JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **136**, 422–509 (1996)
ARTICLE NO. 0035

Intégrales d'Eisenstein pour les espaces symétriques réductifs: Tempérance, majorations. Petite matrice B

PATRICK DELORME

Département de mathématiques Informatique, Géométrie Non Commutative, Groupe de Lie, UPR 9016 du CNRS 163, Avenue de Luminy, Case 901, 13288 Marseille Cedex 09, France

Received July 22, 1994; revised December 10, 1994

À MA SŒUR

Sharp majorations for the meromorphic continuation of Eisenstein integrals for reductive symmetric spaces are proved. Using a technique due to E. P. van den Ban, the problem reduces to prove temperedness when the parameter is pure imaginary. Starting with a result for "good" parameters, established by using a result of Flensted-Jensen, Oshima, and Schlichtkrull (1985) one gets temperedness by a repeated use of translations functors: for discrete series (cf. Vogan (1988)), for generalized principal series and for the Poisson transform. A key role is played by Oshima's (1988) criterion for temperedness. The existence of a small B-matrix is also proved.

0. INTRODUCTION

Soit G un groupe de Lie réductif dans la classe d'Harish-Chandra, σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant à σ, K le groupe des points fixes de θ, H un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de σ. On note $\mathfrak{g}$ (resp. $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, etc...) l'algèbre de Lie de G (resp. H, K, etc...) et $\mathfrak{q}$ (resp. $\mathfrak{s}$) le sous-espace propre de la différentielle de σ (resp. θ), notée encore σ (resp. θ), pour la valeur propre -1. Soit P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G et $P = MAN$ sa σ-décomposition de Langlands (A est en général plus petit et M plus gros que dans la décomposition de Langlands de P; on a $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$). Alors M est invariant par σ. Soit (δ, V_δ) une représentation unitaire de M de longueur finie non réduite à $\{0\}$, contenue dans $L^2(M/M \cap H, d\dot{m})$ et telle que l'espace des vecteurs C^∞ de V_δ, V_δ^∞, soit égal à un sous-espace pour de l'algèbre des opérateurs différentiels sur $M/M \cap H$ invariants à gauche pour M, $\mathbb{D}(M/M \cap H)$. Toute série discrète de $L^2(M/M \cap H, d\dot{m})$ est contenue dans une somme finie de tels espaces (cf. [3]).

0022-1236/96 $18.00

On note η la forme linéaire sur V_δ^∞ donnée par l'évaluation en $e(M \cap H)$ où e est l'élément neutre. C'est un élément de l'espace des vecteurs distributions de V_δ, $V_\delta^{-\infty}$ (dual de l'espace des vecteurs C^∞).

Pour $\nu \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$, on dispose de la série principale généralisée C^∞, $(\pi_{\delta,\nu}^P, I_{\delta,\nu}^P)$ et de sa réalisation compacte $(\bar{\pi}_{\delta,\nu}^P, I_\delta)$. Ici $I_{\delta,\nu}^P = \{\varphi: G \to V_\delta^\infty, \varphi$ est C^∞ et $\forall (g, m, a, n) \in G \times M \times A \times N, \varphi(gman) = a^{-\nu-\rho_P} \delta(m^{-1}) \varphi(g)\}$ où, pour $X \in \mathfrak{a}$, $\rho_P(X) = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, X)_{|\mathfrak{n}}$ et G agit sur $I_{\delta,\nu}^P$ par translation à gauche. L'espace I_δ est donné par restriction des fonctions à K. L'action de G est donnée par transport de structure. On a construit dans des travaux antérieures ([12, 14]) une famille méromorphe de vecteurs distributions pour $(\bar{\pi}_{\delta,\nu}^P, I_\delta)$, $\bar{j}(P, \delta, \nu, \eta)$ qui est caractérisée comme suit:

On note $j(P, \delta, \nu, \eta)$ l'élément de $(I_{\delta,\nu}^P)^{-\infty}$ correspondant à $\bar{j}(P, \delta, \nu, \eta)$. Alors, pour $\mathrm{Re}(\nu - \rho_P)$ strictement dominant par rapport aux poids de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}$, $j(P, \delta, \nu, \eta)$ est une fonction continue de G dans $V_\delta^{-\infty}$ nulle en dehors de $\overline{HP}$, H-invariante à gauche et valant η en e. Ici on a utilisé une identification de $(I_{\delta,\nu}^P)^{-\infty}$ avec un espace de distributions.

On peut alors définir ce que nous appelons les "intégrales d'Eisenstein". (Voir [5], § 3 et 4 pour le lien avec les intégrales d'Eisenstein dans le cas des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables minimaux.) Plus précisément, si φ est un élément de l'espace $(I_\delta)_{(K)}$ des vecteurs K-finis de I_δ, on introduit, lorsque $j(P, \delta, \nu, \eta)$ est défini, une fonction C^∞ sur G/H, $E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)$ par:

$$\forall g \in G, (E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi))(gH) = \langle \bar{j}(P, \delta, \nu, \eta), \bar{\pi}_{\delta,\nu}^P(g^{-1})\, \varphi \rangle.$$

Ce sont des fonctions propres sous l'action de l'algèbre des opérateurs différentiels sur G/H invariants à gauche par G, $\mathbb{D}(G/H)$ (proposition 3).

Pour de telles fonctions, on a une notion de tempérance qui peut être décrite en terme de croissance de la fonction et de ses dérivées par les éléments de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $U(\mathfrak{g})$.

Le théorème principal (théorème 1, § 3.5) de la première partie est essentiellement le suivant:

Soit $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ tel que $j(P, \delta, \nu, \eta)$ soit défini. Alors les "intégrales d'Eisenstein", $E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)$, $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}$, sont tempérées.

Nous allons donner une idée du plan de la démonstration.

Soit $\mathfrak{b}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{q}$. D'après l'isomorphisme d'Harish-Chandra, le caractère de $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ par lequel cette algèbre opère sur V_δ^∞ est repéré par $\Lambda_\delta \in \mathfrak{b}_\mathbb{C}^*$ (ou plutôt par une orbite de Λ_δ sous un groupe de Weyl). Utilisant le fait que les "intégrales d'Eisenstein" sont bornées si $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ (car $\pi_{\delta,\nu}^P$ est alors unitaire et on peut utiliser un résultat de Flensted Jensen, Oshima, Schlichtkrull (cf [21])) et les propriétés des exposants directeurs dans les développements convergents des fonctions sur G/H, K-finies et propres sous $\mathbb{D}(G/H)$, on montre que lorsque le paramètre

Λ_δ est "bon" (cf. définition 4) le théorème est vrai (lemme 7). Une propriété importante est que pour $n \in \mathbb{N}^*$, assez grand, $n\Lambda_\delta$ est "bon" même si Λ_δ ne l'est pas (lemme 6). On montre également aisément que l'on peut se ramener au cas où G est semi-simple et connexe et H est connexe (lemme 5) ce que l'on suppose dans la suite.

La stratégie est alors claire: on va utiliser de façon répétée (trois fois) les foncteurs de translation (produit tensoriel par une représentation de dimension finie suivi de la projection le long d'un caractère infinitésimal).

On prouve d'abord (§ 5, proposition 8) que pour tout $(\delta, V_\delta, \eta, \Lambda_\delta)$ comme ci-dessus il existe

$$(\tilde{\delta}, V_{\tilde{\delta}}, \tilde{\eta}, \Lambda_{\tilde{\delta}}) \text{ vérifiant les mêmes propriétés} \tag{0.1}$$

une représentation de dimension finie (π, F) de G, dont la contragrédiente possède un vecteur non nul invariant par H, e_H^*, (0.2)

tels que, en notant F_1 le M-module des invariants de F sous N, on ait:

$$\Lambda_{\tilde{\delta}} \text{ est bon} \tag{0.3}$$

$p(V_{\tilde{\delta}}^\infty \otimes F_1) \simeq V_\delta^\infty$ comme M-modules, où p est le projecteur selon le caractère infinitésimal de δ. (0.4)

$\eta_{\tilde{\delta}} \otimes e^*_{M,H|p(V_{\tilde{\delta}}^\infty \otimes F_1)}$ se transporte (comme forme linéaire sur $p(V_{\tilde{\delta}}^\infty \otimes F_1)$) en η_δ dans l'isomorphisme si-dessus. (0.5)

Ici $e^*_{M,H}$ désigne la restriction de e_H^* à F_1. Ceci résulte des travaux d'Oshima et Matsuki sur les séries discrètes et d'un résultat de Vogan ([40]) sur le comportement des séries discrètes par certains foncteurs de translation. Il faut toutefois détailler les arguments de ce dernier pour obtenir (0.5). Nous le remercions de nous avoir adressé une lettre précieuse à ce sujet. En outre de pénibles contorsions sont dues à la non connexité éventuelle de M et $M \cap H$.

