}(\nu - \rho)$ est strictement $\Delta^+(\mathfrak{a})$-dominant où $\Delta^+(\mathfrak{a})$ désigne les racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$. On définit ξ_ν: $G \to (V_\delta^\infty)'$ par:

$$\forall g \notin HP, \xi_\nu(g) = 0$$
$$\forall (h, m, a, n) \in H \times M \times A \times N, \xi_\nu(hman) = a^{\nu - \rho} \delta'(m^{-1}) \eta.$$

La fonction ξ_ν est bien définie car η est fixé par $\delta'(H \cap M)$.

Lemme 6 *La fonction ξ_ν est continue lorsque l'on munit $(V_\delta^\infty)'$ de la topologie forte de dual de $(V_\delta^\infty)'$.*

Démonstration. Comme V_δ^∞ est un espace de Montel (cf. § 1.4) V_δ^∞ est réflexif et $(V_\delta^\infty)'$ est un espace de Montel [Bou 1, ch. IV, § 4 p. 89 et suivantes]. Comme V_δ^∞ est réflexif, la topologie affaiblie de $(V_\delta^\infty)'$ et sa topologie faible de dual de V_δ^∞ sont identiques.

D'autre part, d'après [loc. cit., corollaire de la proposition 6, p. 90], les suites convergentes dans $(V_\delta^\infty)'$ pour la topologie affaiblie et la topologie forte sont les mêmes. Il suffit donc de voir que ξ_ν est continue de G dans $(V_\delta^\infty)'$ muni de la topologie faible.

Soit donc $v \in V_\delta^\infty$ et étudions la fonction $F_{\nu,v}$ de G dans $\mathbb{C}$ définie par

$$F_{\nu,v}(g) = \langle \xi_\nu(g), v \rangle.$$

Il est clair que la seule chose à prouver est que si (g_n) est une suite dans HP qui converge vers $g \notin HP$ on a $\lim_{n \to \infty} F_{\nu, v}(g_n) = 0$.

Quitte à multiplier par un caractère de G on peut se ramener au cas où ν est nulle sur $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ puis on peut passer au quotient par $\exp(\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a})$ et se ramener au cas où $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$, auquel cas les $\tilde{\delta}_1, \ldots, \tilde{\delta}_m$ forment une base de $\mathfrak{a}^*$.

On a alors:

$$F_{\nu, v}(g_n) = a_n^{\nu - \rho} \langle \delta'(m_n^{-1}) \eta, v \rangle.$$

où $g_n = h_n\, m_n\, a_n\, n_n$ avec $h_n \in H$, $m_n \in M$, $a_n \in A$, $n_n \in N$.

La définition de η et des fonctions ε_i montre alors que:

$$F_{\nu, v}(g_n) = \prod_{i=1}^{m} \varepsilon_i(g_n)^{\tilde{\nu}_i}\, v(m_n^{-1} . M \cap H)$$

où l'on a écrit:

$$\nu - \rho = \sum_{i=1}^{m} \tilde{\nu}_i\, \tilde{\delta}_i, \qquad \operatorname{Re} \tilde{\nu}_i > 0.$$

Mais d'après le lemme 4(i):

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{i=1}^{n} \varepsilon_i(g_n)^{\tilde{\nu}_i} = \prod_{i=1}^{m} \varepsilon_i(g)^{\tilde{\nu}_i} = 0.$$

Il suffit donc de voir que v est bornée sur $M/M \cap H$. Mais cela résulte de la proposition 1(i), § 1.3.

Lemme 7 *On conserve les hypothèses et notations du lemme* 6.

Pour $\varphi \in I_\delta$ on note φ_ν l'élément de $I_{\delta, \nu}$ tel que: $\tilde{\varphi}_\nu = \varphi$. Alors:

(i) *la fonction $g \mapsto \langle \xi_\nu(g), \varphi_\nu(g) \rangle$ est continue sur G, invariante à droite par MN et vérifie:*

$$\forall g \in G, \forall a \in A, \langle \xi_\nu(ga), \varphi_\nu(ga) \rangle = a^{-2\rho} \langle \xi_\nu(g), \varphi_\nu(g) \rangle$$

(ii) *la forme linéaire $\bar{\xi}_\nu$ sur I_δ définie par:*

$$\langle \bar{\xi}_\nu, \varphi \rangle = \int_K \langle \xi_\nu(k), \varphi(k) \rangle \, dk$$

est continue sur I_δ.

(iii)
$$\forall \varphi \in I_\delta, \forall h \in H, \langle \bar{\xi}_\nu, \tilde{\pi}_{\delta, \nu}(h) \varphi \rangle = \langle \bar{\xi}_\nu, \varphi \rangle,$$
$$\forall \varphi \in I_\delta, \forall X \in \mathfrak{h}, \langle \bar{\xi}_\nu, \tilde{\pi}_{\delta, \nu}(X) \varphi \rangle = 0$$

Démonstration. Les propriétés de covariance à gauche de la fonction $\langle \xi_\nu(g), \varphi(g) \rangle$ sont claires. Comme $G = KMAN$, il suffit de prouver la continuité de cette fonction sur K. Comme K est compact, $\varphi_\nu(K)$ est borné dans V_δ^∞. Mais $(V_\delta^\infty)'$ muni de sa topologie de dual fort est de Montel comme on l'a déjà observé, donc tonnelé. Alors le crochet de dualité $V_\delta^\infty \times (V_\delta^\infty)' \to \mathbb{C}$ est continu sur $\varphi_\nu(K) \times (V_\delta^\infty)'$ d'après [Bou 1, ch. III § 4 n° 2, proposition 4, p. 39 et proposition 6, p. 40].

Mais l'application de K dans $V_\delta^\infty \times (V_\delta^\infty)'$ définie par $k \to (\varphi_\nu(k), \xi_\nu(k))$ est continue et à valeurs dans $\varphi_\nu(K) \times (V_\delta^\infty)'$ d'après le lemme précédent et les propriétés de φ_ν. L'application $k \to \langle \xi_\nu(k), \varphi_\nu(k)\rangle$ est alors continue comme composée d'applications continues.

Ceci achève de prouver (i).

Prouvons (ii). D'après (i) $\bar{\xi}_\nu$ est bien définie. Reste à prouver sa continuité. Comme I_δ est un Fréchet on va utiliser le théorème du graphe fermé. Soit donc (φ_n) une suite dans I_δ convergeant vers 0 et telle que $\langle \bar{\xi}_\nu, \varphi_n\rangle$ converge vers ℓ. Il suffit de voir que $\ell = 0$. Montrons d'abord que $B = \{\varphi_n(k) \in V_\delta^\infty \mid k \in K, n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans V_δ^∞. En effet, l'ensemble $B_1 = \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans I_δ et son adhérence $\bar{B}_1$ dans I_δ (qui est un espace de Montel, cf. § 1.4) est compacte. Par ailleurs, $(\tilde{\pi}_{\delta,\nu}, I_\delta)$ étant un G-module lisse, l'application Φ: $K \times I_\delta \to I_\delta$ définie par $\Phi(k, \varphi) = \tilde{\pi}_{\delta,\nu}(k)\varphi$ est continue. De même, l'application ev_e: $I_\delta \to V_\delta^\infty$ définie par $ev_e(\varphi) = \varphi(e)$ est continue. Alors B est inclus dans l'image, B', du compact $K \times \bar{B}_1$ par l'application continue $ev_e \circ \Phi$. Donc B est borné dans V_δ^∞ car contenu dans le compact B'. Le sous-ensemble de $\mathbb{C}$, $\{\langle \xi_\nu(k), \varphi_n(k)\rangle \mid k \in K, n \in \mathbb{N}\}$ est inclus dans l'image par le crochet de dualité de $\xi_\nu(K) \times B'$ qui est compact. Mais ce crochet est continu sur $(V_\delta^\infty)' \times B'$ (cf. preuve de (i)). Donc $\{\langle \xi_\nu(k), \varphi_n(k)\rangle \mid k \in K, n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans $\mathbb{C}$ i. e.:

$$\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in K, |\langle \xi_\nu(k), \varphi_n(k)\rangle| \leqq M.$$

On peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions sur K:

$$k \mapsto \langle \xi_\nu(k), \varphi_n(k)\rangle.$$

Comme (φ_n) tend vers 0 dans I_δ, il est clair que $(\varphi_n(k))$ tend vers 0 dans V_δ^∞.

Mais alors, la suite de fonctions sur K, $\langle \xi_\nu(k), \varphi_n(k)\rangle$ converge simplement vers 0. Le théorème de convergence dominée montre que $\lim_{n \to \infty} \langle \bar{\xi}_\nu, \varphi_n\rangle = 0$ et $\ell = 0$ comme désiré. Ceci achève de prouver (ii).

Prouvons (iii). Si Φ est continue sur G et vérifie les conditions de covariance à gauche sous MAN décrites en (i), on sait que l'on a:

$$\forall g \in G, \int_K \Phi(k)\, dk = \int_K \Phi(g^{-1} k)\, dk$$

(cf. le fait que la représentation induite de la représentation triviale de MAN à G est unitaire). Alors pour tout φ dans I_δ,

$$\langle \bar{\xi}_\nu, \varphi\rangle = \int_K \langle \xi_\nu(h^{-1} k), \varphi_\nu(h^{-1} k)\rangle\, dk.$$

Mais

$$\xi_\nu(h^{-1} k) = \xi_\nu(k)$$

et

$$\varphi_\nu(h^{-1} k) = (\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(h)\, \varphi_\nu)(k).$$

D'où

$$\langle \bar{\xi}_\nu, \varphi\rangle = \langle \bar{\xi}_\nu, \tilde{\pi}_{\delta,\nu}(h)\varphi\rangle$$

pour tout $h \in H$ et $\varphi \in I_\delta$.

Par ailleurs, comme $\bar{\xi}_v$ est linéaire et continue sur I_δ et que H agit de façon C^∞ sur I_δ via $\tilde{\pi}_{\delta,v}$, on peut différentier la relation ci-dessus et on a la relation voulue:

$$\forall \varphi \in I_\delta, \forall X \in \mathfrak{h}, \langle \bar{\xi}_v, \tilde{\pi}_{\delta,v}(X)\varphi \rangle = 0. \quad \square$$

3.2 Equation fonctionnelle et prolongement méromorphe faible des $F_{v,v}$ dans $\mathscr{D}'(G)$, pour $v \in V_\delta^\infty$ et $M \cap K$-fini

On se propose d'utiliser les résultats de l'appendice A.2 (Equation de Bernstein-Sato pour uP^s). On rappelle que pour $v \in V_\delta^\infty$ et $\mathrm{Re}(\nu - \rho)$ strictement dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ on a: $F_{\nu,v}(g) = \langle \xi_\nu(g), v \rangle$ et que $F_{\nu,v}$ est continue sur G.

Notons $\nu - \rho = \nu_0 + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\nu}_i \bar{\delta}_i$ où ν_0 est la restriction de ν à $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}$ et $\tilde{\nu}_i \in \mathbb{C}$ avec $\mathrm{Re}\, \tilde{\nu}_i > 0$.

Notant χ_{ν_0} le caractère de G dont la différentielle est nulle sur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \oplus (\mathfrak{c} \cap \mathfrak{k})$, égale à ν_0 sur $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}$ et nulle sur l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{p}$, on a:

$$F_{\nu,v}(g) = \chi_{\nu_0}(g) \left(\prod_{i=1}^{m} \varepsilon_i(g)^{\tilde{\nu}_i} \right) \tilde{u}(g)$$

où $\tilde{u}$ est le prolongement par 0 en dehors de HP de la fonction u sur HP définie par

$$u(hman) = \langle \delta'(m^{-1})\eta, v \rangle = v(m^{-1}H).$$

On rappelle (cf. Appendice A) que, pour X variété algébrique affine et lisse, $D(X)$ dénote l'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients algébriques.

Lemme 8 *Soit $v \in V_\delta^\infty$ un vecteur C^∞ et $M \cap K$-fini. La fonction C^∞, h, sur $L/L \cap H$, telle que $h(ma) = v(m.M \cap H)$ pour $m \in M$, $a \in A$, engendre un sous $D(\underline{L}/\underline{L} \cap \underline{H})$-module holonome de $C^\infty(L/L \cap H)$.*

Comme v est $M \cap K$-fini et $Z(\mathfrak{l})$-fini, il résulte du lemme 2.1.2 et des propositions 1.5.1 et 3.1.1 de [Gi] que le $D(\underline{L}/\underline{L} \cap \underline{H})$-module engendré par v est holonome. $\square$

Lemme 9 *La fonction u sur HP définie par $u(hman) = \langle \delta'(m^{-1})\eta, v \rangle = v(m^{-1} \cdot H)$ engendre un sous-$D(\underline{H}\underline{P})$-module holonome de $C^\infty(HP)$.*

On applique le lemme A.1 de l'appendice A à $\underline{X} = \underline{H}\underline{P} \approx \underline{H} \underset{\underline{L} \cap \underline{H}}{\times} \underline{L} \times \underline{N}$ et $\underline{Y} = \underline{L}/\underline{L} \cap \underline{H}$ avec $p(hman) = (ma)^{-1}.L \cap H$. On prend pour U l'ouvert HP des points réels de $\underline{X}$, pour V l'ouvert $L/L \cap H$ des points réels de $\underline{Y}$ et pour f on prend la fonction définie par:

$$f(ma.L \cap H) = v(m.M \cap H).$$

Le fait que f satisfait les hypothèses du lemme A.1 résulte du lemme précédent. $\square$

On veut utiliser le théorème A.3 de l'appendice A. On va prendre $\underline{G} = Y_{\mathbb{C}}$, $\underline{H}\underline{P} = X_{\mathbb{C}}$ qui est un ouvert affine de $\underline{G}$ d'après la proposition 2(ii), $\Omega = HP$ qui est une réunion de composantes connexes de $(\underline{H}\underline{P}) \cap G$ d'après la proposition 3(iii). Le polynôme P sera ici ε et les P_i seront les ε_i. Pour cela on doit vérifier la condition A.1. On décrit d'abord les champs de vecteurs algébriques sur $\underline{G}$.

Lemme 10 *Tout champ de vecteurs algébriques sur $\underline{G}$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{O}(\underline{HP})$ (algèbre des fonctions régulières sur $\underline{HP}$) de champs de vecteurs algébriques sur $\underline{HP} \simeq (\underline{H} \underset{\underline{H} \cap \underline{L}}{\times} \underline{L}) \times N$ d'un des types suivants:*

(1) *champ de vecteurs induit par L_X, $X \in \mathfrak{h}$*
(2) *champ de vecteurs induit par R_X, $X \in \mathfrak{m}$*
(3) *champ de vecteurs induit par R_X, $X \in \mathfrak{a}$*
(4) *champ de vecteurs induit par R_X, $X \in \mathfrak{n}$.*

Démonstration. Cela résulte du fait que d'après le corollaire A.1 tout champ de vecteur algébrique sur $\underline{HP}$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{O}(\underline{HP})$ de champs de la forme (1) à (4). Il suffit alors de remarquer que la restriction à $\underline{HP}$ d'un champ de vecteurs algébriques sur $\underline{G}$ est algébrique. □

On se donne $\xi_1, \ldots, \xi_\ell$ une base de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et on veut vérifier la condition A.1.