Soit ν_1 la forme linéaire sur $\mathfrak{a}$ qui décrit l'action de $\mathfrak{a}$ sur F_1. Soit $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tels que $j(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta})$ et $j(P, \delta, \nu + \nu_1, \eta)$ soient définis. On note:

$$V(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta}) = \{E(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta}, \varphi) \mid \varphi \in (I_{\tilde{\delta}})_{(K)}\}.$$

On définit de même $V(P, \delta, \nu + \nu_1, \eta)$. Ce sont des sous-espaces de $C^\infty(G/H)$, propres sous l'action de $\mathbb{D}(G/H)$. On note $\tilde{F}$ le sous-espace vectoriel de $C^\infty(G/H)$ engendré par les coefficients de $g \mapsto \langle e_H^*, \pi(g^{-1})\, v \rangle$ où v décrit F. On note $V(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta}) \cdot \tilde{F}$ l'espace vectoriel engendré par les produits d'un élément de $V(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta})$ par un élément de $\tilde{F}$. On montre alors (§ 4, propositions 4, 5 et 6), que pour ν "générique" dans $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$q(V(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta}) \cdot \tilde{F}) = V(P, \delta, \nu + \nu_1, \eta) \tag{0.6}$$

où q est le projecteur selon le caractère infinitésimal de $\pi^P_{\delta, \nu+\nu_1}$. Pour cela, on étudie l'effet du foncteur de translation associé à (π, F) et q sur $I^P_{\delta, \nu}$ et $j(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta})$. Ceci généralise certains résultats de [14].

On utilise ensuite un critère d'Oshima caractérisant la tempérance d'une fonction C^∞ sur G/H, K-finie et propre sous l'action de G/H, par une propriété de support d'une valeur au bord de l'image de f, f^d, par la correspondance de Flensted-Jensen. Appliqué aux $E(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta}, \varphi)$ pour $\varphi \in (I_{\tilde{\delta}}(K)$ et ν générique dans $i\mathfrak{a}^*$ ($\Lambda_{\tilde{\delta}}$ est bon), ce critère implique une propriété de support qui s'étend par prolongement analytique à ν générique dans $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. (§ 6, propositions 9 et 10).

On étudie alors le comportement de la transformation de Poisson et de la valeur au bord par certains foncteurs de translation. L'étude est similaire à celle faite pour les séries principales généralisées (§ 4) tout en utilisant un lemme de Vogan (cf. [40], lemme 4.8).

On voit alors que les propriétés de support sont préservées par le foncteur de translation utilisé, essentiellement grâce au fait que le projecteur selon un caractère infinitésimal est donné par un élément du centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$. Alors grâce à l'égalité (0.6) on obtient une condition de support qui permet d'appliquer la partie réciproque du critère de tempérance d'Oshima et d'achever la preuve du théorème (§ 7).

A partir de maintenant on suppose seulement que δ est unitaire irréductible.

Soit $\mathcal{W}$ un ensemble de représentants dans K des (H, P) doubles classes ouvertes contenant l'élément neutre. Pour $w \in \mathcal{W}$, on note $\mathcal{V}(\delta, w) = (V_\delta^{-\infty})^{M \cap w^{-1}Hw}$. La définition de $j(P, \delta, \nu, \eta)$ s'étend à $\eta \in \mathcal{V}(\delta)$: $\prod_{w \in \mathcal{W}} \mathcal{V}(\delta, w)$ (qui est de dimension finite cf. [3]). Soient P_1, P_2 deux sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G de σ-décomposition de Langlands $P_i = MAN_i$, $i = 1, 2$. On note $\nu \mapsto A(P_1, P_2, \delta, \nu)$ le prolongement méromorphe des intégrales d'entrelacements entre $I^{P_2}_{\delta, \nu}$ et $I^{P_1}_{\delta, \nu}$. D'après [14], proposition 4, il existe une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathcal{V}(\delta))$, $\nu \mapsto B(P_2, P_1, \delta, \nu)$, dite matrice B, telle que: $j(P_1, \delta, \nu, \eta) \circ A(P_1, P_2, \delta, \nu) = j(P_2, \delta, \nu, B(P_2, P_1, \delta, \nu)$ (identité de fonctions méromorphes). On dit que $\eta \in \mathcal{V}(\delta, w)$ est de carré intégrable si et seulement si, pour tout $v \in (V_\delta^\infty)_{(M \cap K)}$ la fonction sur $M/M \cap w^{-1}Hw$, définie par $m \mapsto \langle \delta'(m)\, \eta, v \rangle$ est de carré intégrable. On note $\mathcal{V}(\delta, w)_{\mathrm{disc}} = \{\eta \in \mathcal{V}(\delta, w) \mid \eta$ est de carré intégrable$\}$ et $\mathcal{V}(\delta)_{\mathrm{disc}} = \prod_{w \in \mathcal{W}} \mathcal{V}(\delta, w)_{\mathrm{disc}}$.

On montre au théorème 2 que les matrices B préservent $\mathcal{V}(\delta)_{\mathrm{disc}}$. Donnons une esquisse de la démonstration. On définit, de façon analogue à $\mathcal{V}(\delta)_{\mathrm{disc}}$, $\mathcal{V}(\delta)_{\mathrm{temp}}$ en remplaçant de carré intégrable par tempéré. On montre d'abord que l'on peut se réduire au cas où $P_1 = P, P_2 = \bar{P}$. Ici $\bar{P} := \theta(P)$. Ensuite on prouve un lemme analogue au lemme classique de Langlands (qui lie les propriétés asymptotiques des coefficients des séries principales généralisées aux intégrales d'entrelacement). Le lemme est également la généralisation d'un théorème d'Olafsson ([30], théorème 6.2). On utilise ensuite une propriété (importante dans tout l'article) d'holomorphie des coefficients des développements asymptotiques des familles holomorphes de fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-propres sur G/H (cf. [5], théorème 12.9, voir aussi le travail d'E. P. van den Ban et H. Schlichtkrull [7]). Cette propriété est rappelée au lemme 2. Ceci joint à ce qui précède nous permet de montrer que si $\eta \in \mathscr{V}(\delta)_{\text{disc}}$, $\xi_\nu := B(\bar{P}, P, \delta, \nu)\,\eta$ est un élément de $\mathscr{V}(\delta)_{\text{temp}}$. On montre, par des arguments de généricité, que si $\eta \in \mathscr{V}(\delta, w)$ est $\mathbb{D}(M/M \cap w^{-1}Hw)$-propre les différentes composantes de ξ_ν dans les $\mathscr{V}(\delta, x)$, $x \in \mathscr{W}$, possèdent une propriété similaire pour des valeurs propres indépendantes de ν.

On établit d'autre part la propriété suivante. Soit F une fonction C^∞ sur G/H, K-finie, $\mathbb{D}(G/H)$-propre et tempérée. On suppose en outre que le paramètre d'Harish-Chandra, qui repère le caractère par lequel $\mathbb{D}(G/H)$ agit sur F, est “réel et régulier” (cf. lemme 15 pour des définitions précises). Alors, si G/H admet des séries discrètes, F est de carré intégrable.

Ceci appliqué à $M/M \cap w^{-1}Hw$, joint aux propriétés des séries discrètes de $M/M \cap w^{-1}Hw$ et à ce qui précède, permet de conclure.

Enfin, on obtient au théorème 4 des majorations des intégrales d'Eisenstein. Pour cela, on établit (théorème 3) un analogue d'un théorème d'E. P. van den Ban (cf. [5], théorème 18.3) avec une légère modification de la preuve.

Grossièrement, ce théorème permet, pour une famille holomorphe F de fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-propres sur G/H définie sur une bande $\mathfrak{a}^*_\varepsilon = \{\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \mid \|\mathrm{Re}\,\nu\| < \varepsilon\}$, satisfaisant des conditions de croissance modérée uniformément sur cette bande, et telle que F_ν soit tempérée pour $\nu \in i\mathfrak{a}^*$, d'améliorer considérablement les majorations uniformes.

Le théorème 1 et des majorations uniformes grossières (propositions 2 et 3) permettent d'utiliser le théorème 3 et d'obtenir les majorations voulues.

Les majorations ainsi obtenues jointes à un travail de J. Carmona [14] sur le terme constant des fonctions tempérées, devraient permettre de former les paquets d'onde dans l'espace de Schwartz $\mathscr{C}(G/H)$ défini par E. P. van den Ban: ([5], § 17; pour les paquets d'ondes dans le cas des séries principales minimales voir [8]).

Les résultats de cet article (théorèmes 1, 2, 3) dans le cas des groupes sont dus à Harish-Chandra. Dans ce cas, les intégrales d'Eisenstein, qui diffèrent des nôtres par une normalisation, sont données par des intégrales convergentes et les majorations résultent des propriétés des fonctions Ξ (cf. [23] lemme 17.1).

1. Notations. Propriété de continuité automatique

1.1.

Si E est en ensemble on notera Id_E (ou parfois Id) l'application identique de E. Si E est un espace vectoriel, on note E^* son dual algébrique; si E est réel on note $E_{\mathbb{C}}$ son complexifié et $S(E)$ l'algèbre symétrique de $E_{\mathbb{C}}$. De plus, pour $v \in E_{\mathbb{C}}$, on notera $\mathrm{Re}\, v$ et $\mathrm{Im}\, v$ les éléments de E tels que $v = \mathrm{Re}\, v + i\, \mathrm{Im}\, v$.

Si E et F sont des espaces vectoriels topologiques, on désigne par $\mathscr{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F, par E' le dual topologique de E, par ${}^t u$ (ou parfois u') la transposée d'une application linéaire continue, u, de E dans F.

Étant donnés une variété X, dénombrable à l'infini et de classe C^∞, un espace de Fréchet E, on note $\mathscr{D}(X, E)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact de X dans E que l'on munit de la topologie usuelle. On note $\mathscr{D}'(X, E)$ son dual topologique que l'on munit de la topologie forte de dual.

Si u est une application linéaire continue de E dans F (où E et F sont deux espaces de Fréchet), la composition des fonctions avec u détermine une application linéaire continue de $\mathscr{D}(X, E)$ dans $\mathscr{D}(X, F)$ notée encore u.

Si S est un groupe de Lie réel, e ou e_S désignera son élément neutre, S^0 désignera sa composante neutre, $Z(S)$ son centre, $\mathfrak{s}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{z}(\mathfrak{s})$ le centre de $\mathfrak{s}$, $U(\mathfrak{s})$ l'algèbre enveloppante de la complexifiée $\mathfrak{s}_{\mathbb{C}}$, $X \mapsto X^t$ l'antiautomorphisme principal de $U(\mathfrak{s})$, $Z(\mathfrak{s})$ le centre de $U(\mathfrak{s})$. Le dual unitaire de S sera noté $\hat{S}$.

Si S est compact, $\mu \in \hat{S}$ et (π, E) une représentation continue de S dans un espace vectoriel localement convexe séparé, on notera E^μ sa composante isotypique de type μ et $E_{(S)}$ l'espace des vecteurs S-finis.

On choisit une mesure de Haar à gauche, ds, sur S (de masse totale 1 si S est compact), ce qui permet d'identifier, pour E espace de Fréchet, $C^\infty(S, E')$ à un sous-espace de $\mathscr{D}'(S, E)$. On note $s \mapsto L_s$ (resp. $s \mapsto R_s$) la représentation régulière gauche (resp. droite) sur $C^\infty(S, E)$ et $X \mapsto L_X$ (resp. $X \mapsto R_X$) la représentation de $U(\mathfrak{s})$ obtenue par différentiation. Si T est un sous-groupe fermé de S, on notera $d\dot{s}$ une mesure invariante par les translations à gauche par S sur S/T, lorsqu'il en existe une.

Si (π, E) est une représentation de S dans E, on notera π^* la représentation contragédiente de S dans E^* et E^S le sous-espace des éléments invariants sous $\pi(S)$. Si de plus E est un espace vectoriel topologique et si, pour tout s dans S, $\pi(s)$ est continu on notera $s \mapsto \pi'(s) := {}^t\pi(s^{-1})$ la représentation contragédiente de π dans le dual topologique E' de E.

Si (π, E) est une représentation de S dans un espace vectoriel localement convexe séparé (e.l.c.s), on dira que π est continue si l'application $(s, v) \mapsto \pi(s)\, v$ est continue de $S \times E$ dans E. Si (π, E) est continue et E est un espace de Fréchet et de Montel, π' est continue lorsque l'on munit E' de sa topologie forte de dual (cf. [37], proposition 34.5 et [43], § 4.1.2).

Si (π, E) est continue et E complet, on notera E^{∞} l'espace des vecteurs différentiables (ou C^{∞}) de (π, E), espace que l'on munira de sa topologie naturelle et sur lequel S agit par une représentation continue notée encore π, ainsi que la représentation de $\mathfrak{s}$ obtenue par différentiation. On dit qu'une représentation (π, E) est différentiable ou C^{∞} si E est égal à E^{∞} muni de sa topologue canonique. On remarque que (π, E^{∞}) est différentiable (pour ce qui précède cf. e.g. [43], § 4.4.1). On note $(\pi', E^{-\infty})$ la représentation contragédiente de (π, E^{∞}). Les éléments de $E^{-\infty}$ sont les vecteurs distributions de (π, E).

On dira qu'une suite exacte de morphismes continus de S-modules dans des e.l.c.s.: $0 \to E_1 \xrightarrow{u_1} E_2 \xrightarrow{u_2} E_3 \to 0$ est forte si elle est topologiquement scindée c'est-à-dire s'il existe une section linéaire continue de u_2.

On établit sans difficulté que, si (π, E) est une représentation continue de S dans un e.l.c.s. complet et (ρ, F) une représentation de dimension finie de S, on a:

$$(E \otimes F)^{\infty} = E^{\infty} \otimes F. \tag{1.1.1}$$

Pour cela, il suffit de remarquer que si $v \in (E \otimes F)^{\infty}$, l'application $s \mapsto (\pi(s) \otimes \mathrm{Id})\, v$ est C^{∞} car égale à $s \mapsto (\mathrm{Id} \otimes \rho(s)^{-1})((\pi \otimes \rho)(s))\, v$.

1.2.

Soit G un groupe réductif dans la classe d'Harish-Chandra (cf. [22], § 3 ou [38], part. II, § 1-1) i.e. tel que:

(α) $\mathfrak{g}$ est réductive,

(β) G/G^0 est fini,

(γ) $\mathrm{Ad}(G)$ est contenu dans le sous-groupe analytique de $GL(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ d'algèbre de Lie $\mathrm{ad}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ où Ad (resp. ad) est la représentation adjointe de G (resp. $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$) dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, (1.2.1)

(δ) le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_1 := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, noté G_1, est de centre fini.

Alors G_1 est fermé dans G (cf. [38], part II, § 1.2, proposition 8). On se fixe (cf. [38], part II, § 1.3) une involution de Cartan de G, θ, et on note K le sous-groupe des points fixes de θ. On note $\mathfrak{s}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ formé des éléments anti-invariants par θ et $\mathfrak{z}$ le centre de $\mathfrak{g}$. On note $\mathfrak{c} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{s}$ et $C = \exp \mathfrak{c}$.