On se donne $(i_1, \ldots, i_\ell)$ un multiindice. Alors $\xi_1^{i_1}, \ldots, \xi_\ell^{i_\ell}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{O}(\underline{HP})$ d'opérateurs différentiels du type $R_X R_Y R_Z L_U$ où $X \in U(\mathfrak{m})$, $Y \in U(\mathfrak{a})$, $Z \in U(\mathfrak{n})$ et $U \in U(\mathfrak{h})$. Comme R_Y, $Y \in \mathfrak{a}$, R_Z, $Z \in \mathfrak{n}$ et L_U, $U \in \mathfrak{h}$ annulent u, il suffit de voir que pour $f \in \mathcal{O}(\underline{HP})$ et $Y \in U(\mathfrak{m})$, il existe un entier k tel que pour tout $p \in G$ il existe un voisinage V de p dans G et $C > 0$ tel que:

$$\forall x \in V \cap HP, |(f(R_Y u))(x)| \leqq C |\varepsilon(x)|^{-k}.$$

Mais ceci est facile à réaliser. En effet:

$$(R_Y u)(hman) = (L_Y u)(m^{-1} H)$$

et cette fonction est bornée sur $M/M \cap H$ d'après la proposition 1. Par ailleurs, tout élément f de $\mathcal{O}(\underline{HP})$ peut s'écrire $\varepsilon^{-k} f_1$ avec $f_1 \in \mathcal{O}(\underline{G})$ et $k \in \mathbb{N}$. Il est clair que cet entier a les propriétés désirées. □

Proposition 4 *Soit $v \in V_\delta^\infty$ et $M \cap K$-fini.*

(i) *La fonction $v \mapsto F_{v,v}$ définie sur l'ouvert de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ composé des éléments v tels que $\operatorname{Re} v - \rho$ soit strictement dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, se prolonge en une fonction faiblement méromorphe sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tout entier, à valeurs dans $\mathcal{D}'(G)$.*

(ii) *Identifions $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ à $\mathbb{C}^m \times (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})_{\mathbb{C}}^*$ par l'application $v \to (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m, v_0)$ où $v_0 = v_{|\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}}$ et $v - \rho = \sum_{i=1}^{m} \tilde{v}_i \tilde{\delta}_i + v_0$. Soit $a = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbb{C}^m$. Alors il existe un opérateur différentiel algébrique sur $\underline{G}$, R, dépendant polynômialement de $\tilde{v} = (\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_m)$ et une fonction polynômiale b, sur $\mathbb{C}^m$, non identiquement nulle telle que:*

$$R(x, \tilde{v}, D_x) F_{v,v} = b(\tilde{v}) F_{v-a,v}$$

pour tout v en dehors des variétés polaires des 2 membres de l'égalité.

(iii) *Il existe des hyperplans affines $H_1, \ldots, H_j$ tels que la variété des pôles de $F_{v,v}$ soit la réunion des translatés $H_i - ma$ (pour $m \in \mathbb{N}^*$) de ces hyperplans par des multiples entiers positifs de a. Dans les coordonnées choisies l'espace vectoriel sous-jacent à H_i est le produit du complexifié d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^m \subset \mathbb{C}^m$ par $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})_{\mathbb{C}}^*$. Le degré de b borne l'ordre des variétés polaires $H_i - ma$.*

(iv) *Pour $r>0$ notons $\mathscr{B}_r=\{\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \,|\, |\mathrm{Re}\,\tilde{\nu}_1|<r, \ldots, |\mathrm{Re}\,\tilde{\nu}_m|<r\}$. Alors il existe une fonction polynômiale Q_r sur $\mathbb{C}^m$ telle que $\nu\mapsto Q_r(\tilde{\nu}_1, \ldots, \tilde{\nu}_m)\,F_{\nu,v}$ soit faiblement holomorphe sur $\mathscr{B}_r$ à valeurs dans $\mathscr{D}'(G)$.*

Démonstration. L'holomorphie de $F_{\nu,v}$ en fonction de $\nu_0=\nu_{|\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}}$ est évidente. On se ramène alors au cas où $\nu_0=0$ et on quotiente par $\exp(\mathfrak{c}\cap\mathfrak{a})$. Alors la proposition est une simple application du théorème A.3 de l'appendice A dont on a déjà vérifié les hypothèses. □

Soit $X\in\mathfrak{m}$. On va analyser les pôles de $F_{\nu,Xv}$ en fonction de ceux de $F_{\nu,v}$. Pour $\mathrm{Re}(\nu-\rho)$ strictement dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ on a:

$$\begin{aligned} F_{\nu,Xv}(g) &= -\langle \delta'(X)\,\xi_\nu(g), v\rangle \\ &= \tilde{X}\cdot F_{\nu,v}(g) \end{aligned}$$

où $\tilde{X}$ est le champ de vecteurs méromorphe sur $\underline{G}$ qui sur $\underline{H}\underline{P}\approx(\underline{H}\underset{\underline{L}\cap\underline{H}}{\times}\underline{L})\times\underline{N}$ est le champ de vecteurs invariant à gauche sur $\underline{L}$ induit par $X\in\mathfrak{m}\subset\mathfrak{l}$.

Alors pour p entier assez grand $\varepsilon^p\tilde{X}=\left(\prod_{i=1}^m \varepsilon_i^p\right)\tilde{X}$ est un champ de vecteurs régulier sur $\underline{G}$ tout entier. On a alors:

$$\begin{aligned} F_{\nu+pa,X.v} &= \left(\prod_{i=1}^m \varepsilon_i^p\right) F_{\nu,Xv} \\ &= \left(\prod_{i=1}^m \varepsilon_i^p \tilde{X}\right) F_{\nu,v}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que les pôles de $\nu\to F_{\nu+pa,Xv}$ sont au plus ceux de $\nu\to F_{\nu,v}$. Donc $F_{\nu,Xv}$ a ses pôles contenus dans:

$$\bigcup_{\substack{n\geqq -p\\ i\in\{1,\ldots,j\}}} H_i-na$$

et leur multiplicité est bornée par le degré de b. Par récurrence sur l'ordre de $Q\in U(\mathfrak{m})$ on voit que les pôles de $F_{\nu,Qv}$ sont contenus dans:

$$\bigcup_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ i\in\{1,\ldots,j\}}} H_i-na$$

et que la multiplicité de ces variétés polaires est bornée par $d^\circ b$. En utilisant le fait que les vecteurs $(M\cap K)$-finis de V_δ forment un $U(\mathfrak{m})$-module de type fini noté $(V_\delta)_{(M\cap K)}$, on déduit de ce qui précède:

Proposition 5 (i) *Il existe un ensemble fini d'hyperplans affines $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que pour tout vecteur $(M\cap K)$-fini v de V_δ, les pôles de $\nu\mapsto F_{\nu,v}$ sont inclus dans $\bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}}\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(\Delta_i-na)$ et la multiplicité polaire de chacune de ces variétés est bornée par un entier N (indépendant de i, n et v). L'espace vectoriel sous-jacent à chacun des Δ_i est le produit du complexifié d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^m$ par $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})_{\mathbb{C}}^*$.*

(ii) *Pour tout $r>0$ il existe une fonction polynômiale, P_r, sur $\mathbb{C}^m$, produit de fonctions affines, telle que pour tout $v\in(V_\delta)_{(M\cap K)}$, l'application $\nu\mapsto P_r(\tilde{\nu}_1, \dots, \tilde{\nu}_m) F_{\nu,v}$ soit holomorphe sur $\{\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \,|\, |\mathrm{Re}\,\tilde{\nu}_1|<r, \dots, |\mathrm{Re}\,\tilde{\nu}_m|<r\}$.*

3.3 Restriction à K des $F_{\nu,v}$

Lemme 11 (i) *Si $v\in(V_\delta)_{(M\cap K)}$ $\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, la distribution sur G, $F_{\nu,v}$, lorsqu'elle est définie, est propre sous $Z(\mathfrak{g})$ (centre de l'algèbre enveloppante de $U(\mathfrak{g})$) avec «valeur propre» égale au caractère infinitesimal $\chi_{\delta',-\nu}$ de la représentation $I_{\delta',-\nu}$ où δ' est la représentation unitaire contragrédiente de δ.*

(ii) *Lorsque $F_{\nu,v}$ est définie, cette distribution sur G admet une restriction à K notée $\tilde{F}_{\nu,v}$. L'application $\nu\mapsto\tilde{F}_{\nu,v}$ est faiblement méromorphe et admet au pire des pôles là où $F_{\nu,v}$ en a, les multiplicités étant inférieures ou égales à celles pour $F_{\nu,v}$.*

Démonstration. (i) On se fixe $D\in Z(\mathfrak{g})$. Pour ν dans un ouvert de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $F_{\nu,v}$ est de classe C^m, avec m plus grand que l'ordre de D (cf. la condition A.1 vérifiée après le lemme 10). Pour un tel ν, les propriétés de covariance de ξ_ν montrent que:

$$D.F_{\nu,v|HP}=\chi_{\delta',-\nu}(D)\,F_{\nu,v} \quad \text{et}$$
$$D.F_{\nu,v|\overline{HP}^c}=\chi_{\delta',-\nu}(D)\,F_{\nu,v|\overline{HP}^c}=0$$

où $\overline{HP}^c$ est le complémentaire de $\overline{HP}$ dans G.

La continuité de $D.F_{\nu,v}$ montre alors la propriété voulue pour ν dans un ouvert de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. La méromorphie faible de $F_{\nu,v}$ et la dépendance polynomiale en ν de $\chi_{\delta',-\nu}(D)$ permettent d'achever de prouver (i).

Montrons (ii). On note $I^+(\mathfrak{g})$ l'idéal d'augmentation de l'algèbre $I(\mathfrak{g})$ des invariants sous G de l'algèbre symétrique, $S(\mathfrak{g})$, de $\mathfrak{g}$, regardée comme algèbre de fonctions polynômiales sur $\mathfrak{g}^*$. On note $\mathcal{N}$ l'ensemble des zéros de $I^+(\mathfrak{g})$ dans $\mathfrak{g}^*$. On identifie le fibré cotangent de G, T^*G, à $G\times\mathfrak{g}^*$. On se fixe un ensemble de générateurs homogènes $Y_1, \dots, Y_r$ de $I^+(\mathfrak{g})$ et des éléments $P_1, \dots, P_r$ de $Z(\mathfrak{g})$ admettant $Y_1, \dots, Y_r$ respectivement comme symbole principal en tout point g de G (cf. [DHV, démonstration du lemme A.5.1]).

On veut utiliser la proposition B.2. On se place dans l'ouvert V de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ défini par:

$$V=\{\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \,|\, \mathrm{Re}\,\tilde{\nu}_1>1, \dots, \mathrm{Re}\,\tilde{\nu}_m>1\}.$$

On va voir que l'application $V\to C(G)$, $\nu\mapsto F_{\nu,v}$ est continue et même holomorphe pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G.

Pour la continuité, il n'est pas difficile, en suivant les mêmes pas que pour la démonstration du lemme 6, de voir que l'application $(\nu, g)\mapsto F_\nu(g)$ de $V\times G$ dans $\mathbb{C}$ et continue sur $V\times G$. La propriété de continuité de l'application $\nu\mapsto F_\nu$ de V vers $C(G)$ en résulte.

Pour l'holomorphie, on se ramène facilement au cas où $\mathfrak{c}\cap\mathfrak{a}$ est réduit à 0, en passant au quotient par celui-ci, après avoir vérifié la dépendance holomorphe de $F_{\nu,v}$ dans les paramètres qui varient dans $(\mathfrak{c}\cap\mathfrak{a})^*$ et la continuité dans les variables dans $\exp\mathfrak{c}\cap\mathfrak{a}$, ce qui est immédiat. Alors:

$$F_{\nu,v}(g)=\prod_{i=1}^{m}\varepsilon_i(g)^{\tilde{\nu}_i}\,v(m^{-1}M\cap H)$$

si $g = hman$ où $h \in H$, $m \in M$, $a \in A$, $n \in N$ et 0 sinon.

On introduit une fonction, T, à valeurs complexes sur:

$$V \times \{\mu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid |\operatorname{Re} \tilde{\mu}_i| < 1\} \times \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \times G,$$

définie par:

$$\text{si } \lambda \neq 0,\ T(v, \mu, \lambda, g) = \frac{F_{v+\lambda\mu,\, v}(g) - F_{v,\, v}(g)}{\lambda}$$

$$\text{si } \lambda = 0,\ T(v, \mu, 0, g) = \begin{cases} 0 & \text{si } g \notin HP \\ \left(\sum_{i=0}^{m} \tilde{\mu}_i \log \varepsilon_i(g)\right) F_{v,\, v}(g) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de déduire des propriétés des ε_i à la frontière de HP et du fait que v est bornée, que T est continue. Il suffit pour cela d'utiliser la continuité sur:

$$\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 1\} \times \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1\} \times \mathbb{R}^+$$

de l'application H définie par:

$$\begin{array}{ll} \text{si } \lambda \neq 0, & H(s, \lambda, x) = \dfrac{x^{s+\lambda} - x^s}{\lambda} \\ \text{si } \lambda = 0 \text{ et } x \neq 0, & H(s, 0, x) = s(\log x)\, x^{s-1} \\ \text{si } \lambda = 0 \text{ et } x = 0, & H(s, 0, 0) = 0. \end{array}$$

L'holomorphie de $v \mapsto F_{v,v}$, de V dans $C(G)$, en résulte immédiatement.

Comme $P_i F_{v,v} = \chi_{\delta', -v}(P_i) F_{v,v}$ d'après la partie (i) du lemme, on a vérifié les hypothèses pour appliquer la proposition B.2. Celle-ci montre que $v \mapsto F_{v,v}$ est holomorphe de V vers $\mathscr{D}'_\Gamma(G)$ où $\Gamma = G \times (\mathscr{N} - \{0\})$ (identifié à une partie de T^*G). On sait (cf. e.g. [DHV lemme A.5.2]) que $\Gamma \cap T_K^*(G) = \emptyset$. L'application linéaire, $\mathscr{D}'_\Gamma(G) \to \mathscr{D}'(K)$, de restriction des distributions à K, est continue lorsque l'on munit $\mathscr{D}'_\Gamma(G)$ de la topologie rappelée dans l'appendice B.1 et $\mathscr{D}'(K)$ de la topologie faible. L'existence de la restriction à K de $F_{v,v}$, $\tilde{F}_{v,v}$ est donc acquise ainsi que sa dépendance holomorphe (faible) en $v \in V$. Pour obtenir le prolongement méromorphe il suffit d'utiliser l'équation fonctionnelle de $F_{v,v}$ et le lemme B.1 qui montrent que $v \mapsto F_{v,v}$ est méromorphe de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ vers $\mathscr{D}'_\Gamma(G)$. La continuité de l'application de restriction à K des éléments de $\mathscr{D}'_\Gamma(G)$ permet encore de conclure. □

3.4 Formes linéaires invariantes sous $\tilde{\pi}_{\delta,v}^*(H \cap K)$ et annulées par $\tilde{\pi}_{\delta,v}^*(\mathfrak{h})$, sur l'espace $(I_\delta)_{(K)}$ des vecteurs K-finis de I_δ

Soit $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}$. Alors $\varphi \in C^\infty(K, V_\delta)$ et φ est à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de V_δ formé de vecteurs $(M \cap K)$-finis. On écrit la K-finitude de φ:

$$\exists \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in (I_\delta)_{(K)}, \forall k \in K, L_k \varphi = \sum_{i=1}^{n} f_i(k^{-1})\, \varphi_i,$$

où les f_i sont des éléments K-finis de $C^\infty(K)$.