On notera ${}^0G$ l'intersection des noyaux des homomorphismes continus de G dans $\mathbb{R}^{+*}$. On a (cf. [38], Part II, § 1.3, théorèmes 12, 13, 14):

$$\begin{aligned} &G = {}^0GC \text{ et } {}^0G \cap C = \{e\}, \\ &G = K \exp \mathfrak{s} \text{ (décomposition de Cartan)} \\ &G_1 = K_1 \exp \mathfrak{s}_1 \text{ où } K_1 = K \cap G_1, \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{g}_1 \\ &{}^0G = KG_1. \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

On fixe une forme bilinéaire symétrique B sur $\mathfrak{g}$ invariante sous Ad G et θ, telle que la forme quadratique $\|X\|^2 = -B(X, \theta(X))$ soit positive définie sur $\mathfrak{g}$. On munit G d'une fonction notée encore $\| \ \|$ définie par:

$$\begin{aligned} &\forall X \in \mathfrak{s}_1, \|\exp X\| \text{ est égal à la norme de l'opérateur } \mathrm{Ad}(\exp X) \\ &\qquad \text{dans } \mathfrak{g} \text{ muni de la norme ci-dessus,} \\ &\forall (k, X, Y) \in (K \times \mathfrak{s}_1 \times \mathfrak{c}), \|k \exp X \exp Y\| = \|\exp X\| \exp \|Y\|. \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

(cf. [7], p. 643 et [6], lemme 2.1). On peut alors définir la notion de G-module ou représentation différentiable (ou lisse) à croissance modérée de façon similaire à [41], § 11.5.1. Noter que dans cette définition l'espace de la représentation est un espace de Fréchet.

Remarque 1. On ne peut référer directement à [41] car la classe de groupes considérées par Wallach est différente de celle d'Harish-Chandra. En effet, si un groupe réductif au sens de Wallach est dans la classe d'Harish-Chandra, il est de type intérieur (cf. [41], § 2.2.8). Par ailleurs, tout groupe réductif de type intérieur au sens de Wallach est dans la classe d'Harish-Chandra mais la réciproque n'est pas claire. C'est ce qui rend nécessaire la discussion qui suit.

Certains résultats de [41], chapitre 11 dont nous aurons besoin subsistent néanmoins pour les groupes réductifs dans la classe d'Harish-Chandra avec des démonstrations analogues:

> l'espace des vecteurs C^∞ d'une représentation Banachique est un G-module lisse à croissance modérée (cf. 1.c. lemme 11.5.1, voir aussi le lemme 2.A.2.2 de 1.c.) (1.2.4)

> en particulier les induites C^∞, á partir d'un sous-groupe parabolique minimal de G, de représentations de dimension finie sont lisses et à croissance modérée. (1.2.5)

En effet, ces induites apparaissent comme espaces de vecteurs C^∞ de représentations Banachique (et même Hilbertienne) (cf. [41], lemme 1.5.3 et théorème 1.8.4).

On dira qu'un $(\mathfrak{g}, K)$-module est de Harish-Chandra s'il est admissible (cf. [9], § 0.2.4) et de type fini sous $U(\mathfrak{g})$. On appelle G-module de Harish-Chandra un G-module différentiable dans un Fréchet E dont le $(\mathfrak{g}, K)$-module des vecteurs K-finis, $E_{(K)}$ est de Harish-Chandra.

Alors, du théorème du sous-module de Casselman (cf. [16], théorème 8.12) et de (1.2.5) on déduit que tout $(\mathfrak{g}, K)$-module de Harish-Chandra admet une complétion lisse à croissance modérée. i.e. apparaît comme le $(\mathfrak{g}, K)$-module des vecteurs K-finis d'un G-module de Harish-Chandra à croissance modérée.

1.3. *Propriété de continuité automatique*

On va déduire des résultats sur les groupes semi-simples connexes de centre fini (cf. [41], théorème 11.6.7, voir aussi [15]) le corollaire suivant:

PROPOSITION 1. *Pour toute paire (V, W) de G-modules de Harish-Chandra, tout morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules entre $V_{(K)}$ et $W_{(K)}$ se prolonge en un morphisme continu de G-modules entre V et W dont l'image est fermée et admet un supplémentaire topologique dans W.*

Remarque 2. Cette proposition montre que G ainsi que les sous-groupes de Levi de ses sous-groupes paraboliques vérifient la propriété de continuité automatique. (cf. [14], § 1.2). En particulier les résultats de [14] sont valables pour G dans la classe de Harish-Chandra.

Démonstration de la proposition 1. On sait que le groupe G_1 est fermé dans G (cf. § 1.2), dans la classe d'Harish-Chandra et que K_1 en est un sous-groupe compact maximal ([38], Part II, théorème 1.3.12). Si V est un G-module de Harish-Chandra, montrons que $V_{(K)}$ est égal à $V_{(K_1)}$. Évidemment, $V_{(K)} \subset V_{(K_1)}$. Par ailleurs, en utilisant le fait que $V_{(K)}$ est admissible et de type fini sous $U(\mathfrak{g})$ on montre qu'il existe une famille finie de caractères de $Z(\mathfrak{g})$, $\chi_1, ..., \chi_p$ et $n_1, ..., n_p \in \mathbb{N}^*$ tels que:

$$\forall D \in Z(\mathfrak{g}), \qquad \forall v \in V_{(K)}, \qquad (D - \chi_1(D))^{n_1} \cdot \cdots \cdot (D - \chi_p(D))^{n_p}\, v = 0. \tag{1.3.1}$$

La continuité de l'opérateur D sur V montre que cette relation est encore vraie si $v \in V$. Soit I l'idéal de $Z(\mathfrak{g})$ engendré par $\{(D - \chi_1(D))^{n_1} \cdot \cdots \cdot (D - \chi_p(D))^{n_p} \mid D \in Z(\mathfrak{g})\}$. En utilisant que $Z(\mathfrak{g})$ est une algèbre de polynômes on voit facilement que I est de codimension finie, q, dans $Z(\mathfrak{g})$ et donc:

$$\forall v \in V, \qquad \dim(Z(\mathfrak{g})\, v) \leqslant q. \tag{1.3.2}$$

Comme $U(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k})$ est contenu dans $Z(\mathfrak{g})$ on en déduit que tout vecteur de V est $\exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k})$-fini. Mais $K^0 = K_1 \exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k})$ et K/K^0 est isomorphe à G/G^0

([38], Part II, théorème 1.3.13) donc fini. On conclut alors que tout vecteur K_1-fini est K-fini et $V_{(K)} = V_{(K_1)}$ comme annoncé.

Montrons maintenant que $V_{(K)}$ est un $U(\mathfrak{g}_1)$-module de type fini. Soit $\{v_1, ..., v_n\}$ un ensemble de générateurs de $V_{(K)}$ sous $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}_1)\, U(\mathfrak{z})$. D'après (1.3.2) et le fait que $U(\mathfrak{z}) \subset Z(\mathfrak{g})$ on a $\dim(U(\mathfrak{z})\, v_i) \leqslant q$ pour tout i. L'assertion en résulte immédiatement.

Montrons que $V_{(K)}$ est un $(\mathfrak{g}_1, K_1)$-module admissible. Comme $V_{(K)}$ est de type fini sous $U(\mathfrak{g})$ et que tout élément de $V_{(K)}$ est $Z(\mathfrak{g})$-fini on voit facilement qu'il existe un nombre fini de caractères de $\exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k})$, $\kappa_1, ..., \kappa_m$ tels que tout K-type $\mu \in \hat{K}$, intervenant dans $V_{(K)}$, se restreint en un multiple d'un caractère de $\exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k})$, κ_μ, égal à l'un des κ_i.

Soit $(\mu_1, H_{\mu_1}) \in \hat{K}_1$ tel que $V^{\mu_1} \neq 0$ et soit $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leqslant m$, l'ensemble des entiers i tels que la représentation $\mu_1 \otimes \kappa_i$ de $K_1 \times \exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k})$ provienne d'une représentation de $K^0 = K_1 \exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k})$ composée avec l'application naturelle de $K_1 \times \exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{k})$ dans K^0, cette représentation étant encore notée $\mu_1 \otimes \kappa_i$. Alors:

$$V^{\mu_1} \subset \sum_{j=1}^{l} V^{\mu_1 \otimes \kappa_{i_j}}. \tag{1.3.3}$$

Mais l'ensemble des K-types μ tels que $\mathrm{Hom}_{K^0}(H_{\mu_1 \otimes \kappa_{i_j}}, H_\mu)$ soit non nul est fini d'après la réciprocité de Frobenius. En effet l'induite de K^0 à K de $\mu_1 \otimes \kappa_{i_j}$ est de dimension finie puisque K/K^0 est fini. Ceci joint à (1.3.3) et au fait que $V_{(K)}$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module admissible implique que V^{μ_1} est de dimension finie.

Ceci achève de prouver que $V_{(K)}$ est un $(\mathfrak{g}_1, K_1)$-module d'Harish-Chandra. On a donc prouvé que tout G-module de Harish-Chandra est aussi un G_1-module d'Harish-Chandra.

Soient V et W comme dans l'énoncé et T un morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules entre V et W. D'après ce qui précède et comme la proposition est vraie pour les groupes semi-simples réels connexes de centre fini (cf. [41], théorème 11.6.7), on voit que T se prolonge en un morphisme continu de G_1-modules, $\bar{T}$, entre V et W dont l'image est fermée et admet un supplémentaire topologique dans W. Comme T est un morphisme de $\mathfrak{g}$-modules et de K-modules, la densité de $V_{(K)}$ dans V et la continuité de $\bar{T}$ impliquent qu'il en va de même de $\bar{T}$. En particulier, $\bar{T}$ est un $\mathfrak{c}$-morphisme. Or tout vecteur de $V_{(K)}$ est $Z(\mathfrak{g})$-fini donc $U(\mathfrak{c})$-fini. Utilisant le fait, facile à établir, que $V_{(K)}$ est constitué de vecteurs faiblement analytiques pour G et la proposition 1.6.6 de [41], on voit que $V_{(K)}$ est invariant sous $\exp \mathfrak{c}$, de même pour $W_{(K)}$, et T commute à l'action de $\exp \mathfrak{c}$. Par continuité de $\bar{T}$ et densité de $V_{(K)}$ cela montre que $\bar{T}$ commute à l'action de $\exp \mathfrak{c}$. Ce qui précède joint à l'égalité $G = KG_1 \exp \mathfrak{c}$ (cf. (1.2.2)) montre que $\bar{T}$ est un G-morphisme. ∎

Corollaire de la proposition 1. (i) *A isomorphisme près, il existe une unique complétion à croissance modérée d'un* $(\mathfrak{g}, K)$*-module de Harish-Chandra.*

(ii) *Toute suite exacte de G-modules de Harish-Chandra est une suite exacte forte.*

(iii) *Tout G-module de Harish-Chandra est un espace de Fréchet nucléaire donc de Montel.*

Démonstration. (i) L'existence de la complétion a été vue en 1.2. L'unicité résulte de la proposition.

Pour (ii) il suffit d'utiliser la proposition et le théorème du graphe fermé pour les espaces de Fréchet.

Pour (iii), grâce à la proposition, au théorème du sous-module de Casselman et à (1.2.5) on voit que l'espace d'un G-module de Harish-Chandra V est un facteur direct topologique de l'espace d'une induite C^∞ d'une représentation de dimension finie d'un sous-groupe parabolique minimal de G. En restreignant les fonctions de G à K, V apparaît aussi comme un facteur direct topologique de $C^\infty(K) \otimes F$ où F est un espace vectoriel de dimension finie. Comme $C^\infty(K)$ est un espace de Fréchet nucléaire il en va de même de V grâce à [37], proposition 50.1. Alors V est un espace de Montel (cf. [37], corollaire 3 de la proposition 50.2). ∎

1.4.

On se donne σ un automorphisme involutif de G, H un sous-groupe ouvert du groupe G^σ formé des points fixés par σ. On choisit une involution de Cartan de G, θ qui commute à σ, pour laquelle on adopte les notations de 1.2 et 1.3. On note $\mathfrak{q}$ le sous-espace de $\mathfrak{g}$ formé des éléments de $\mathfrak{g}$ anti-invariants par σ.

On peut choisir la forme bilinéaire B du § 1.2 invariante également par σ, ce que nous supposerons dans la suite.

Pour toute sous-algèbre abélienne $\mathfrak{d}$ de $\mathfrak{g}$ (ou $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$) formée d'éléments semi-simples et tout sous-espace $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g}$ (ou $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$) stable sous l'action adjointe de $\mathfrak{d}$, on notera $\Delta(\mathfrak{u}, \mathfrak{d})$ ($\subset \mathfrak{d}^*_\mathbb{C}$ ou $\mathfrak{d}^*$) l'ensemble des poids non nuls de $\mathfrak{d}$ dans $\mathfrak{u}_\mathbb{C}$ (ou $\mathfrak{u}$) et pour $\alpha \in \mathfrak{d}^*_\mathbb{C}$ (ou $\mathfrak{d}^*$), $\mathfrak{u}^\alpha$ le sous-espace poids correspondant dans $\mathfrak{u}$.

On choisit un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$, $\mathfrak{a}_\phi$. On fixe un sous-ensemble $\Delta^+_{\sigma\theta}$ de racines positives de $\mathfrak{a}_\phi$ dans $\mathfrak{g}^{\sigma\theta} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q})$ et on note $\mathscr{F}$ la famille des ensembles de racines positives de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\phi)$ contenant $\Delta^+_{\sigma\theta}$. Pour $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$ on notera: $\mathfrak{n}_\phi(\mathscr{P}) = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{P}} \mathfrak{g}^\alpha$.

On note L_ϕ le centralisateur de $\mathfrak{a}_\phi$ dans G. On définit $\mathfrak{m}_\phi := \mathfrak{l}_{\phi, kh} \oplus \mathfrak{l}_{\phi, kq} \oplus \mathfrak{l}_{\phi, sh}$ où $\mathfrak{l}_{\phi, kq} = \mathfrak{l}_\phi \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$ etc... C'est une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{m}_\phi$.

Soit $P_\phi(\mathscr{P})$ le sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}_\phi(\mathscr{P}) = \mathfrak{l}_\phi \oplus \mathfrak{n}_\phi(\mathscr{P})$. On note $P_\phi(\mathscr{P}) = M_\phi A_\phi N_\phi(\mathscr{P})$ la σ-décomposition de Langlands de $P_\phi(\mathscr{P})$ (cf. [4], § 2) où M_ϕ admet $\mathfrak{m}_\phi$ comme algèbre de Lie, $A_\phi = \exp(\mathfrak{a}_\phi)$ et $N_\phi(\mathscr{P}) = \exp \mathfrak{n}_\phi(\mathscr{P})$.

Soit $\Sigma(\mathscr{P})$ l'ensemble des racines simples de $\mathscr{P}$. On choisit $\Theta \subset \Sigma(\mathscr{P})$. On note $\mathfrak{a} = \bigcap_{\alpha \in \Theta} \operatorname{Ker} \alpha$, $\mathfrak{l}$ le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}$, et $\mathfrak{m}$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{l}$ pour B. Soient $\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \mathscr{P}, \alpha_{|\mathfrak{a}} \neq 0} \mathfrak{g}^\alpha$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ qui est une sous-algèbre parabolique. Le sous-groupe parabolique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$, P, est $\sigma\theta$-stable et on note $P = MAN$ sa σ-décomposition de Langlands (cf [4], § 2). Alors M et le centralisateur de $L = MA$ de $\mathfrak{a}$ dans G sont dans la classe d'Harish-Chandra et invariants par σ.

On définit une forme linéaire sur $\mathfrak{a}$, ρ_P, par $\rho_P(X) = 1/2 \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} X)_{|\mathfrak{n}}$. On notera parfois $\rho_{\mathscr{P}} = \rho_{P_\phi(\mathscr{P})}$ et ρ au lieu de ρ_P.

2. Fonctions propres sous l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche par G sur G/H

2.1. *Algèbres d'opérateurs différentiels invariants*

Soit $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, invariante par σ et θ. On note $\mathfrak{j}_k = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{k}$, $\mathfrak{j}_{kq} = \mathfrak{j} \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$ etc. On notera $\gamma_\mathfrak{j}$ l'isomorphisme d'Harish-Chandra du centre $Z(\mathfrak{g})$ de $U(\mathfrak{g})$ vers $S(\mathfrak{j})^{W(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{j}_\mathbb{C})}$, où $W(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{j}_\mathbb{C})$ est le groupe de Weyl du système de racines de $\mathfrak{j}_\mathbb{C}$ dans $\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \Delta(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{j}_\mathbb{C})$. (cf. e.g [26], chapitre VIII, § 5).