Les relations de covariance à droite sous $M\cap K$ impliquent que $\varphi(e)$ est $M\cap K$-fini sous δ. Il en va de même pour $v_i:=\varphi_i(e)$. Alors:

$$\forall k\in K, \varphi(k)=\sum_{i=1}^{n} f_i(k)\, v_i \quad \text{où} \quad v_i\in(V_\delta)_{(M\cap K)}.$$

Avec les notations de la proposition 5 notons $(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}}$ l'ouvert connexe de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ de complémentaire

$$\bigcup_{i\in\{1,\ldots,k\}} \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (\Delta_i - n a).$$

Sur $(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}}$ les distributions $F_{\nu,v}\in\mathscr{D}'(G)$ sont définies pour tout $v\in(V_\delta)_{(M\cap K)}$ et sont faiblement holomorphes en ν, de même que leurs restrictions à K, $\tilde{F}_{\nu,v}$. On "définit" alors (voir théorème cidessous) une forme linéaire $\tilde{\xi}_\nu$ sur $(I_\delta)_{(K)}$ par:

$$\langle\tilde{\xi}_\nu, \varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle\tilde{F}_{\nu,v_i}, f_i\rangle_{\mathscr{D}'(K),\mathscr{D}(K)}.$$

Théorème 2 (i) *Pour tout $\varphi\in(I_\delta)_{(K)}$, $\langle\tilde{\xi}_\nu, \varphi\rangle=\langle\xi_\nu, \varphi\rangle$ (cf. Lemme 7 pour la définition de ξ_ν) si* $\operatorname{Re}(\nu-\rho)$ *est strictement dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$.*

(ii) *Pour tout $\nu\in(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}}$ et $\varphi\in(I_\delta)_{(K)}$, $\langle\tilde{\xi}_\nu, \varphi\rangle$ ne dépend pas de l'écriture de $L_k\varphi$. De plus, $\tilde{\xi}_\nu$ "définit" une forme linéaire sur $(I_\delta)_{(K)}$ qui est faiblement méromorphe en $\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ (et holomorphe sur $(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}}$).*

(iii) *Pour $\nu\in(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}}$, $\tilde{\xi}_\nu$ est invariante sous $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}^*(H\cap K)$ et annulée par $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}^*(\mathfrak{h})$.*

(iv) *Pour tout $r>0$ il existe une fonction polynômiale P_r sur $\mathbb{C}^m$, produit de fonctions affines telle que l'application:*

$$\nu\mapsto P_r(\tilde{\nu}_1, \ldots, \tilde{\nu}_m)\,\tilde{\xi}_\nu$$

soit faiblement holomorphe sur:

$$\mathscr{B}_r=\{\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid |\operatorname{Re}\tilde{\nu}_1|<r, \ldots, |\operatorname{Re}\tilde{\nu}_m|<r\}$$

(i.e. pour tout $\varphi\in(I_\delta)_{(K)}$,

$$\nu\mapsto P_r(\tilde{\nu}_1, \ldots, \tilde{\nu}_m)\langle\tilde{\xi}_\nu, \varphi\rangle$$

se prolonge en une fonction holomorphe sur l'ouvert $\mathscr{B}_r$).

Démonstration. (i) résulte immédiatement de la définition de $\tilde{\xi}_\nu$ et ξ_ν. Mais d'après le lemme 11, $\langle\tilde{\xi}_\nu, \varphi\rangle$ est holomorphe sur $(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}}$ (pour une écriture de $L_k\varphi$). Comme sur un ouvert de $(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}}$, $\langle\tilde{\xi}_\nu, \varphi\rangle$ ne dépend pas de l'écriture de $L_k\varphi$ (et est égal à $\langle\xi_\nu, \varphi\rangle$), le prolongement analytique des identitiés permet de conclure à l'indépendance de $\langle\tilde{\xi}_\nu, \varphi\rangle$ par rapport à l'écriture de $L_k\varphi$, sur l'ouvert connexe $(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}}$.

Ceci achève de prouver (ii).

Montrons (iii). Pour $\operatorname{Re}(\nu-\rho)$ strictement dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, il est clair que F_{ν,v_i} est une fonction continue sur G et $H\cap K$-invariante. D'où l'égalité pour $h\in H\cap K$ $\langle\tilde{\xi}_\nu, \varphi\rangle=\langle\tilde{\xi}_\nu, \pi_{\delta,\nu}(h)\varphi\rangle$. On obtient l'invariance voulue de $\tilde{\xi}_\nu$ sous $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}^*(h)$ par prolongement méromorphe des égalités (les 2 membres de l'égalité étant méromorphes en ν car $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(h)\varphi$ ne dépend pas de ν).

On se fixe maintenant $X\in\mathfrak{h}$. Ecrivons $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(X)\varphi=\sum_{j=1}^{r} p_j(\nu)\,\omega_j$ où $\omega_j\in(I_\delta)_{(K)}$ et les p_j sont des polynômes en $\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ (cf. [D, proposition 2]). On a alors:

$$\langle\bar{\xi}_\nu,\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(X)\varphi\rangle=\sum_{j=1}^{r} p_j(\nu)\langle\bar{\xi}_\nu,\omega_j\rangle.$$

Ce qui prouve que $\langle\bar{\xi}_\nu,\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(X)\varphi\rangle$ est méromorphe. Il suffit alors, pour achever de prouver (iii), de démontrer que cette fonction est nulle sur un ouvert. Mais pour $\operatorname{Re}(\nu-\rho)$ strictement dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$ on a:

$$\langle\bar{\xi}_\nu,\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(X)\varphi\rangle=\langle\xi_\nu,\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(X)\varphi\rangle$$

et d'après le lemme 6(iii), le second membre est nul, ce qui achève de prouver (iii).

La partie (iv) du théorème résulte des propiétés des $F_{\nu,v}$ et $\tilde{F}_{\nu,v}$ (prop. 5 et lemme 11) et de la définition de $\bar{\xi}_\nu$. □

Remarque. $\bar{\xi}_\nu$, pour $\nu\in(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\mathrm{hol}}$, se prolonge à la complétion à croissance modérée de $(\tilde{\pi}_{\delta,\nu},(I_\delta)_{(K)})$ (qui s'identifie à $(\tilde{\pi}_{\delta,\nu},I_\delta)$ d'après [C]), en une forme linéaire continue, invariante sous $\tilde{\pi}'_{\delta,\nu}(H)$, d'après le théorème 1. Ce prolongement sera noté $\bar{\xi}_\nu$. Nous n'avons pas été capables de prouver la méromorphie faible de $\bar{\xi}_\nu$, ce qui nous contraindra dans la suite à utiliser l'appendice C, qui est une version à paramètres de l'appendice A de [BD].

3.5 Prolongement méromorphe des «intégrales d'Eisenstein»

On se fixe $\varphi\in(I_\delta)_{(K)}$. On appellera, de manière quelque peu incorrecte, intégrale d'Eisenstein, la fonction $G\to\mathbb{C}$ définie par:

$$g\mapsto\langle\tilde{\pi}'_{\delta,\nu}(g)\,\bar{\xi}_\nu,\varphi\rangle=E_{\nu,\varphi}(g)$$

pour $\operatorname{Re}(\nu-\rho)$ strictement dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{a})$. On veut démontrer que cette fonction s'étend méromorphiquement en $\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. On peut définir de la même manière $E_{\nu,\varphi}(g)$ pour $\nu\in(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\mathrm{hol}}$. Ce que l'on sait, relativement à la méromorphie de $E_{\nu,\varphi}$ en ν, est que pour tout $D\in U(\mathfrak{g})$, $(L_D(E_{\nu,\varphi}))(e)$ est méromorphe car égal à:

$$\langle\bar{\xi}_\nu,\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(D)\varphi\rangle=\langle\bar{\xi}_\nu,\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(D)\varphi\rangle,$$

puisque $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(D)$ est K-fini.

Par ailleurs, les $E_{\nu,\varphi}$ sont propres sous l'action du centre de l'algèbre enveloppante pour des valeurs propres dépendant polynômialement de ν et de plus K-finies, d'un type donné. Elles admettent une série de Taylor dépendant méromorphiquement d'un paramètre. Tout ceci conduit à espérer la méromorphie des $E_{\nu,\varphi}(g)$ en ν. C'est ce que nous allons prouver maintenant. On notera:

$$X=\{H\in(\mathfrak{a}_\emptyset)_{\mathbb{C}}\mid -\pi\langle\operatorname{Im}\alpha(H)<\pi,\forall\alpha\in\Delta^+\}$$
$$X^*=\{H\in H\mid\alpha(H)\neq 0,\forall\alpha\in\Delta_{\sigma\theta}\}$$

où $\Delta_{\sigma\theta}$ est l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans $(\mathfrak{k}\cap\mathfrak{h})\oplus(\mathfrak{p}\cap\mathfrak{q})$.

On note $Y=\bigcup_{\alpha\in\Delta_{\sigma\theta}} \ker\alpha$.

Théorème 3 *Soit* $\varphi\in(I_\delta)_{(K)}$.

(i) *Soit* $\nu\in(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}}$. *La fonction sur* G/H, *notée* $E_{\nu,\varphi}$, *définie par*:

$$E_{\nu,\varphi}(gH)=\langle\tilde{\pi}'_{\delta,\nu}(g)\,\bar{\xi}_\nu,\varphi\rangle$$

(*où* ξ_ν *est définie dans la remarque suivant le théorème* 2) *est analytique et* K*-finie à gauche.*

(ii) *On considère la fonction* $\mathscr{E}_{\nu,\varphi}$ *de* G/H *dans* $C^\infty(K)$ *définie par*:

$$(\mathscr{E}_{\nu,\varphi})(gH)(k)=E_{\nu,\varphi}(kgH).$$

Cette fonction est μ*-sphérique où* μ *est la restriction de la représentation régulière droite de* K *dans* $C^\infty(K)$ *au plus petit sous-espace fermé,* E, *stable par* K, *contenant l'image de* $\mathscr{E}_{\nu,\varphi}$ (*qui est de dimension finie, car* $E_{\nu,\varphi}$ *est* K*-finie puisque* φ *l'est*). *On note* $\mathscr{E}^{\mathfrak{a}_\emptyset}_{\nu,\varphi}$ *la fonction sur* $\mathfrak{a}_\emptyset$ *définie par*:

$$\forall Z\in\mathfrak{a}_\emptyset,\ \mathscr{E}^{\mathfrak{a}_\emptyset}_{\nu,\varphi}(Z)=\mathscr{E}_{\nu,\varphi}((\exp Z)H).$$

Cette fonction s'étend en une fonction holomorphe sur X *qu'on note de la même façon.*

(iii) *Soit* U *un ouvert borné de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. *Il existe un polynôme* P_U *sur* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ (*dont la valeur en* $\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *ne dépend que de* $(\tilde{\nu}_1,\ldots,\tilde{\nu}_m)$) *produit de fonctions affines et indépendant de* $\varphi\in(I_\delta)_{(K)}$ *tel que l'application*

$$(\bar{U}\cap(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}})\times X\to E$$

définie par

$$(\nu,Z)\mapsto\mathscr{E}^{\mathfrak{a}_\emptyset}_{\nu,\varphi}(Z)\times P_U(\nu)$$

se prolonge en une fonction continue sur $\bar{U}\times X$ *et holomorphe sur* $U\times X$.

(iv) *Pour tout* $g\in G$, *l'application* $(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*)_{\text{hol}}\to\mathbb{C}$ *définie par* $\nu\mapsto E_{\nu,\varphi}(g)$ *est méromorphe sur* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *et a au pire les pôles de la fonction méromorphe* $\nu\mapsto\bar{\xi}_\nu$, *avec des multiplicitiés inférieures ou égales à celles de* $\bar{\xi}_\nu$.

Démonstration. La partie (i) a déjà été vue plus haut sauf l'analyticité qui résulte de la K-finitude de φ et du fait que le centre de $U(\mathfrak{g})$ agit par des scalaires sous $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}$.

Les propriétés de $\mathscr{E}_{\nu,\varphi}$ sont claires.

Pour établir les propriétés des points (ii) et (iii) de $\mathscr{E}^{\mathfrak{a}_\emptyset}_{\nu,\varphi}$ on va utiliser l'appendice C. On considère pour cela U un ouvert borné de $\mathfrak{A}_{\mathbb{C}}^*$. Son adhérence $\bar{U}$ est contenue dans une bande $\mathscr{B}_r$ (cf. Théorème 2) et on prend pour P_U le polynôme P_r. Alors pour tout D element de $U(\mathfrak{g})$ et tout k element de K la fonction

$$\nu\mapsto P_U(\nu)\langle\bar{\xi}_\nu,\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(D)\,\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(k^{-1})\varphi\rangle$$

est holomorphe sur U et continue sur $\bar{U}$.

On définit $\Phi^U_\nu\in\hat{\mathscr{O}}_0(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}},E)$ (une série formelle à l'origine de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, à valeurs dans E) par:

$$\forall D\in S(\mathfrak{g}),\ \forall k\in K,\ (\Phi^U_\nu(D))(k)=P_U(\nu)\langle\bar{\xi}_\nu,\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(\beta(D^t))\,\tilde{\pi}_{\delta,\nu}(k)\varphi\rangle$$

où ^{t} est l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{g})$ et β l'isomorphisme linéaire canonique entre $S(\mathfrak{g})$ et $U(\mathfrak{g})$ (cf. [Di, ch. 2 § 4]).

Pour $D \in S(\mathfrak{g})$ fixé, l'application $\bar{U} \ni \nu \mapsto \Phi_\nu(D) (\in E)$ est continue sur $\bar{U}$ et holomorphe sur U. On considère l'injection $i: (\mathfrak{a}_\emptyset)_{\mathbb{C}} \to \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et i^* l'application correspondante de $\hat{\mathscr{O}}_0(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, E)$ das $\hat{\mathscr{O}}_0((\mathfrak{a}_\emptyset)_{\mathbb{C}}, E)$.

L'application $\nu \mapsto i^* \Phi_\nu^U$ définit un élément Φ de $\hat{\mathscr{O}}_0(\mathfrak{a}_\emptyset, E \otimes \mathrm{Hol}\, \bar{U})$ auquel on veut appliquer le théorème C.1. de l'appendice C.

On note $Z_+(\mathfrak{g})$ l'idéal d'augmentation du centre $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$. On prend ici $V = (\mathfrak{a}_\emptyset)_{\mathbb{C}}$, $F = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$; X, X^* et Y, E ont été définis plus haut.