On identifiera l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche par G sur G/H à $U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h}/U(\mathfrak{g})\, \mathfrak{h} \cap U(\mathfrak{g})^\mathfrak{h}$ agissant par représentation régulière droite sur $C^\infty(G/H)$ (cf. [5], lemme 2.1). On se fixe un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable P comme dans 1.4. On a des identifications similaires pour $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ et $\mathbb{D}(M/M \cap H)$. On introduit, comme dans [5], § 2.1, eq. (21), un homomorphisme $\omega_\mathfrak{p}$ (noté $'\mu_P$ dans l.c.) de $\mathbb{D}(G/H)$ dans $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ par:

$$\forall D \in \mathbb{D}(G/H), \qquad D - \omega_\mathfrak{p}(D) \in \mathfrak{n} U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\, \mathfrak{h}. \tag{2.1.1}$$

Ici, on observera l'abus de notation qui consiste à ne pas distinguer un élément de $\mathbb{D}(G/H)$ (resp. $\mathbb{D}(L/L \cap H)$) avec un représentant dans $U(\mathfrak{g})^H$ (resp. $U(\mathfrak{l})^{L \cap H}$) mais cela ne pose pas de problème (cf. l.c.).

On remarque que $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{D}(M/M \cap H) \otimes S(\mathfrak{a})$, ce qui permet de regarder $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ à valeurs dans $\mathbb{D}(M/M \cap H)$. On définit alors un morphisme d'algèbres de $\mathbb{D}(G/H)$ dans $\mathbb{D}(L/L \cap H)$, $\omega_{\mathfrak{g}, \mathfrak{l}}$ (noté μ_P dans l.c.) caractérisé par:

$$\forall \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*, \qquad (\omega_{\mathfrak{g}, \mathfrak{l}}(D))(\lambda) = (\omega_\mathfrak{p}(D))(\lambda + \rho_P). \tag{2.1.2}$$

On justifiera plus tard l'indépendance de $\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$ par rapport à N. On note $\mathfrak{g}^d$, $\mathfrak{k}^d$, $\mathfrak{h}^d$ les sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ définies par:

$$\mathfrak{g}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) + i(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}) + \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$$

$$\mathfrak{k}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + i(\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}), \qquad \mathfrak{h}^d = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{h} + i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}).$$

On note $\mathfrak{s}^d = \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q} + i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})$. Alors $\mathfrak{g}^d = \mathfrak{k}^d \oplus \mathfrak{s}^d$ est une décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}^d$. Si $\mathfrak{a}^d$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{s}^d$, on dispose de l'isomorphisme d'Harish-Chandra, $\gamma_{\mathfrak{a}^d}$, de $\mathbb{D}(G/H)$ sur $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{g}^d,\, \mathfrak{a}^d)}$ où $W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ est le groupe de Weyl du système de racines $\Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$.

On note $\mathfrak{l}_1^d$ (au lieu de $\mathfrak{l}^d$, pour des raisons qui apparaîtront plus bas) l'algèbre de Lie $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}^d$.

Supposons que $\mathfrak{a}^d$ contienne $\mathfrak{a}$. Alors l'isomorphisme d'Harish-Chandra pour $L/L \cap H$ relativement à $\mathfrak{a}^d$, $\gamma_{\mathfrak{l},\, \mathfrak{a}^d}$, envoie $\mathbb{D}(L/L \cap H)$ sur $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{l}_1^d,\, \mathfrak{a}^d)}$. De plus:

$$\gamma_{\mathfrak{l},\, \mathfrak{a}^d} \circ \omega_{\mathfrak{g},\, \mathfrak{l}} = \gamma_{\mathfrak{a}^d} \tag{2.1.3}$$

d'après l.c. eq. (21), ce qui justifie l'indépendance de $\omega_{\mathfrak{g},\,\mathfrak{l}}$ par rapport à N.

On note $\mathfrak{l}^d$ le centralisateur de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{g}^d$. Alors $\gamma_{\mathfrak{a}^d} = \omega_{\mathfrak{g}^d,\, \mathfrak{l}^d}$ où l'on a muni $\mathfrak{g}^d$ de l'involution θ^d, égale à l'identité sur $\mathfrak{k}^d$ et à l'opposé de l'identité sur $\mathfrak{s}^d$, et identifié $\mathbb{D}(G/H)$ à $U(\mathfrak{g}^d)^{\mathfrak{k}^d}/U(\mathfrak{g}^d)\, \mathfrak{k}^d \cap U(\mathfrak{g}^d)^{\mathfrak{k}^d}$.

Pour finir, nous ferons un choix particulier de $\mathfrak{j}$ et $\mathfrak{a}^d$ (les autres choix étant notés différemment). On choisit $\mathfrak{a}_\phi$ comme 1.4 et on prend pour $\mathfrak{j}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$, σ et θ-stable, telle que d'une part $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{a}_\phi$ et d'autre part $\mathfrak{a}_s := \mathfrak{j} \cap \mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{t}_{kq} \oplus \mathfrak{a}_\phi$ où $\mathfrak{t}_{kq} := \mathfrak{j} \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$) soit un sous-espace abélien maximal dans $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{q}$). Pour l'existence de $\mathfrak{j}$, cf. [34], lemme 2.4. Alors on prend $\mathfrak{a}^d := i\mathfrak{t}_{kq} \oplus \mathfrak{a}_\phi$.

On note $\mathfrak{m}^d$ le centralisateur de $\mathfrak{a}^d$ dans $\mathfrak{k}^d$. On choisit un ensemble de racines positives de $(\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h})_{\mathbb{C}}$ dans $(\mathfrak{m}^d)_{\mathbb{C}}$ noté $\Delta^+(\mathfrak{m}^d, \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h})$. On note $\rho_{\mathfrak{m}^d} \in (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h})^*_{\mathbb{C}}$ la demi-somme des éléments de $\Delta^+(\mathfrak{m}^d, \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h})$. En utilisant les égalités: $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h})_{\mathbb{C}} \oplus (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{q})_{\mathbb{C}}$ et $(\mathfrak{j} \cap \mathfrak{q})_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{a}^d)_{\mathbb{C}}$, on peut identifier $(\mathfrak{j} \cap \mathfrak{q})^*_{\mathbb{C}}$ (resp. $(\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h})^*_{\mathbb{C}}$) à un sous-espace de $(\mathfrak{j})^*_{\mathbb{C}}$.

Alors, en "identifiant" $Z(\mathfrak{g})$ à une sous-algèbre de $\mathbb{D}(G/H)$ (par l'inclusion naturelle de $Z(\mathfrak{g})$ dans $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$, on a:

$$\forall D \in Z(\mathfrak{g}), \qquad \forall \lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}, \qquad (\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D))(\lambda) = (\gamma_{\mathfrak{j}}(D))(\lambda + \rho_{\mathfrak{m}^d}). \tag{2.1.4}$$

On dira qu'une fonction C^∞ (ou une distribution) F sur G/H (resp. sur G) est vecteur propre, ou bien vecteur propre généralisé, sous $\mathbb{D}(G/H)$ (resp. $Z(\mathfrak{g})$) pour la valeur propre $\lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ (resp. $\lambda \in (\mathfrak{j})^*_{\mathbb{C}}$) si et seulement:

$$\forall \in \mathbb{D}(G/H) \quad (\text{resp. } (Z(\mathfrak{g})),$$

$$DF = ((\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D)(\lambda))\, F \quad (\text{resp. } L_D F = ((\gamma_{\mathfrak{j}}(D))(\lambda))\, F)$$

ou bien:

$$\exists n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall D \in \mathbb{D}(G/H) \quad (\text{resp. } Z(\mathfrak{g})),$$
$$(D - (\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D))(\lambda))^n F = 0 \quad (\text{resp. } (L_D - \gamma_{\mathfrak{j}}(D)(\lambda))^n F = 0)$$

En particulier:

si F est propre sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre λ, F est propre sous $Z(\mathfrak{g})$ pour la valeur propre $-\lambda - \rho_{\mathfrak{m}^d}$. (2.1.5)

En effet, pour $Z \in Z(\mathfrak{g})$, et $F \in C^\infty(G)$, $R_Z F = L_{Z^t} F$ et $\gamma_{\mathfrak{j}}(Z^t) = (\gamma_{\mathfrak{j}}(Z))^t$. L'assertion résulte alors de (2.1.4).