On considère $\mathscr{A} = \{\Gamma_\mu(D^t) \mid D \in Z_+(\mathfrak{g})$ et $S(D) \neq 0\}$ (Voir [BD lemme 1] pour la définition de Γ_μ et [l.c. § 2.5] pour la définition de S).

Remarque. Noter que dans [BD, § 2.7] la définition de $\mathscr{A}$ doit être $\mathscr{A} = \{\Gamma_\mu(D^t) \mid D \in I$ et $S(D) \neq 0\}$ et non $\mathscr{A} = \{\Gamma_\mu(D^t) \mid D \in I\}$.

L'application $\chi: \mathscr{A} \times \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ est définie comme suit. Si $Z \in Z(\mathfrak{g})$, $\pi_{\delta,\nu}(Z)$ est scalaire. Alors si $\Gamma_\mu(D^t) \in \mathscr{A}$ (i.e. $D \in Z(\mathfrak{g})_+$ et $S(D) \neq 0$) on pose $\chi(\Gamma_\mu(D^t), \nu)$ égal à ce scalaire. On vérifie comme dans [BD (lemmes 2 à 7)] que les hypothèses du théorème C.1 sont vérifiées pour Φ. Les propriétés (ii) et (iii) de $\mathscr{E}_{\nu,\varphi}^{\mathfrak{a}_0}$ en résultent immédiatement.

Mais comme $K(\exp \mathfrak{a}_\emptyset) H = G$ la connaissance de $\mathscr{E}_{\nu,\varphi}^{\mathfrak{a}_0}$ déterrmine celle de $E_{\nu,\varphi}$ et (iv) résulte alors du point (iii) et du choix fait de P_U. $\square$

4 Applications aux intégrales d'entrelacement

On considère dans cette partie un groupe algébrique réductif, défini sur $\mathbb{R}$, Zariski-connexe et l'on note G_1 le groupe de ses points réels. On prend $G = G_1 \times G_1$, σ, l'involution de G définie par $\sigma(x, y) = (y, x)$. Le groupe des points fixes H de σ est la diagonale dans $G_1 \times G_1$. Si θ_1 est une involution de Cartan de G_1, on définit $\theta(x, y) = (\theta_1(x), \theta_1(y))$. C'est une involution de Cartan de G commutant à σ dont le groupe des points fixes K est égal à $K_1 \times K_1$, où K_1 est le groupe des points fixes de θ_1. Soit P_1 un sous-groupe parabolique de G_1. Alors $P = P_1 \times \theta_1(P_1)$ est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G.

Soit $P_1 = M_1 A_1 N_1$ la décomposition de Langlands de P_1. On note $A = \{(a, a^{-1}) \mid a \in A_1\}$ et $A_{\mathrm{diag}} = \{(a, a) \mid a \in A_1\}$. La σ décomposition de Langlands de P est alors $P = MAN$ où $N = N_1 \times \theta_1(N_1)$ et $M = (M_1 \times M_1) A_{\mathrm{diag}}$.

On suppose P_1 cuspidal. Soit (δ_1, V_{δ_1}) une série discrète de M_1 et $(\delta_1', V_{\delta_1}')$ sa contragrédiente. Alors la représentation de M triviale sur A_{diag} et dont la restriction à $M_1 \times M_1$ est égale à

$$(\delta_1 \otimes \delta_1', V_{\delta_1} \overset{h}{\bigotimes} V_{\delta_1}')$$

(où le produit tensoriel est hilbertien) est une série discrète de $M/M \cap H$ qu'on notera (δ, V_δ). On définit une forme linéaire η_δ sur l'espace $(V_\delta)_{(M \cap K)}$ des vecteurs $(M \cap K)$-finis de V_δ (qui est isomorphe à $(V_{\delta_1})_{(M_1 \cap K_1)} \otimes (V_{\delta_1}')_{(M_1 \cap K_1)}$ par:

$$\eta_\delta(v \otimes v') = \langle v, v' \rangle_{V_{\delta_1}, V_{\delta_1}'}.$$

Cette forme linéaire est invariante par $M \cap H$ et annulée par $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}$.

D'après le théorème 1, η_δ se prolonge donc en une forme linéaire continue sur V_δ^∞ invariante par $M \cap H$, qu'on notera de la même façon.

On se donne $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ avec $\mathrm{Re}(\nu - \rho_P)$ strictement dominant pour $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ (ensemble des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$).

On définit $\nu_1 \in \mathfrak{a}_{1\mathbb{C}}^*$ par: $\forall X \in \mathfrak{a}_1$, $\nu_1(X) = \frac{1}{2}\nu(X, -X)$. Notons que ν_1 détermine ν. Soit:

$$(\pi_{\delta_1,\nu_1}^{P_1}, I_{\delta_1,\nu_1}^{P_1})\,(\text{resp.}\,(\pi_{\delta_1',-\nu_1}^{\theta_1(P_1)}, I_{\delta_1',-\nu_1}^{\theta_1(P_1)})).$$

la représentation induite au sens C^∞ de P_1 (resp. $\theta_1(P_1)$) à G_1 de la représentation de P_1, $\delta_1 \otimes e^{\nu_1} \otimes 1_{N_1}$, (resp. $\theta_1(P_1)$, $\delta_1' \otimes e^{-\nu_1} \otimes 1_{\theta_1(N_1)}$).

De même, on note $(\pi_{\delta,\nu}^P, I_{\delta,\nu}^P)$ la série principale généralisée de G correspondant à (P, δ, ν) (cf. § 3). Notant par un indice inférieur les espaces de vecteurs K-finis (resp. K_1-finis), on a un isomorphisme naturel:

$$(I_{\delta,\nu}^P)_{(K)} \simeq (I_{\delta_1,\nu_1}^{P_1})_{(K_1)} \otimes (I_{\delta_1',-\nu_1}^{\theta_1(P_1)})_{(K_1)}.$$

On considère la réalisation «compacte» de $\pi_{\delta,\nu}^P$, dans I_δ (cf. § 3.1), la représentation étant notée $\tilde{\pi}_{\delta,\nu}^P$. On fait de même pour $\pi_{\delta_1,\nu_1}^{P_1}$ et $\pi_{\delta_1',-\nu_1}^{\theta_1(P_1)}$.

Si $\varphi \in I_{\delta_1}$ on note φ_{ν_1} l'élément de $I_{\delta_1,\nu_1}^{P_1}$ dont la restriction à K_1 est égale à φ.

Si $\psi \in I_{\delta_1'}$ on note $\psi_{-\nu_1}^{\mathrm{opp}}$ l'élément de $I_{\delta_1',-\nu_1}^{\theta_1(P_1)}$ dont la restriction à K_1 est égale à ψ. Avec ν comme ci-dessus, on dipose de $\xi_\nu \in (I_\delta)'$ qui est invariante par l'action de H sous la représentation contragrédiente de $\tilde{\pi}_{\sigma,\nu}^P$ (cf. lemme 7).

Soit $\varphi \in (I_{\delta_1})_{(K_1)}$. On définit $(B(\nu_1)(\varphi))$, élément K_1-fini du dual de $I_{\delta_1'}$, par:

$$\forall \psi \in I_{\delta_1'}, \quad \langle (B(\nu_1)(\varphi)), \psi \rangle = \xi_\nu(\varphi \otimes \psi).$$

La K_1-finitude de $(B(\nu_1)(\varphi))$ provient de la H-invariance de ξ_ν. Cette K_1-finitude assure que $(B(\nu_1)(\varphi))$ est continue sur $I_{\delta_1'}$. On a donc $(B(\nu_1)(\varphi)) \in (I_{\delta_1'})'_{(K_1)}$.

Mais $(I_{\delta_1'})'_{(K_1)}$ est naturellement isomorphe à $(I_{\delta_1})_{(K_1)}$ grâce à la forme bilinéaire sur $I_{\delta_1} \times I_{\delta_1'}$ défine par:

$$(\varphi, \psi) \mapsto \int_{K_1/M_1 \cap K_1} \langle \varphi(k), \psi(k) \rangle_{V_{\delta_1}, V_{\delta_1'}}\, d\dot{k}$$

(qui met en dualité $\tilde{\pi}_{\delta_1',-\nu_1}^{P_1}$ et $\tilde{\pi}_{\delta_1',-\nu_1}^{\theta_1(P_1)}$).

D'où une application $\tilde{B}(\nu_1)$: $(I_{\delta_1})_{(K_1)} \to (I_{\delta_1})_{(K_1)}$.

La méromorphie faible de ξ_ν sur $(I_\delta)_{(K)}$ en ν implique aisément que $\tilde{B}(\nu_1)$ se prolonge méromorphiquement en ν_1.

D'autre part, on dispose des intégrales d'entrelacement

$$I_{\delta_1,\nu_1}^{P_1} \xrightarrow{A(P_1, \theta_1(P_1), \delta_1, \nu_1)} I_{\delta_1,\nu_1}^{\theta_1(P_1)}$$

convergentes pour les valeurs de ν_1 tel que $\mathrm{Re}\, \nu_1$ soit suffisamment dominant relativement aux racines de $\mathfrak{a}_1$ dans $\mathfrak{n}_1$ (cf. [KnSt, théorème 6.6]).

Par transport de structure on en déduit un opèrateur $\tilde{A}(P_1, \theta_1(P_1), \delta_1, \nu_1)$, noté $\tilde{A}(\nu_1)$ en abrégé, de I_{δ_1} vers I_{δ_1} entrelaçant $\tilde{\pi}_{\delta_1',-\nu_1}^{P_1}$ et $\tilde{\pi}_{\delta_1,-\nu_1}^{\theta_1(P_1)}$.

L'ensemble des $\nu_1 \in \mathfrak{a}_{1\mathbb{C}}^*$ tels que $\tilde{B}(\nu_1)$ et $\tilde{A}(\nu_1)$ soient simultanément définis contient un ouvert non vide, Ω. On va montrer que $\tilde{B}(\nu_1)$ est égal à la restriction de $\tilde{A}(\nu_1)$ à $(I_{\delta_1})_{(K_1)}$, pour $\nu_1 \in \Omega$.

Soit $\varphi \in (I_{\delta_1})_{(K_1)}$ et $\psi \in (I_{\delta'_1})_{(K_1)}$. On va calculer $\langle \tilde{B}(\nu_1)\varphi, \psi\rangle_{I_{\delta_1}, I_{\delta'_1}}$ et $\langle \tilde{A}(\nu_1)\varphi, \psi\rangle_{I_{\delta_1}, I_{\delta'_1}}$. D'abord par définition de $\tilde{B}(\nu_1)$:

$$\langle \tilde{B}(\nu_1)\varphi, \psi\rangle = \bar{\xi}_\nu(\varphi \otimes \psi).$$

On utilise maintenant la définition de $\bar{\xi}_\nu$ (cf. lemme 7):

$$\langle \tilde{B}(\nu_1)\varphi, \psi\rangle = \int_{K_1 \times K_1} \langle \xi_\nu(k_1, k_2), (\varphi \otimes \psi)(k_1, k_2)\rangle \, dk_1 \, dk_2.$$

On utilise maintenant l'invariance à gauche de ξ_ν sous la diagonale de $K_1 \times K_1$. D'òu:

$$\langle \tilde{B}(\nu_1)\varphi, \psi\rangle = \int_{K_1 \times K_1} \langle \xi_\nu(k_2^{-1} k_1, 1), (\varphi \otimes \psi)(k_1, k_2)\rangle \, dk_1 \, dk_2.$$

On fait le changement de variable $k = k_2^{-1} k_1$:

$$\langle \tilde{B}(\nu_1)\varphi, \psi\rangle = \int_{K_1 \times K_1} \langle \xi_\nu(k, 1), (\varphi \otimes \psi)(k_2 k, k_2)\rangle \, dk \, dk_2.$$

Mais $\xi_\nu(k, 1) = 0$ si $(k, 1) \notin HMAN$. Or, ici, $HMAN = d(G_1)(P_1 \times \theta_1(P_1))$ où $d(G_1)$ est la diagonale de $G_1 \times G_1$. Donc $(k, 1) \in HMAN$ si et seulement si $(k, 1) = (g, g)(p_0, \bar{p}_1)$ où $g \in G_1$, $p_0 \in P_1$, $\bar{p}_1 \in \theta_1(P_1)$. Alors $g = \bar{p}_1^{-1} \in \theta(P_1)$ et $k = v m(k) a(k) n$, où $v \in \bar{N}_1$, $m(k) \in M_1$, $a(k) \in A_1$ et $n \in N_1$ (on voit facilement que, réciproquement si $k \in \bar{N}_1 M_1 A_1 N_1$, $(k, 1) \in HMAN$).

Donc

$$\xi_\nu(k, 1) = a(k)^{\nu_1 - \rho_1} (\delta_1(m(k)^{-1}) \otimes \mathrm{id})\, \eta_\delta$$

et

$$\langle \tilde{B}(\nu_1)\varphi, \psi\rangle = \int_{(K_1 \cap \bar{N}_1 M_1 A_1 N_1) \times K_1} a_1(k)^{\nu_1 - \rho_1} \langle \delta_1(m(k))^{-1} \varphi(k_2 k), \psi(k_2)\rangle \, dk \, dk_2.$$

Par suite la formule (3.5) p. 21 de [KnSt] permet de conclure:

$$\forall \varphi \in (I_{\delta_1})_{(K_1)}, \forall \psi \in (I_{\delta'_1})_{K_1}, \langle \tilde{B}(\nu_1)\varphi, \psi\rangle = \langle \tilde{A}(\nu_1)\varphi, \psi\rangle.$$

D'où l'égalité de $\tilde{A}(\nu_1)$ et $\tilde{B}(\nu_1)$ sur $(I_{\delta_1})_{(K_1)}$.

Conclusion

Le prolongement méromorphe de l'intégrale d'entrelacement, au moins sur les vecteurs K_1-finis, résulte alors de la méromorphie de $\tilde{B}(\nu_1)$ en $\nu_1 \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ (due elle-même à la méromorphie faible de $\bar{\xi}_\nu$: voir ci-dessus et théorème 2).

Appendice A

A.1

Les résultats ci-dessous, classiques et bien connus ont été rassemblés ici pour la commodité du lecteur.