2.2. *Développements convergents et développements asymptotiques*

On dit que deux éléments λ, μ de $(\mathfrak{a}_\phi)^*_{\mathbb{C}}$ sont intégralement inéquivalents si $\lambda - \mu$ n'est pas dans le réseau engendré par $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\phi)$. Pour $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$ on définit:

$$\mathfrak{a}_\phi^+(\mathscr{P}) = \{X \in \mathfrak{a}_\phi \mid \alpha(X) > 0, \forall \alpha \in \mathscr{P}\}$$
$$\mathscr{L}^+(\mathscr{P}) = \left\{\lambda \in \mathfrak{a}_\phi^* \mid \lambda = \sum_{\alpha \in \mathscr{P}} n_\alpha \alpha, \text{ oú } n_\alpha \in \mathbb{N}\right\}$$
$$\mathscr{L}^-(\mathscr{P}) = -\mathscr{L}^+(\mathscr{P}).$$

Soit F une fonction sur G/H, K-finie et annulée par un idéal de codimension finie de $Z(\mathfrak{g})$, I. Il résulte de [2], théorème 2.5, que, pour chaque $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$, il existe un ensemble fini d'éléments de $(\mathfrak{a}_\phi)^*_{\mathbb{C}}$ intégralement inéquivalents deux à deux, S, et pour chaque élément de $S + \mathscr{L}^-(\mathscr{P})$, une fonction sur $K \times \mathfrak{a}_\phi$ notée $(k, X) \mapsto p_{\lambda, \mathscr{P}}(k, X, F)$ telles que:

(i) pour k fixé, les fonctions $X \mapsto p_{\lambda, \mathscr{P}}(k, X, F)$ sont polynomiales sur $\mathfrak{a}_\phi$ de degré borné indépendamment de k et λ. (2.2.1)

(ii) $\forall X \in \mathfrak{a}_\phi^+(\mathscr{P})$, $\forall k \in K$,

$$F(k \exp X) = \sum_{\lambda \in S + \mathscr{L}^-(\mathscr{P})} p_{\lambda, \mathscr{P}}(k, X, F)\, e^{(\lambda - \rho_{\mathscr{P}})(X)}$$

la convergence étant absolue et uniforme sur $\mathfrak{a}_\phi^+(\varepsilon, \mathscr{P}) = \{X \in \mathfrak{a}_\phi(\mathscr{P}) \mid \forall \alpha \in \mathscr{P}, \alpha(X) > \varepsilon\}$, pour tout $\varepsilon > 0$. (2.2.2)

Ces propriétés caractérisent ce développement (cf. par exemple [26], Appendix B, théorème B.25) qu'on appellera développement convergent de F. On appelle exposant de F le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ tout élément λ de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que $p_{\lambda, \mathscr{P}}(k, X, F)$ n'est pas identiquement nul sur $K \times \mathfrak{a}_\phi$ (si $\lambda \notin S + \mathscr{L}^-(\mathscr{P})$ on pose $p_{\lambda, \mathscr{P}}(k, X, F) \equiv 0$).

On appelle exposant directeur de F le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ tout exposant de F maximal pour l'ordre sur $(\mathfrak{a}_\phi^*)_\mathbb{C}$, $\preccurlyeq_\mathscr{P}$, défini par $\lambda \preccurlyeq_\mathscr{P} \lambda'$ si et seulement si $\lambda' - \lambda \in \mathscr{L}^+(\mathscr{P})$. On définit également la relation d'ordre $\leqslant_\mathscr{P}$ sur $(\mathfrak{a}_\phi)^*_\mathbb{C}$ par $\lambda \leqslant_\mathscr{P} \lambda'$ si et seulement si $\lambda' - \lambda = \sum_{\alpha \in \mathscr{P}} n_\alpha \alpha$ avec $n_\alpha \in \mathbb{R}^+$. On a alors facilement (cf. par exemple, [15], proposition A.2.1):

si F est borné, tout exposant de F le long de $P_\phi(\mathscr{P})$, vérifie
$\mathrm{Re}\, \lambda - \rho_\mathscr{P}$ est négatif sur $\mathfrak{a}_\phi^+(\mathscr{P})$ (i.e. $\mathrm{Re}\, \lambda - \rho_\mathscr{P} \leqslant_\mathscr{P} 0$). (2.2.3)

Nous aurons également recours aux développements asymptotiques définis dans [5], théorème 12.8 ou plutôt à une extension facile aux fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-finies (cf. [7], § 1 pour le cas des espaces riemanniens symétriques).

Soit F une fonction C^∞ sur G/H qui est $\mathbb{D}(G/H)$-finie et élément de $C_r^\infty(G)$ pour un $r \in \mathbb{R}$. (voir [5], § 11 pour la définition de $C_r^\infty(G)$ que nous redonnons plus loin, § 2.3). Il existe pour tout $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$, un sous-ensemble fini $S_\mathscr{P}$ de $(\mathfrak{a}_\phi^*)_\mathbb{C}$, et pour $x \in G$ et $\lambda \in S_\mathscr{P} + \mathscr{L}^-(\mathscr{P})$ des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}_\phi$, $p_\lambda(\mathscr{P}, F, x)$ telles que:

pour $X \in \mathfrak{a}_\phi^+(\mathscr{P})$, $F(x \exp tX)$ admet pour développement asymptotique (au sens de [6], § 3 par exemple) quand $t \to +\infty$:

$$\sum_{\lambda \in S_\mathscr{P} + \mathscr{L}^-(\mathscr{P})} p_\lambda(\mathscr{P}, F, x, tX)\, e^{t(\lambda - \rho_\mathscr{P})(X)}. \tag{2.2.4}$$

On dit que $\lambda \in (\mathfrak{a}_\phi^*)_\mathbb{C}$ est un exposant asymptotique de F le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ si, et seulement si $\lambda \in S_\mathscr{P} + \mathscr{L}^-(\mathscr{P})$ et $x \mapsto p_\lambda(\mathscr{P}, F, x)$ n'est pas identiquement nulle sur G. On définit également la notion d'exposant asymptotique directeur.

On sait que si F est une fonction C^∞ sur G/H, $\mathbb{D}(G/H)$-finie et K-finie, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que $F \in C_r^\infty(G)$ d'après [5], lemme 12.3, et on peut donc lui appliquer les résultats ci-dessus. On dispose aussi des développements convergents. D'après l'unicité des développements asymptotiques (cf. [6], proposition 3.1), on voit que λ est un exposant de F le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ si et seulement si λ est un exposant asymptotique de F le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ tel que $x \mapsto p_\lambda(\mathscr{P}, F, x)$ ne soit pas identiquement nul sur K. Si de plus on définit $p_\lambda(\mathscr{P}, F, x) \equiv 0$ pour $\lambda \notin S_\mathscr{P} + \mathscr{L}^-(\mathscr{P})$ on a:

$$\forall \lambda \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*, \qquad \forall k \in K, \qquad \forall X \in \mathfrak{a}_\phi, \qquad p_\lambda(\mathscr{P}, F, k)(X) = p_{\lambda, \mathscr{P}}(k, X, F). \tag{2.2.5}$$

Montrons qu'il y a identité entre exposants directeurs et exposants asymptotiques directeurs le long de $P_\phi(\mathscr{P})$. Montrons d'abord que si λ est un exposant asymptotique directeur le long de $P_\phi(\mathscr{P})$, $p_\lambda(\mathscr{P}, F, k)$ n'est pas identiquement nul pour tout $k \in K$. Pour cela, on montre, comme dans [5], théorème 8.4, que $x \mapsto p_\lambda(\mathscr{P}, F, x)$ est une application invariante à droite par $N_\phi(\mathscr{P})$ et qui se transforme simplement à droite sous $M_\phi \cap H$ et A_ϕ

(cf. [5], lemme 13.1). Tenant compte de $G = KP_\phi(\mathscr{P})$ et $M_\phi = (M_\phi \cap K)\exp(\mathfrak{m}_\phi \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{h})$ (car $\mathfrak{m}_\phi \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q} = 0$) on voit que si $p_\lambda(\mathscr{P}, F, x)$ est nul pour tout $x \in K$ il est nul pour tout $x \in G$. Une contradiction qui montre ce que l'on désirait.