Théorème A.1 *Soient X une variété algébrique affine sur un corps k et E un fibré vectoriel algébrique sur X. Soient $(s_1, \ldots, s_m)$ des sections globales de E sur X. Si pour tout $x \in X$ (point fermé i.e. un point au sens classique) les $s_{j,x}$ engendrent la fibre E_x, alors toute section globale de E est de la forme $\sum_{j=1}^{m} f_j s_j$ avec f_j fonction régulière sur X.*

Démonstration. Soit $\mathscr{E}$ le faisceau des germes de sections de E. Soit $\mathcal{O}_X^m \xrightarrow{\varphi} \mathscr{E}$ l'homomorphisme tel que $\varphi(\underline{f}) = \sum_{i=1}^{m} f_j s_j$ où $\mathcal{O}_X$ est le faisceau structural de X. L'hypothèse faite, jointe au lemme de Nakayama, implique que φ induit une surjection sur les fibres (au sens faisceautique) en tout $x \in X$. Donc φ est un homomorphisme surjectif. D'après le thèoréme fondamental de [Se 2] φ induit une surjection sur les sections globales. Donc si $u \in \Gamma(X, E) = \Gamma(X, \mathscr{E})$ on a $u = \varphi(\underline{f})$ i.e. $u = \sum_{i=1}^{m} f_j s_j$ pour un $\underline{f} \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^m) = \mathcal{O}(X) \times \ldots \times \mathcal{O}(X)$. □

Corollaire A.1 *Si $v_1, \ldots, v_m$ sont des champs de vecteurs algébriques sur X tels que pour tout $x \in X$, les $v_{j,x}$ engendrent l'espace tangent $T_{X,x}$, alors tout champ de vecteurs ξ sur X est de la forme $\xi = \sum_{j=1}^{m} f_j v_j$ avec f_j fonction régulière sur X.*

Pour $Y_{\mathbb{C}}$ une variété algébrique complexe lisse, on note $\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}$ le faisceau des germes d'opérateurs différentiels à coefficients algébriques, et $D(Y_{\mathbb{C}}) = \Gamma(Y_{\mathbb{C}}, \mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}})$ l'algèbre de ses sections globales. Rappelons que pour $Y_{\mathbb{C}}$ une variété algébrique complexe *affine* et lisse, le foncteur «sections globales» $\mathscr{M} \mapsto \Gamma(Y_{\mathbb{C}}, \mathscr{M})$ donne une équivalence de catégories entre la catégorie des $\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}$-modules cohérents et celle des $D(Y_{\mathbb{C}})$-modules de type fini, et entre la catégorie des $\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}$-modules holonomes et celle des $D(Y_{\mathbb{C}})$-modules holonomes. Le foncteur quasi-inverse est la «localisation» $M \mapsto \mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}} \otimes_{D(Y_{\mathbb{C}})} M$. Ceci est une conséquence facile de [Se 2].

Lemme A.1 *Soient $X_{\mathbb{C}}$ et $Y_{\mathbb{C}}$ des variétés algébriques affines lisses sur $\mathbb{C}$. Supposons $X_{\mathbb{C}}$ et $Y_{\mathbb{C}}$ définies sur $\mathbb{R}$ et soit $p: X_{\mathbb{C}} \to Y_{\mathbb{C}}$ un morphisme algébrique lisse, lui aussi défini sur $\mathbb{R}$. Soit U (resp. V) un ouvert des points réels de $X_{\mathbb{C}}$ (resp. $Y_{\mathbb{C}}$). Supposons $p(U) \subset V$. Soit f une fonction C^∞ sur V qui engendre un $D(Y_{\mathbb{C}})$-module holonome. Alors $f \circ p$ engendre un sous $D(X_{\mathbb{C}})$-module holonome de $C^\infty(U)$.*

Démonstration. Soit I l'idéal à gauche de $D(Y_{\mathbb{C}})$ qui annule f. Alors le $D(Y_{\mathbb{C}})$-module $D(Y_{\mathbb{C}})/I$ est holonome d'après l'hypothèse sur f. On définit un faisceau $\mathscr{I}$ d'idéaux à gauche du faisceau $\mathscr{D}_{X_{\mathbb{C}}}$ des germes d'opérateurs différentiels sur $X_{\mathbb{C}}$ de la façon suivante. On procède «localement pour la topologie étale sur $Y_{\mathbb{C}}$». Plus précisément, on décrira l'image inverse de $\mathscr{I}$ à $p^{-1}(W)$, pour $W \to Y_{\mathbb{C}}$ un morphisme étale tel que l'on ait un morphisme étale q: $p^{-1}(W) \to W \times \mathbb{A}^k$ compatible aux projections sur W (où $\mathbb{A}^k$ désigne l'espace affine de dimension k). Cette image inverse de $\mathscr{I}$ à $p^{-1}(W)$ est l'idéal à gauche de $\mathscr{D}_{p^{-1}(W)}$ engendré par I vu comme idéal de $D(W) \subset D(W \times \mathbb{A}^k) \subset D(p^{-1}(W))$ et par les champs de vecteurs, $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_k}$ sur $\mathbb{A}^k$ vus comme sections de

$$\mathscr{D}_{\mathbb{A}^k} \subset \mathscr{D}_{W \times \mathbb{A}^k} \subset \mathscr{D}_{p^{-1}(W)}.$$

On vérifie facilement les conditions de recollement nécessaire pour produire un faisceau d'idéaux à gauche $\mathscr{I}$ dans $\mathscr{D}_{X_{\mathbb{C}}}$. Il est clair que $\mathscr{D}_{X_{\mathbb{C}}}/\mathscr{I}$ est holonome, car son inverse par le morphisme étale est l'image inverse du $\mathscr{D}_{W \times \mathbb{A}^k}$-module holonome $(\mathscr{D}_W / I \mathscr{D}_W) \otimes \mathscr{O}_{\mathbb{A}^k}$. Soit $J = \Gamma(X_{\mathbb{C}}, \mathscr{I})$. Comme $X_{\mathbb{C}}$ est affine $D(X_{\mathbb{C}})/J$ est encore holonome. Montrons que J annule $f \circ p$. La question est locale pour la topologie étale. Dans le modèle local $W \times \mathbb{A}^k \to W$ de p cela se réduit au fait que $f \circ p$ est annulé par I et par les $\frac{\partial}{\partial x_i}$ ce qui est évident. $\square$

A.2 Equation de Bernstein-Sato pour $u \cdot P^s$

Soit $Y_{\mathbb{C}}$ une variété algébrique complexe lisse, et soit P une fonction polynômiale non constante sur $Y_{\mathbb{C}}$. Kashiwara [K 1] introduit le faisceau cohérent d'algèbres $\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}[s] = \mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}} \otimes \mathbb{C}[s]$. Ce faisceau d'algèbres opère sur le faisceau $\sum_{j \geq 0} \mathscr{O}_{Y_{\mathbb{C}}}[s] \cdot P^{s-j}$, dont les sections sur un ouvert U sont des sommes finies $\sum_{j \geq 0, k \geq 0} f_{j,k} s^k P^{s-j}$, où $f_{j,k}$ est une fonction régulière sur U, par les règles naturelles: une fonction régulière opère par multiplication sur chaque terme de la somme, s opère via $s \cdot s^k = s^{k+1}$, et un champ de vecteurs ξ à coefficients fonctions régulières opère par:

$$\xi \cdot (f_{j,k} s^k P^{s-j}) = (\xi \cdot f_{j,k}) s^k P^{s-j} + f_{j,k}(s-j) s^k (\xi \cdot P) P^{s-j-1}.$$

Kashiwara [K 1] définit alors $\mathscr{N}_P$ comme le sous-$\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}[s]$-module de $\sum_{j \geq 0} \mathscr{O}_{Y_{\mathbb{C}}}[s] \cdot P^{s-j}$ engendré par P^s.

C'est en fait un $\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}$-module cohérent. Kashiwara prouve dans [K 1] que le $\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}$-module $\mathscr{N}_P$ est *sous-holonome*, c'est-à-dire que sa variété caractéristique est de dimension $\leq n+1$.

De manière plus générale, soit $\mathscr{M}$ un $\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}$-module holonome. Alors $\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{Y_{\mathbb{C}}}} \mathscr{N}_P$ est un $\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}[s]$-module pour l'action «diagonale» des champs de vecteurs. Si u est une section globale de $\mathscr{M}$, on peut considérer le sous-$\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}[s]$-module $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M} \otimes_{\mathscr{O}_{Y_{\mathbb{C}}}} \mathscr{N}_P$ engendré par $u \cdot P^s$.

Théorème A.2 [K 2, théorème 2.5] *Le $\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}$-module $\mathscr{A}$ est sous-holonome. Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, le $\mathscr{D}_{Y_{\mathbb{C}}}$-module $\mathscr{A}_\alpha = \mathscr{A} \otimes_{\mathbb{C}[s]} \mathbb{C}[s]/(s-\alpha)$ est holonome (et même holonome RS si $\mathscr{M}$ l'est). On note $u \cdot P^\alpha$ l'image de $u \cdot P^s$ dans $\mathscr{A}_\alpha$.*

Une remarque s'impose du fait que $\mathscr{A}$ (qui est dénoté $\mathscr{N}$ dans [K 2]) est défini de manière un peu différente dans [K 2, § 2]. La multiplication par le symbole formel P^s identifie le $\mathcal{O}_{Y_{\mathbb{C}}}$-module $\mathcal{A}$ au localisé par rapport à P de $\mathbb{C}[s] \otimes \mathcal{M}$. Pour $Q(s)$ un élément de $\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{C}}}[s]$, on a: $Q(s) \cdot (u \cdot P^s) = 0$ si et seulement si l'élément $P^{-s} Q(s) \cdot (u \cdot P^s)$ de $\mathbb{C}[s] \otimes \mathcal{M}[P^{-1}]$ est annulé par une puissance de P, c'est-à-dire nul.

Observons aussi que l'énoncé «$\mathcal{A}$ est cohérent comme $\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{C}}}$-module» est plus fort que l'énoncé «$\mathcal{A}$ est cohérent comme $\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{C}}}[s]$-module».

On a $\mathcal{A} = \mathcal{D}_{Y_{\mathbb{C}}}[s]/\mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est un faisceau cohérent idéaux à gauche de $\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{C}}}[s]$. Sur tout ouvert affine U de $Y_{\mathbb{C}}$, on peut trouver un nombre fini $(Q_1, \ldots, Q_m)$ de générateurs de $\mathcal{I}$ comme $\mathcal{D}_U$-module; cela signifie que l'homomorphisme de faisceaux $\mathcal{D}_U^m \to \mathcal{I}$, envoyant $(R_1, \ldots, R_m)$ sur $\sum_1^m R_i Q_i$, est surjectif. En effet, $\mathcal{I}$ est quasi-cohérent comme $\mathcal{O}_{Y_{\mathbb{C}}}$-module, donc sa restriction à U est engendrée par ses sections globales. Pour tout point x de U, on peut trouver un voisinage V de x et un nombre fini d'éléments de $\Gamma(U, \mathcal{I})$ qui engendrent le $\mathcal{D}_V$-module $\mathcal{I}_{|V}$. Utilisant la quasi-compacité de U pour la topologie de Zariski, on obtient un nombre fini de sections globales de $\mathcal{I}_{|U}$ qui l'engendrent comme $\mathcal{D}_U$-module. Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $(Q_1(\alpha), \ldots, Q_m(\alpha))$ engendrent un faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_\alpha$ de $\mathcal{D}_U$ qui annule $u \cdot P^\alpha$, et tel que le $\mathcal{D}_U$-module $\mathcal{D}_U/\mathcal{I}_\alpha$ est holonome.

Supposons de plus $Y_{\mathbb{C}}$ affine, et soit D le diviseur d'équation $P=0$, de complémentaire $X_{\mathbb{C}}$. Soit j: $X_{\mathbb{C}} \hookrightarrow Y_{\mathbb{C}}$ l'inclusion. Pour $\mathcal{M}'$ un $\mathcal{D}_{X_{\mathbb{C}}}$-module holonome (resp. holonome RS), le $\mathcal{D}_{Y_{\mathbb{C}}}$-module $\mathcal{M} := j_* \mathcal{M}'$ est holonome (resp. holonome RS) [K2, KK]. Soit u une section globale de $\mathcal{M}'$, qui donne donc aussi une section globale de $\mathcal{M}$.

Lemme A.2 *Supposons que le $\mathcal{D}_{X_{\mathbb{C}}}$-module $\mathcal{M}'$ est holonome (resp. holonome* RS*). Soit I l'idéal de $D(X_{\mathbb{C}})$ qui annule u. Alors $J = I \cap D(Y_{\mathbb{C}})$ est un idéal à gauche de $D(Y_{\mathbb{C}})$ tel que $D(Y_{\mathbb{C}})/J$ est holonome (resp. holonome* RS*).*

Preuve. Par construction, $D(Y_{\mathbb{C}})/J$ est un sous $D(Y_{\mathbb{C}})$-module de $\Gamma(Y_{\mathbb{C}}, j_*(\mathcal{M}))$, qui est holonome (resp. holonome RS). □

Nous nous intéressons à la situation suivante. Nous avons une variété algébrique réelle $Y_{\mathbb{R}}$, telle que $Y_{\mathbb{C}}$ soit la complexifiée de $Y_{\mathbb{R}}$. La fonction polynômiale P est supposée être à valeurs réelles $\geqq 0$ sur $Y_{\mathbb{R}}$. Soit Ω une réunion de composantes connexes de $X_{\mathbb{R}}$, telle que la fonction polynômiale P soit à valeurs réelles >0 sur Ω. Soit u une fonction lisse sur Ω satisfaisant la condition:

Condition A.1 *Il existe des champs de vecteurs réguliers sur $Y_{\mathbb{C}}$, $\xi_1, \ldots, \xi_\ell$, qui engendrent en tout point l'espace tangent, tels que pour tout multi-indice $(i_1, \ldots, i_\ell)$, il existe un entier k tel que, pour tout $p \in Y_{\mathbb{R}}$, il existe un voisinage V de p dans $Y_{\mathbb{R}}$ et une constante $C>0$ tels que*

$$|(\xi^{i_1} \ldots \xi^{i_\ell}) \cdot u(x)| \leqq C \cdot P(x)^{-k}, \qquad \textit{pour tout } x \textit{ dans } V \cap X_{\mathbb{R}}.$$

Remarque. Cette condition a la conséquence suivante. Pour tout entier $m>0$, il existe un entier $k>0$ tel que la fonction $u \cdot P^k$, prolongée par zéro aux autres composantes connexes de $X_{\mathbb{R}}$, est une fonction de classe C^m sur $Y_{\mathbb{R}}$ tout entier.

Proposition A.1 *Supposons que le sous-$D(X_{\mathbb{C}})$-module M de $C^\infty(\Omega)$ engendré par u soit holonome, et que u satisfait la condition A.1. Pour k entier assez grand,* *le sous-$D(Y_{\mathbb{C}})$-module de l'espace $S_0(Y_{\mathbb{R}})$, des courants de degré zéro sur $Y_{\mathbb{R}}$, engendré par $u \cdot P^k$ est holonome.*

Preuve. Nous allons montrer que l'idéal $J_k := \Gamma(Y_{\mathbb{C}}, \mathcal{I}_k)$, qui annule le symbole formel $u \cdot P^k$, annule aussi le courant $u \cdot P^k$. Cela entraînera le résultat, puisque le $D(Y_{\mathbb{C}})$-module $D(Y_{\mathbb{C}})/J_k$ est holonome. Il suffit de montrer que les générateurs $(Q_1(k), \ldots, Q_m(k))$ de J_k annulent la distribution $u \cdot P^k$, si k est assez grand. C'est bien sûr le cas sur Ω, car u y est une fonction lisse; sur les autres composantes connexes de $X_{\mathbb{R}}$, $u \cdot P^k$ est identiquement nulle, donc c'est trivialement vrai. Mais, si m est plus grand que le supremum des ordres des opérateurs différentiels Q_i dépendant polynômialement de s, et si k est choisi de sorte que $P^k \cdot u$ soit de classe C^m sur $Y_{\mathbb{R}}$, il est clair que $Q_j(k)(u \cdot P^k)$ est une fonction continue sur $Y_{\mathbb{R}}$. Comme elle s'annule sur l'ouvert dense $X_{\mathbb{R}}$, elle est donc identiquement nulle. □

Nous allons établir l'existence d'une équation fonctionnelle à la Bernstein à plusieurs variables. Le résultat en question est probablement bien connu des spécialistes. Observons qu'un résultat plus général et beaucoup plus précis que (1) et (2) ci-dessous a été obtenu par Sabbah [Sa]. On se place dans la situation suivante. On suppose que $P = P_1 P_2 \ldots P_n$, où chaque polynôme P_i est à valeurs positives sur Ω. Alors $P_1^{s_1} P_2^{s_2} \ldots P_n^{s_n} \cdot u$ est une fonction de classe C^m sur $Y_{\mathbb{R}}$ tout entier, pour $\mathrm{Re}(s_i) > k$ (avec k assez grand). On note $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_n)$ et $\underline{P}^{\underline{s}} = P_1^{s_1} \ldots P_n^{s_n}$.

Théorème A.3 *Conservons pour la fonction u sur Ω les notations et hypothèses de la Proposition* A.1. *On a alors*:

(1) *La fonction analytique $(s_1, s_2, \ldots s_n) \mapsto P_2^{s_1} \ldots P_n^{s_n} \cdot u$, définie sur l'ouvert* $\mathrm{Re}(s_1) > 0, \ldots, \mathrm{Re}(s_n) > 0$ *de $\mathbb{C}^n$ et à valeurs dans $S_0(Y_{\mathbb{R}})$, se prolonge en une fonction faiblement méromorphe sur $\mathbb{C}^n$ tout entier.*

(2) *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers positifs. Soit $\underline{a} = (a_1, a_2, \ldots a_n)$. Il existe un opérateur différentiel $P(x, D_x, \underline{s})$ sur $Y_{\mathbb{R}}$, à coefficients algébriques dépendant polynômialement de $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_n)$, et une fonction polynômiale $b(\underline{s})$ non identiquement nulle sur $\mathbb{C}^n$, tels que*:

$$P(x, D_x, \underline{s}) \cdot (\underline{P}^{\underline{s}} \cdot u) = b(\underline{s}) \cdot P^{\underline{s} - \underline{a}} \cdot u$$

pour tout $\underline{s} \in \mathbb{C}^n$ en dehors des variétés polaires des deux membres de l'égalité.

(3) *Il existe des hyperplans affines $H_1, \ldots, H_j$ tels que la variété des pôles de $\underline{P}^{\underline{s}} \cdot u$ soit la réunion des translatés $H_i - m \cdot \underline{a}$ de ces hyperplans par des multiples entiers positifs de $\underline{a}$. L'espace vectoriel sous-jacent à H_i est le complexifié d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^n$. L'ordre du pôle de $\underline{P}^{\underline{s}} \cdot u$ le long de toute composante est au plus égal au degré du polynôme $b(\underline{s})$.*

(4) *Pour toute bande $\mathcal{B}_r = \{\underline{s} \in \mathbb{C}^n \colon \|\mathrm{Re}(\underline{s})\| < r\}$, il existe une fonction polynômiale Q_r sur $\mathbb{C}^n$ telle que le produit $Q_r(\underline{s}) \cdot \underline{P}^{\underline{s}} \cdot u$ soit holomorphe sur $\mathcal{B}_r$.*

Preuve. Quitte à remplacer u par $P^k \cdot u$, on peut supposer que u lui-même engendre un sous $D(Y_{\mathbb{C}})$-module holonome de $S_0(Y_{\mathbb{R}})$. On démontrera (2) pour toute section u d'un $D(Y_{\mathbb{C}})$-module holonome $\mathcal{M}$. Le cas $n = 1$ résulte immédiatement du théorème de Kashiwara sur l'existence de la b-fonction. La version algébrique de ce théorème est vraie sur tout corps de caractéristique 0, comme on le voit en utilisant le principe de Lefschetz. Pour établir l'équation fonctionnelle de (2) en général, on prouve le lemme suivant.

Lemme A.3 *Soit Y une variété algébrique affine lisse sur un corps k de caractéristique zéro. Soient Q, $P_1, \ldots, P_\ell$ des fonctions régulières non-constantes sur Y. Soit u un élément d'un $D(Y)$-module holonome M. Alors il existe un opérateur différentiel $P(y, D_y, s, \underline{t})$ sur Y, à coefficients algébriques, dépendant polynômialement de $s \in k$ et de $(t_1, \ldots, t_n)$, et une fonction polynômiale $b(s, \underline{t})$ non identquement nulle sur k^{n+1}, tels que l'on ait:*

$$P(y, D_y, t, \underline{s}) \cdot (Q^s P_1^{t_1} \ldots P_\ell^{t_\ell} \cdot u) = b(s, \underline{t}) \, Q^{s-1} P_1^{t_1} \ldots P_\ell^{t_\ell} \cdot u.$$

Preuve du Lemme A.3 Etendons le corps de base à $K = k(t_1, \ldots, t_\ell)$. On sait alors que $P_1^{t_1} \ldots P_\ell^{t_\ell} \cdot u$ engendre un $D(Y_K)$-module holonome. Cela se voit par récurrence sur ℓ, le cas $\ell = 1$ résultant du théorème 1 plus haut et l'étape de récurrence se démontrant de la même façon. En appliquant le théorème de Kashiwara dans le cas d'un seul polynôme, on obtient une équation fonctionnelle du type voulu, mais avec b un polynôme en s à coefficients dans K, et P un opérateur différentiel sur Y à coefficients dans $K[s]$. Il suffit alors de chasser les dénominateurs en multipliant par une fonction polynômiale de $(t_1, \ldots, t_\ell)$ convenable. □

Pour déduire (2) du lemme A.3, on utilise les polynômes:

$$Q = P_1^{a_1} P^{a_2} \ldots P_n^{\alpha_n}, P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}.$$

Ceci achève la preuve de (2). (1) s'en déduit par la méthode habituelle. On voit aisément en utilisant l'équation fonctionnelle (2) que si $V_1, V_2, \ldots, V_\ell$ sont les composantes de l'hypersurface d'équation $b = 0$, les pôles de $\underline{P}^{\underline{s}} \cdot u$ sont contenus dans la réunion des translatés $V_i - m \cdot \underline{a}$. D'autre part, il est immédiat que si $V_i - m \cdot \underline{a}$ est une composante de la variété polaire de $\underline{P}^{\underline{s}} \cdot u$, il en est de même de $V_i - p \cdot \underline{a}$ pour $p \leqq m$. En effet, si $\underline{P}^{\underline{s}} \cdot u$ était holomorphe au voisinage d'un point général de $V_i - p \cdot a$, il en serait de même de $\underline{P}^{(m-p)\underline{a}} \cdot P^s \cdot u$; mais cela signifierait que $\underline{P}^{\underline{s}} \cdot u$ n'a pas de pôle le long de $H_i - m \cdot \underline{a}$, contrairement à l'hypothèse faite.

Il en résulte que la variété polaire de $\underline{P}^{\underline{s}} \cdot u$ est la réunion des translatés par des multiples entiers non négatifs de $\underline{a}$ d'une famille $(H_1)_{1 \leqq i < \ell}$ d'hypersurfaces de $\mathbb{C}^n$. Il faut maintenant démontrer que chaque H_i est un hyperplan.

Pour ce faire, on observe que les conclusions précédentes restent valables pour tout vecteur $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ à coefficients entiers positifs. Donc la variété polaire en question contient la réunion des translatés $H_i - m \cdot \underline{b}$ pour $m \geqq 0$. Il existe alors une application σ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ dans lui-même (pas forcément une permutation) telle que $H_i - \underline{b} = H_{\sigma(i)} - m(i) \underline{a}$ pour un certain entier $m(i) \geqq 0$ qui dépend de i. Soit $i \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$ et soient $r < s$ deux entiers tels que $\sigma^r(i) = \sigma^s(i)$. On a alors $H_i - r\underline{b} = H_p - u\underline{a}$ et $H_i - s\underline{b} = H_p - v\underline{a}$ pour $p = \sigma^r(i)$ et u et v deux entiers convenables.

Il en découle qu'il existe un vecteur $\underline{c}$ de la forme $\underline{c} = \alpha \cdot \underline{a} + \beta \cdot \underline{b}$, avec α, $\beta \in \mathbb{Z}$ et $\beta \neq 0$, tel que $H_i - \underline{c} = H_i$. Comme $\underline{b}$ était choisi arbitrairement, on en tire aussitôt qu'il existe un sous-groupe discret Γ de $\mathbb{R}^n$ de rang $n-1$ tel que H_i soit stable par toute translation par un vecteur de Γ. Cela implique que H_i est stable par toute translation par un vecteur appartenant à l'adhérence de Zariski de Γ dans $\mathbb{C}^n$, qui est un espace vectoriel de dimension $n-1$. Donc H_i est un hyperplan affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est défini sur $\mathbb{Q}$. Pour estimer l'ordre du pôle de $\underline{P}^{\underline{s}} \cdot u$ le long d'une composante $H_i - m \cdot \underline{a}$ de la variété polaire, on note d'abord que $\underline{P}^{\underline{s}} \cdot u$ est holomorphe le long de $H_i + \underline{a}$. Soit alors $\mu(m)$ l'ordre du pôle le long de $H_i - m \cdot \underline{a}$. On a $\mu(-1) = 0$ par définition. L'équation fonctionnelle de Bernstein (partie(2) du théorème) montre que la différence $\mu(m) - \mu(m-1)$ est majorée par la multiplicité $k(m)$ d'une équation de $H_i - (m-1) \cdot \underline{a}$ dans le polynôme $b(\underline{s})$. On en tire: $\mu(m) \leqq \sum_{j=1}^{m} k(j)$ et cette somme est au plus égale au degré de $b(\underline{s})$, ce qui achève de prouver (3).

Pour (4). Soit E_i l'espace vectoriel sous-jacent à H_i. On choisit f_i forme linéaire définissant E_i telle que f_i soit réelle sur $\mathbb{R}^n$. C'est possible car E_i est le complexifié d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{Q}^n$. Alors la fonction $\mathrm{Re} f_i$ est bornée sur la bande $\mathscr{B}_r$. Donc cette bande ne recontre qu'un nombre fini de translatés, $H_i - ma$. Alors (4) résulte de (3).

Appendice B

B.1

Soit X une variété C^∞ de dimension n, Y une sous-variété fermée. On suppose avoir choisi une mesure de Lebesgue sur X et sur Y de sorte que les fonctions localement intégrables s'identifient à des distributions.

Soit Γ un ensemble conique fermé dans $T^*X - \{(x, 0) \mid x \in X\}$. On note pour u élément de $\mathscr{D}'(X)$, espace vectoriel des distributions sur X, $WF(u)$, le front d'ordre de u (cf. [Hö, vol. I § 8.2]). On suppose que le fibré conormal à Y, $T_Y^* X$ ne recontre pas Γ. Soit:

$$\mathscr{D}'_\Gamma(X) = \{u \in \mathscr{D}'(X) \mid WF(u) \subset \Gamma\}.$$

On munit $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ des semi-normes suivantes:

(α) $p_\varphi(u) = |\langle u, \varphi \rangle|$ pour $\varphi \in C_c^\infty(X)$.

(β) si $\Psi_i: U_i \to V_i \subset X$, $i \in I$ est un ensemble de cartes locales de X fixé (U_i ouvert de $\mathbb{R}^n$), tel que $\bigcup_{i \in I} V_i = X$, on définit pour $i \in I$, $N \in \mathbb{N}^*$, $\Phi \in C_c^\infty(U_i)$ et C cône fermé dans $\mathbb{R}^n$ tel que ${}^t(d\Psi_i^{-1})(\mathrm{Supp}\, \Phi \times C) \cap \Gamma = \emptyset$:

$$p_{i,N,\Phi,C}(u) = \sup_{\xi \in C} \|\xi\|^N |(\Phi u_i)^\wedge(\xi)|$$

où $\| \ \|$ est la norme $\| \ \|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ et u_i est la distribution sur U_i déduite de u par restriction à V_i puis transportée sur U_i grâce à Ψ_i, et $^\wedge$ est la transformée de Fourier des distributions à support compact dans $\mathbb{R}^n$ (pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x \rangle} \varphi(x)\, dx$).

On sait que ces semi-normes sont finies sur les éléments de $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ (cf. [Hö, lemme 8.2.1]). On munit $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ de la topologie définie par ces semi-normes. Alors l'opération de restriction des distributions de X à Y est bien définie pour les éléments de $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ et continue de $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ dans $\mathscr{D}'(Y)$ muni de la topologie faible (cf. [Hö, théorème 8.2.4]).

Lemme B.1 *Avec les notations ci-dessus, soit D un opérateur différentiel sur X à coefficients C^∞. Alors on a:*

(i) *$D\mathscr{D}'_\Gamma(X)\subset\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ et D induit un opérateur linéaire continu sur $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ muni de la topologie définie plus haut.*
(ii) *l'application $\mathscr{D}'_\Gamma(X)\to\mathscr{D}'(Y)$ qui a $u\in\mathscr{D}'_\Gamma(Y)$ associe la restriction à Y de Du est continue de $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ dans $\mathscr{D}'(Y)$.*

Démonstration. D'apres ce qui précède, le seul problème est de prouver (i). Comme pour toute seminorme p définissant la topologie de $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$, $p(u)$ ne dépend que de la restriction de u à un compact, on se ramène facilement au cas où D est somme de produits d'opérateurs différentiels d'ordre 1 ou 0. Il suffit alors de traiter le cas où l'ordre de D est inférieur ou égal à 1.

Il s'agit de majorer $p_\varphi(Du)$ et $p_{i,N,\Phi,C}(Du)$.

D'abord: $p_\varphi(Du)=p_{{}^tD\varphi}(u)$.

D'autre part, pour étudier $p_{i,N,\Phi,C}(Du)$, on peut supposer $U_i=V_i=X$.

Ecrivons $D=f_0+\sum_{j=1}^n f_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ où $f_j\in C^\infty(U_i)$ $j=0,\dots,n$ (dans les coordonnées canoniques de $\mathbb{R}^n$). Alors:

$$p_{i,N,\Phi,C}(Du)\leqq\sum_{j=1}^n\sup_{\xi\in C}\|\xi\|^N\left|\left(\Phi_j\frac{\partial}{\partial x_j}u\right)^\wedge(\xi)\right|+\sup_{\xi\in C}\|\xi\|^N|(\Phi_0u)^\wedge(\xi)|$$

où $\Phi_j=\Phi f_j\in C_c^\infty(U_i)$ pour tout j.

Mais $\Phi_j\frac{\partial}{\partial x_j}u=\frac{\partial}{\partial x_j}(\Phi_ju)-\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_j\right)u$.

D'où

$$\left|\left(\Phi_j\left(\frac{\partial}{\partial x_j}u\right)\right)^\wedge(\xi)\right|\leqq|\xi_j|\,|(\Phi_ju)^\wedge(\xi)|+\left|\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_j\right)u\right)^\wedge(\xi)\right|.$$

Mais $|\xi_j|\leq\|\xi\|$. D'où l'on déduit:

$$p_{i,N,\Phi,C}(Du)\leqq p_{i,N,\Phi_0,C}(u)+\sum_{j=1}^n p_{i,N+1,\Phi_j,C}(u)+p_{i,N,\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_j,C}(u).$$

D'où la continuité voulue. □

B.2 Un sous-espace de $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$

On définit un sous-espace $\mathscr{D}'_{1,\Gamma}(X)$ de $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ comme le sous-espace de $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ formé des éléments u de $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ pour lequel les semi-normes suivantes sont finies:

(α) pour $\varphi\in C_c^\infty(X)$, la seminorme $p_\varphi(u)=|\langle u,\varphi\rangle|$.
(β) pour tout ouvert V de X, tout difféomorphisme $\Psi\colon U\to V$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, tout cône fermé de $\mathbb{R}^n-\{0\}$, C, tout $\Phi\in C_c(U\times S)$ où

$S=\{\xi\in C \mid \|\xi\|=1\}$ telle que Φ admette des dérivées partielles à tout ordre dans la première variable ($x\in U$) et continues sur $U\times S$ et vérifiant

$$^t(d\Psi)^{-1}(pr_1(\operatorname{supp}\Phi)\times C)\cap\Gamma=\emptyset$$

(où $pr_1: U\times S\to U$ est la première projection), on définit pour $N\in\mathbb{N}$:

$$p_{N,\Psi,C,\Phi}(u)=\sup_{\xi\in C}\|\xi\|^N|(\Phi u)^\wedge(\xi)|$$

où

$$(\Phi u)^\wedge(\xi)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}(\Phi(x,\xi/\|\xi\|)\,u_\Psi(x)\,dx$$

où u_Ψ est la distribution sur U déduite de u par transport par Ψ.

A priori on a $\mathscr{D}'_{1,\Gamma}(X)\subset\mathscr{D}'_\Gamma(X)$ et la topologie définie par les semi-normes ci-dessus est plus forte que la topologie induite par celle de $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$. En particulier l'application de restriction sera continue de $\mathscr{D}'_{1,\Gamma}(X)$ vers $\mathscr{D}'(Y)$ (muni de la topologie faible) où Y est comme en B.1.

Proposition B.1 *Supposons donnés des opérateurs différentiels $P_1,\dots,P_r$ sur X à coefficients C^∞ et soit $\Gamma\subset T^*X$ l'ensemble défini par*

$$\Gamma=\{(x,\xi)\in T^*X\mid \xi\neq 0 \text{ et } \sigma_{m_1}(P_1)(x,\xi)=0,\ \dots,\ \sigma_{m_r}(P_r)(x,\xi)=0\}$$

où m_i est l'ordre de P_i supposé >0 et $\sigma_{m_i}(P_i)$ son symbole principal.

Soit $\mathscr{V}$ un espace métrique et soit $u:\mathscr{V}\to C(X)$ une application continue de $\mathscr{V}$ vers $C(X)$ muni de la convergence uniforme sur les compacts de X. On suppose que pour tout $i=1,\dots,r$, il existe un polynôme dépendant de $v\in\mathscr{V}$:

$$R_i(v,Z)=Z^{p_i}+a^i_{p_i-1}(v)\,Z^{p_i-1}+\dots+a^i_0(v),$$

où les a^i_j dépendent continûment de v et $p_i\geqq 1$, tels que pour tout $v\in\mathscr{V}$, $R_i(v,P_i)(u(v))=0$ au sens des distributions sur X. Alors u est à valeurs dans $\mathscr{D}'_{1,\Gamma}(X)$ et est continue de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{D}'_{1,\Gamma}(X)$ muni de la topologie ci-dessus.

Démonstration. Il s'agit de démontrer d'abord que chacune des semi-normes définissant $\mathscr{D}'_{1,\Gamma}(X)$ est finie sur les $u(v)$, puis que, si $v_0\in\mathscr{V}$ est fixé, $\lim_{v\to v_0} p(u(v)-u(v_0))=0$ si p est l'une de ces semi-normes.

Il n'y a pas de problème pour les p_φ.

Pour $p_{0,\Psi,C,\Phi}=p$ on a:

$$\begin{aligned} p(u(v))<+\infty \quad\text{et}\quad p(u(v)-u(v_0)) &=\sup_{\xi\in C}|(\Phi u(v))^\wedge(\xi)-(\Phi u(v_0))^\wedge(\xi)|\\ &\leqq \sup_{K\times C}|\Phi(x,\xi/\|\xi\|)|\times\operatorname{vol}(\Psi^{-1}(K))\\ &\quad\cdot\sup_{x\in K}|u(v)(\Psi(x))-u(v_0)(\Psi(x))| \end{aligned}$$

où K est un compact de $\mathbb{R}^n$ tel que: $\operatorname{Supp}\Phi\subset K\times S$.

La continuité de u implique alors:

$$\lim_{v \to v_0} p_{0,\Psi,C,\Phi}(u(v)-u(v_0))=0.$$

On peut supposer pour la suite de la démonstration que Ψ est fixé et on peut faire comme si $X=V=U$ ce qui permet d'alléger les notations. On abandonnera donc l'indice Ψ dans les notations.

On suppose C et Φ fixés comme en β) ci-dessus. On note $K=pr_1(\operatorname{Supp}\Phi)$ qui est compact. Comme $(K\times S)\cap\Gamma=\emptyset$ on a:

$$\forall x\in K, \forall \xi\in S, \exists i\in\{1,\dots,r\}, \exists V(x)\subset U, \exists W(\xi)\subset S, \exists \varepsilon>0,$$
$$\forall(y,\eta)\in V(x)\times W(\xi), |\sigma_{m_i}(P_i)(y,\eta)|>\varepsilon$$

où $V(x)$ est un voisinage de x dans U et $W(\xi)$ un voisinage de ξ dans C.

Un argument de partition de l'unité permet de majorer $p_{N,C,\Phi}$ par une somme finie de semi-normes du même type, p_{N,C_k,Φ_k}, avec pour tout k:

$$\exists i_k\in\{1,\dots,r\}, \exists\varepsilon>0, \forall\xi\in C_k, \forall x\in pr_1(\operatorname{Supp}\Phi_k),$$
$$\|\xi\|=1 \Rightarrow \sigma_{m_{i_k}}(P_{i_k})(x,\xi)\geqq\varepsilon.$$

On peut par ce biais se ramener au cas d'un opérateur différentiel P $(=P_i$ pour un $i)$ d'un cône C et d'une fonction Φ telle que, notant $K=pr_1(\operatorname{Supp}\Phi)$ et $S=\{\xi\in C \mid \|\xi\|=1\}$, on ait:

$$|\sigma_m(P)(x,\xi)|\neq 0, \forall(x,\xi)\in V(K)\times S$$

où m est l'ordre de P et $V(K)$ un voisinage ouvert de K. On va montrer que $p_{N,C,\Phi}(u(v))$ est fini par récurrence sur N. On l'a déjà vu pour $N=0$. On écrit $R(v,Z)=Z^p+a_{p-1}(v)Z^{p-1}+\dots+a_0(v)$ avec $p>0$ (où $R=R_i$). L'égalité $R(v,P)u(v)=0$ implique:

$$\forall\xi\in C, \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi,x\rangle}\Phi'(x,\xi/\|\xi\|)(R(v,P)(u(v)))(x)\,dx=0$$

où

$$\Phi'(x,\xi)=0 \quad \text{si} \quad (x,\xi)\in(U-K)\times S$$

et

$$\Phi'(x,\xi)=\Phi(x,\xi)(\sigma_m(P)(x,\xi))^{-p} \quad \text{si} \quad (x,\xi)\in K\times S.$$

Notons que Φ' est continue sur $U\times S$ et admet des dérivées partielles à tout ordre dans la première variable x, continues pour les deux variables (x,ξ) sur $U\times S$, ceci d'après les propriétés de Φ et P.

L'intégrale écrite plus haut est à comprendre au sens des distributions. Par définition on a alors (en utilisant la définition de R):

$$0=\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}(i^m\sigma_m(P)(x,\xi))^p\,\Phi'(x,\xi/\|\xi\|)(u(v))(x)\,dx$$
$$+\sum_{k=0}^{p} a_k(v)\sum_{q=0}^{mp-1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle\xi,x\rangle}Q_{k,q}(x,\xi)\,\Phi_{k,q}(x,\xi/\|\xi\|)(u(v))(x)\,dx$$

où l'on a posé $a_p(v) \equiv 1$ et $Q_{k,q}(x, \xi)$ est C^∞ sur $U \times \mathbb{R}^n$ homogène de degré q en ξ. Enfin $\Phi_{k,q}$ est définie sur $U \times S$ et vérifie les mêmes conditions que Φ, avec en outre Supp $\Phi_{k,q} \subset$ Supp Φ. D'où l'inégalité:

$$\|\xi\|^{mp} |(\Phi u(v))^{\wedge}(\xi)| \leqq \sum_{k=0}^{p} |a_k(v)| \sum_{q=0}^{mp-1} \|\xi\|^q |(\Phi'_{k,q} u(v))^{\wedge}(\xi)|$$

où $\Phi'_{k,q}(x, \xi) = Q_{k,q}(x, \xi)\, \Phi_{k,q}(x, \xi)$ (pour $(x, \xi) \in U \times S$) vérifie des propriétés identiques à celle de Φ.

Comme on a déjà tenu compte des semi-normes $p_{0,C,\Phi}$ on peut remplacer dans la définition de $p_{N,C,\Phi}$, $N \geqq 1$, le $\sup_{\xi \in C}$ par $\sup_{\xi \in C, \|\xi\| \geqq 1}$, sans changer la topologie, ce que l'on fera désormais. On voit alors facilement que:

$$\forall N \geqq 1, p_{N,C,\Phi}(u(v)) \leqq \sum_{k=0}^{p} |a_k(v)| \sum_{q=0}^{mp-1} p_{\sup(N+q-mp,0),C,\Phi'_{k,q}}(u(v)).$$

La finitude de $p_{N,C,\Phi}(u(v))$ résulte alors de l'hypothèse de récurrence appliquée aux

$$p_{\sup(N+q-mp,0),C,\Phi'_{k,q}}(u(v)).$$

De la même façon, on obtient:

$$\begin{aligned} p_{N,C,\Phi}(u(v) - u(v_0)) \leqq & \sum_{k=0}^{p-1} (|a_k(v) - a_k(v_0)| \sum_{q=0}^{mp-1} p_{\sup(N+q-mp,0),C,\Phi'_{k,q}}(u(v_0)) \\ & + \sum_{k=0}^{p-1} |a_k(v)| \sum_{q=0}^{mp-1} p_{\sup(N+q-mp,0),C,\Phi'_{k,q}}(u(v) - u(v_0)) \end{aligned}$$

et on en déduit de même par récurrence que:

$$\lim_{v \to v_0} p_{N,C,\Phi}(u(v) - u(v_0)) = 0.$$

La proposition est démontrée. □

Proposition B.2 *On reprend les hypothèses de la proposition* B.1. *On suppose en outre que $\mathscr{V}$ est une variété analytique et les R_i sont de la forme $R_i(v, Z) = Z - \lambda_i(v)$ avec λ_i holomorphe sur $\mathscr{V}$. On suppose u holomorphe de $\mathscr{V}$ vers $C(X)$, muni de la topologie de la convergence uniforme. Alors u est holomorphe de $\mathscr{V}$ vers $\mathscr{D}'_{1,\Gamma}(X)$ et a fortiori vers $\mathscr{D}'_\Gamma(X)$.*

Démonstration. On se ramène à $\mathscr{V}$ ouvert de $\mathbb{C}^k$. Pour $\xi \in \mathbb{C}^k$ la fonction T: $\mathscr{V} \times \mathbb{R} \to C(X)$ définie au voisinage de $\mathscr{V} \times \{0\}$ par:

$$T(v, t) = \frac{u(v + t\xi) - u(v)}{t} \quad \text{pour } t \neq 0$$

$$T(v, 0) = \xi \cdot u(v)$$

est continue dans ce voisinage de 0.

On prend $Q_i(v, t, Z) = (Z - \lambda_i(v))(Z - \lambda_i(v + t\xi))$.

Alors $(Q_i(v,t,P_i))(T(v,t))=0$. D'après la proposition B.1 cela implique que Tset continue à valeurs dans $\mathscr{D}'_{1,\Gamma}(X)$ et que $v\mapsto u(v)$ admet une dérivée partielle continue dans la direction de ξ. En considérant Tcomme fonctions des variables (v,t,ξ) on montre que $u(v)$ est différentiable et de classe C^1. Par ailleurs, d'après l'holomorphie de u de $\mathscr{V}$ dans $C(X)$, on voit que les dérivées partielles de u regardée comme application de $\mathscr{V}$ dans $\mathscr{D}'_{1,\Gamma}(X)$ satisfont Cauchy Riemann, d'où l'holomorphie voulue de u. □

Appendice C

C.1

Soit X un voisinage ouvert connexe de l'origine dans $V=\mathbb{C}^n$ et Y une réunion d'hyperplans, H_s, $s=1,\dots,p$, passant par l'origine. On note $X^*=X-Y$.

Soit F un espace vectoriel de dimension finie et f une fonction holomorphe sur X^*, à valeurs dans F, méromorphe sur X.

On définit alors $\deg f$ comme le plus petit entier $k\in\mathbb{Z}$ tel que pour tout $H\in V-Y$ et $t\in\mathbb{C}$ avec $|t|$ assez petit, $t\to t^k f(tH)$ se prolonge holomorphiquement au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Si f est nulle on pose $\deg f=-\infty$. Notant ℓ_s, $s=1,\dots,p$, une forme linéaire définissant l'hyperplan H_s, on peut écrire:

$$f=\frac{g}{\prod_{s=1}^{p}(\ell_s)^{\nu_s}}$$

où ν_s est l'ordre du pôle de f le long de H_s et g est holomorpne au voisinage de l'origine. Notant r le degré du terme homogène de plus bas degré non nul dans le développement de Taylor de g à l'origine, on a clairement $\deg f=\nu_1+\dots+\nu_p-r$.

On renvoie à [BD, lemme A.1] pour des propriétés élémentaires de $\deg f$.

Théorème C.1 *On conserve les notations précédentes. Soit $\mathscr{A}$ une famille d'opérateurs différentiels holomorphes sur $X^*=X-Y$, d'ordre strictement positif et à valeurs dans* End E, *où E est un espace vectoriel de dimension finie. On suppose que $\mathscr{A}$ vérifie les propriétés suivantes:*

(a) *Si $D\in\mathscr{A}$ est d'ordre M les termes de D d'ordre M sont constants et donc le symbole principal de D s'identifie à un élémen' $\sigma(D)$ de $S^M(V)\otimes$* End E.

(b) *L'idéal à gauche de $S(V)\otimes$* End E, *que l'on notera J, engendré par les $\sigma(D)$, $D\in\mathscr{A}$ est un idéal à gauche gradué de codimension finie.*

(c) *Si $D\in\mathscr{A}$ est d'ordre M, il peut s'écrire comme combinaison linéaire d'opérateurs de la forme $F_m\dfrac{\partial^m}{\partial z^m}$ tels que les F_m soient holomorphes sur X^*, méromorphes sur X et vérifient* $\deg F_m\leqq M-|m|$. *Cette hypothèse est en particulier vérifiée si la somme s_m des ordres le long des variétés polaires H_s de F_m est inférieur ou égal à $M-|m|$ pour tout m.*

Soit M' le plus petit entier tel que $\left(\prod_{s=1}^{p}\ell_s\right)^{M'}D$ soit un opérateur différentiel à coefficients holomorphes zur X que l'on notera $D°$. One se donne en outre un *espace vectoriel complexe F de dimension finie et une application χ: $\mathscr{A} \times F \to \mathbb{C}$, telle que pour tout $D \in \mathscr{A}$ l'application $F \to \mathbb{C}$ définie par $v \in F \mapsto \chi(v, D) \in \mathbb{C}$ soit polynômiale sur F.*

On notera $D_v = D - \chi(v, D)$ qui est un opérateur différentiel de même ordre que D, puisque tout D dans $\mathscr{A}$ est d'ordre strictement positif. En particulier D et D_v ont même symbole principal.

On notera $D_v^\circ = \left(\prod_{s=1}^{p} \ell_s\right)^{M'} D_v$, où $D^\circ = \left(\prod_{s=1}^{p} \ell_s\right)^{M'} D$; D_v° est un opérateur différentiel à coefficients holomorphes sur X.

On se donne U un ouvert connexe relativement compact de F d'adhérence $\bar{U}$. On note $\mathrm{Hol}(\bar{U})$ l'espace des fonctions continues sur $\bar{U}$ et holomorphes sur U muni de la topologie de la convergence uniforme sur $\bar{U}$. On se donne $\varphi \in \hat{\mathcal{O}}_0(V, E \otimes \mathrm{Hol}(\bar{U}))$ et on note pour $v \in \bar{U}$, φ_v l'élément de $\hat{\mathcal{O}}_0(V, E)$ obtenue grâce à l'évaluation en v des éléments de $\mathrm{Hol}\,\bar{U}$. On procède de même pour les éléments de $\mathcal{O}_0(V, E \otimes \mathrm{Hol}(\bar{U}))$. Alors:

(i) *si pour tout $v \in \bar{U}$, φ_v est annulée par les opérateurs D_v°, $D \in \mathscr{A}$, on a $\varphi \in \mathcal{O}_0(V, E \otimes \mathrm{Hol}\,\bar{U})$, c'est à dire qu'il existe $\varepsilon > 0$, et une fonction Φ définie sur la boule ouverte de centre 0 et de rayon $\varepsilon > 0$ dans V, $B(0, \varepsilon)$, à valeurs dans $E \otimes \mathrm{Hol}\,\bar{U}$ et holomorphe telle que:*

$$\forall D \in S(V), \forall v \in \bar{U} \qquad (D\Phi_v)(0) = \varphi_v(D).$$

(ii) *De plus, il existe $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon' < \varepsilon$ tel que Φ regardée comme fonction sur $\overline{B(0, \varepsilon')} \times \bar{U}$ soit dans $\mathrm{Hol}(\overline{B(0, \varepsilon')} \times \bar{U}, E)$.*

(iii) *Si X^* est connexe et si en outre l'application naturelle $\pi_1(B(0, \varepsilon)^*, y_0) \to \pi_1(X^*, y_0)$ (où $B(0, \varepsilon)^* = B(0, \varepsilon) - Y$ et $y_0 \in B(0, \varepsilon)^*$) est un isomorphisme, alors Φ s'étend en une fonction holomorphie sur $X \times U$.*

C.2 Démonstration du théorème C.1

On se fixe une base d'un supplémentaire de J dans $S(V) \otimes \mathrm{End}\, E$, $(U_1, \ldots, U_r)$ formée d'éléments homogènes avec $U_1 = 1 \otimes \mathrm{Id}_E$. La démonstration du lemme suivant est analogue à celle de la démonstration du lemme A.2 de [BD]).

Lemme C.1 *Soit $D \in S(V) \otimes \mathrm{End}\, E$ regardé comme opérateur differentiel à coefficients holomorphes sur X^* et à valeurs dans $\mathrm{End}\, E$. Alors il existe des fonctions $g_i (i = 1, \ldots, r)$, $f_j (j = 1, \ldots, q)$ holomorphes sur X^*, méromorphes sur X à valeurs dans $\mathrm{End}\, E$, il existe des fonctions polynômiales sur F, h_j, k_i et des éléments D_j de $\mathscr{A}$ et Y_j, de $S(V) \otimes \mathrm{End}\, E$ tels que:*

$$\forall v \in F, D = \sum_{j=1}^{q} f_j(h_j(v))\, Y_j(D_j)_v + \sum_{i=1}^{r} g_i(k_i(v))\, U_i$$

avec

$$\deg f_j + d^\circ Y_j + d^\circ D_j \leqq d^\circ D$$

$$\deg g_i + d^\circ U_i \leqq d^\circ D.$$

Pour $H \in V$ on définit $j_H : \mathbb{C} \to V$ par $j_H(t) = tH$. On note j_H^* l'application naturelle correspondante:

$$\hat{\mathcal{O}}_0(V, E \otimes \mathrm{Hol}(\bar{U})) \to \hat{\mathcal{O}}_0(\mathbb{C}, E \otimes \mathrm{Hol}(\bar{U})).$$

On pose, pour $i = 1, \ldots, r$:

$$(\varphi_H)_i = t^{d(i)} j_H^*(U_i \varphi) \quad \text{où} \quad d(i) = d^\circ U_i.$$

On a $(\varphi_H)_i \in \hat{\mathcal{O}}_0(\mathbb{C}, E \otimes \mathrm{Hol}(\bar{U}))$ comme produit de $j_H^*(U_i \varphi)$ et $t^{d(i)}$ regardé comme élément de $\mathcal{O}_0(\mathbb{C})$.

On regarde $\varphi_H = ((\varphi_H)_1, \ldots, (\varphi_H)_r)$ comme un élément de: $\hat{\mathcal{O}}_0(\mathbb{C}, E \otimes \mathrm{Hol}(\bar{U}) \otimes \mathbb{C}^r)$.

Lemme C.2 *Pour $H \in X^*$, $v \in \bar{U}$ et $t \in \mathbb{C}$ on a:*

$$t \frac{d}{dt} (\varphi_H)_v = \left(\sum_{i=1}^{m} P_i(v)\, A_i(H, t) \right) (\varphi_H)_v$$

où les P_i sont des fonctions polynômiales sur F et $A_i(H, t) \in \mathrm{End}\, E \otimes \mathbb{C}^r$ est holomorphe au voisinage de tout point $(H, 0)$ (où H décrit X^*), comme fonction de (H, t).

Pour $H \in X^*$, $t \in \mathbb{C}$, $v \in F$ on notera:

$$A(H, t, v) = \sum_{i=1}^{m} P_i(v)\, A_i(H, t)$$

qui est élément de $\mathrm{End}(E \otimes \mathbb{C}^r)$.

Démonstration. La démonstration de ce lemme est analogue à celle du lemme A.3 de [BD] (en utilisant le lemme (C.1).

Démonstration du théorème C.1 Le point (i) se démontre de la même façon que le point (i) du théorème A.1 de [BD] en recourant à l'espace de Banach

$$B = C(\bar{\Omega} \times \bar{U}, E \otimes \mathbb{C}^r) \text{ (au lieu de } C(\bar{\Omega}, E \otimes \mathbb{C}^r)).$$

Pour voir (ii): si ε' est assez petit, on voit, par la démonstration de la partie (i), que la série de Taylor de φ, à coefficients dans $E \otimes \mathrm{Hol}(\bar{U})$, est normalement convergente sur $\overline{B(0, \varepsilon')}$. Il s'agit alors d'une série de fonctions holomorphes sur $B(0, \varepsilon') \times U$ et continues sur $\overline{B(0, \varepsilon')} \times \bar{U}$ qui converge uniformément. La somme Φ est donc holomorphe sur $B(0, \varepsilon') \times U$ et continue sur $\overline{B(0, \varepsilon')} \times \bar{U}$. Ceci achève de prouver (ii).

Pour prouver (iii) on procède comme dans [BD, p. 307]. Pour cela il faut étendre le théorème A.1.2 de [CM] au cas des équations différentielles pour des fonctions à valeurs dans des Banach, ce qui se fait sans problème en utilisant la méthode de [CL] ch. 1 section 8 (on remplace le W de dimension finie de [CM] par un Banach et $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W)$ par les endomorphismes linéaires continus avec la norme usuelle). On a aussi besoin d'une généralisation du lemme A.1.8 [CM] pour des fonctions holomorphes à valeurs dans un Banach. Mais il suffit d'utiliser que pour une variété complexe X, $\mathrm{Hol}(X)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X est un Fréchet nucléaire et que pour un Banach B, $\mathrm{Hol}(X) \hat{\otimes} B$ est isomorphe à $\mathrm{Hol}(X, B)$ muni de la convergence uniforme sur les compacts de X (cf. [Gr, ch. II § 3 n° 3]). On réduit alors le théorème souhaité pour les fonctions à valeurs dans B aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, pour lequel le résultat est connu. Ceci achève la preuve du théorème C.1. □

Remerciements. Le premier auteur remercie Joseph Johnson pour d'utiles discussions et Michel Duflo pour une remarque éclairante.

Le second auteur remercie vivement Toshio Oshima pour la suggestion qui est la base de ce travail. Il remercie également Erik van den Ban, Jacques Carmona, Mogens Flensted-Jensen et Henrik Schlichtkrull pour d'utiles remarques pendant l'élaboration de ce travail.

Nous remercions le referee pour d'utiles remarques.

Références

[B1] van den Ban, E.: Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to reductive symmetric spaces. Proc. K. Ned. Akad. Wet. **90**, 225 249 (1987)

[B2] van den Ban, E.: The principal series for a reductive symmetric space I, H-fixed distribution vectors. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. **21**, 359 412 (1988)

[BD] van den Ban, E., Delorme, P.: Quelques propriétés des représentations sphériques pour les espaces symétriques réductifs. J. Funct. Anal. **80**, 284–307 (1988)

[Bo] Borel, A.: Linear algebraic groups. New-York Amsterdam: Benjamin 1969

[Bou] Bourbaki, N.: Espaces vectoriels topologiques, Ch. 3 à 5. Eléments de Mathématiques XVIII. Paris: Hermann 1967

[Bou2] Bourbaki, N.: Variétés différentiables et analytiques, Fasc. de résultats § 1 à 7, Eléments de Mathématiques XXXIII. Paris: Hermann 1967

[C] Casselman, W.: Canonical extensions of Harish Chandra modules to representations of G. (Preprint)

[CM] Casselman, W., Milicič, D.: Asmptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations. Duke Math. J., **49**, 869 930 (1982)

[CL] Coddington, E., Levinson, N.: Theory of ordinary differential equations. Mac Graw Hill, New York, Toronto, Londres, 1955

[D] Delorme, P.: Homomorphismes de Harish Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées des groupes de Lie réductifs connexes. Ann. Sc. Ec. Norm. Super. **17**, 117–156 (1984)

[Di] Dixmier, J.: Algèbres enveloppantes. Paris: Gauthier-Villars 1974

[DHV] Duflo, M., Heckman, G., Vergne, M.: Projection d'orbites, formule de Kirillov et formule de Blattner, Mém. Soc. Math. Fr., II. Ser. **15**, 65 128

[FOS] Flensted-Jensen, M., Oshima, T., Schlichtkrull, H.: Boundedness of certain unitarizable Harish-Chandra modules. In: Representations of Lie groups, Kyoto, Hiroshima 1986 (Adv. Stud. Pure Math., vol. 14, pp. 651–660). Amsterdam: North-Holland and Tokyo: Kinokuniya 1988

[Gi] Ginsburg, V.: Admissible modules on a symmetric space. Astérisque **173–174**, 199–255 (1989)

[Gr] Grothendieck, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. Mem. Am. Math. Soc. **16** (1955)

[HC1] Harish-Chandra: Spherical functions on semisimple Lie groups I. Am. J. Math. **80**, 241–310 (1958)

[HC2] Harish-Chandra: Harmonic analysis on real reductive groups I. J. Funct. Anal. **19**, 104–204 (1975)

[He] Helgason, S.: Groups and geometric analysis, in Integral geometry, invariant differential operators and spherical functions. New York London: Academic Press 1984

[Hö] Hörmander, L.: The analysis of linear partial differential equations I. (Grundl. Math. Wiss., vol. 256) Berlin Heidelberg New York: Springer 1983

[K1] Kashiwara, M.: b-functions and holonomic systems. Invent. Math. **38**, 33–58 (1976)

[K2] Kashiwara, M.: On the maximally overdetermined systems of linear differential equations. Invent. Math. **49**, 121–135 (1978)

[KK] Kashiwara, M., Kawai, T.: On the holonomic systems with regular singularities III. Publ. Res. Inst. Math. Sci. **17**, 813–979 (1981)

[KnSt] Knapp, A.W., Stein, E.M.: Intertwining operators for semisimple Lie groups II. Invent. Math. **60**, 9–84 (1980)

[Ma] Matsuki, T.: The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups. J. Math. Soc. Japan **31**, 331–357 (1979)

[Mu] Mumford, D., Fogarty, J.: Geometric Invariant Theory, 2ème éd. (Ergeb. Math., vol. 34) Berlin Heidelberg New York: Springer 1982

[Ol1] Olafsson, G.: Die Langlands-parameter für die Flensted-Jensensche fundamentale Reihe. Math. Scand. **55**, 229–244 (1984)

[Ol2] Olafsson, G.: Fourier and Poisson transformation associated to a semisimple symmetric space. Invent. Math. **90**, 605–629 (1987)

[OM] Oshima, T., Matsuki, T.: A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, In: Advanced Studies in Pure Math., vol., 4 pp. 331–390 (1984)

[OS] Oshima, T., Sekiguchi, J.: Eigenspaces of invariant differential operators on an affine symmetric space. Invent. Math. **57**, 1–81 (1980)

[Sa] Sabbah, C.: Modules d'Alexander et $\mathcal{D}$-modules. Duke Math. J. **60**, 729–814 (1990)

[Sc] Schwartz, L.: Théorie des distributions. Paris: Hermann 1966

[Se1] Serre, J.P.: Cohomologie galoisienne. (Lect. Notes Math., vol. 5) Berlin Heidelberg New York: Springer 1965

[Se2] Serre, J.P.: Faisceaux algébriques cohérents. Ann. Math. **61**, 197–278 (1955)

[Sp] Springer, T.A.: Galois cohomology of linear algebraic groups. In: Algebraic groups and Discontinuous subgroups. (Proc. Symp. Pure Math., vol. 9, pp. 149–158) Providence, RI: Am. Math. Soc. 1966

[W1] Wallach, N.: Harmonic analysis on homogeneous spaces. New York: Marcel Dekker 1973

[W2] Wallach, N.: Real reductive groups I. New York London: Academic Press 1988