Soit λ un exposant asymptotique directeur le long de $P_\phi(\mathscr{P})$. Alors c'est un exposant et il est maximal pour l'ordre $\preccurlyeq_{\mathscr{P}}$ car tout exposant est un exposant asymptotique. Donc λ est un exposant directeur. On montre de même qu'un exposant directeur est un exposant asymptotique directeur.

LEMME 1. *Si $F \in C^\infty(G/H)$ est K-finie et vecteur propre généralisé sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$, les exposants directeurs de F le long de $P_\phi(\mathscr{P})$, $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$, sont de la forme $w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi}$, $w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$.*

Démonstration. Cela résulte de la discussion ci-dessus, du corollaire 13.3 de [5] étendu aux fonctions qui sont vecteurs propres généralisés sous $\mathbb{D}(G/H)$ et des lemmes 2.2 et 2.4 de [5]. ∎

Remarque 3. On peut donner une démonstration de ce lemme sans utiliser les développements asymptotiques mais en utilisant un lemme non publié d'E. van den Ban (lemme 6.3 du preprint de [2]) joint aux lemmes 2.2 et 2.3 de [5].

2.3. *Familles holomorphes de fonctions propres sous* $\mathbb{D}(G/H)$

Nous allons donner des généralisations de certains résultats d'E. van den Ban (cf. [5], p. 393 et 394) qui sont faciles à établir en utilisant ses méthodes. On définit pour f fonction de G dans $\mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}$: $\|f\|_r = \sup_{x \in G} \|x\|^{-r} |f(x)|$. On note $C_r(G)$ l'espace des fonctions continues sur G vérifiant $\|f\|_r < +\infty$ que l'on munit de la norme $\| \ \|_r$. C'est un espace de Banach sur lequel G opère par représentation régulière gauche. C'est une représentation continue et l'espace des vecteurs C^∞ (resp. de classe C^q ($q \in \mathbb{N}$)) noté $C_r^\infty(G)$ (resp. $C_r^q(G)$) est égal à $\{f \in C^\infty(G)$ resp. $C^q(G) \mid \forall D \in U(\mathfrak{g})$, (resp. de degré inférieur ou égal à q), $L_D f \in C_r(G)\}$ (procéder comme dans [12], lemme 1) que l'on munit des semi-normes $f \mapsto \|L_D f\|_r$, pour D décrivant une base de $U(\mathfrak{g})$ (resp. de l'espace des éléments de $U(\mathfrak{g})$ de degré inférieur ou égal à q) associée à une base $X_1, ..., X_p$ de $\mathfrak{g}$. L'espace $C_r^q(G)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la forme $f \mapsto \|f\|_{q,r} = \sup_{\gamma_1 + \cdots + \gamma_p \leqslant q} \|L_{X^\gamma} f\|_r$ où $X^\gamma = X_1^{\gamma_1} \cdots X_p^{\gamma_p}$. Pour $\lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$, on note $\mathscr{A}(G/H, \lambda)$ l'espace des fonctions C^∞ sur G/H propres sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre λ. Si $r \in \mathbb{R}$, on définit $\mathscr{A}_r(G/H, \lambda) := \mathscr{A}(G/H, \lambda) \cap C_r^\infty(G)$ qui est un sous-espace fermé de $C_r^\infty(G/H)$, donc un espace de Fréchet pour la topologie induite par celle de $C_r^\infty(G/H)$.

Soit P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable comme en 1.4. On notera:

$$\mathfrak{a}_M^d := \mathfrak{a}^d \cap \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}. \tag{2.3.1}$$

Alors:

$$\mathfrak{a}^d = \mathfrak{a}_M^d \oplus \mathfrak{a} \tag{2.3.2}$$

ce qui permet d'identifier $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et $(\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}}^*$ à des sous-espaces de $(\mathfrak{a}^d)_{\mathbb{C}}^*$.

Définition 1. Soit $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}}^*$ et Ω un ouvert de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Une famille holomorphe de fonctions propres sous $\mathbb{D}(G/H)$ de croissance $r (r \in \mathbb{R})$ basée sur (Λ, Ω) est une application F de $\Omega \times G/H$ dans $\mathbb{C}$ telle que, notant, pour $\nu \in \Omega$, F_ν l'application de G/H dans $\mathbb{C}$ définie par $gH \mapsto F(\nu, gH)$, on ait:

$$\forall \nu \in \Omega, \qquad F_\nu \in \mathscr{A}_r(G/H, \Lambda - \nu) \tag{2.3.3}$$

et:

$$\text{l'application de } \Omega \text{ dans } C_r^\infty(G/H), \nu \mapsto F_\nu, \text{ est holomorphe.} \tag{2.3.4}$$

On notera $\mathscr{A}_r(G/H, \Lambda, \Omega)$ l'ensemble de ces applications.

Remarque 4. Soit F une application de $\Omega \times G/H$ dans $\mathbb{C}$ qui vérifie (2.3.3) et telle que:

$$\forall D \in U(\mathfrak{g}), \qquad \sup_{\nu \in \Omega} \|L_D F_\nu\|_r < +\infty. \tag{2.3.5}$$

$$\text{pour tout } g \text{ élément de } G \text{ et } D \text{ élément de } U(\mathfrak{g}), \nu \mapsto (L_D F_\nu)(gH) \text{ est holomorphe sur } \Omega. \tag{2.3.6}$$

Alors F vérifie (2.3.4) (cf. [5], preuve du lemme 14.1). En effet, cela résulte de la formule intégrale de Cauchy pour les coefficients d'une série entière.

On dira aussi qu'une application F de $\Omega \times G/H$ dans $\mathbb{C}$ est une famille holomorphe de fonctions propres sous $\mathbb{D}(G/H)$, à croissance modérée, basée sur (Λ, Ω) si et seulement si, pour tout $\lambda_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert de λ_0, $V(\lambda_0)$, et $r_0 \in \mathbb{R}$ tels que F restreinte à $V(\lambda_0) \times G/H$ soit une famille holomorphe de fonctions propres sous $\mathbb{D}(G/H)$ de croissance r_0, basée sur $(\Lambda, V(\lambda_0))$. On notera $\mathscr{A}_*(G/H, \Lambda, \Omega)$ l'espace de ces fonctions.

On remarque que le théorème 12.9 de [5] admet la généralisation suivante en utilisant les résultats de l.c, § 11 et les mêmes méthodes.

Lemme 2. *Soient* $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}}^*$, Ω *un ouvert de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, F *un élément de* $\mathscr{A}_*(G/H, \Lambda, \Omega)$, $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$. *Pour* ν *élément de* $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ *on définit*:

$$X(\mathscr{P}, \Lambda, \nu) := \{ w(\Lambda - \nu)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mathscr{L}^-(\mathscr{P}) \mid w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d) \}$$

(i) *Alors pour* ν *élément de* Ω, *tout exposant asymptotique de* F_ν *le long de* $P_\phi(\mathscr{P})$ *est élément de* $X(\mathscr{P}, \Lambda, \nu)$.

(ii) *Soit* $\nu_0 \in \Omega$ *et* $\lambda_0 \in X(\mathscr{P}, \Lambda, \nu_0)$. *On note, pour* $\nu \in \Omega$, $\Xi(\nu, \lambda_0)$ *la réunion de l'ensemble* $\{0\} \cap \{\lambda_0\}$ *avec l'ensemble* $\{w(\Lambda - \nu)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu \mid \mu \in \mathscr{L}^-(\mathscr{P}),\ w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ *et* $w(\Lambda - \nu_0)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu = \lambda_0\}$.

Alors il existe un voisinage ouvert $V(\nu_0)$ *de* ν_0 *dans* Ω *et* r_0 *tels que l'application*

$$(\nu, X) \mapsto \sum_{\lambda \in \Xi(\nu, \lambda_0)} p_\lambda(\mathscr{P}, F_\nu, \cdot, X)\, e^{\lambda(X)}$$

est continue de $V(\nu_o) \times \mathfrak{a}_\phi$ *dans* $C^\infty_{r0}(G)$ *et de plus holomorphe en* ν.

Corollaire 1 du lemme 2. *Avec les notations ci-dessus* (*resp. en supposant en outre* F_ν *K-finie pour tout* $\nu \in \Omega$), *soit* $\nu_0 \in \Omega$ *et* λ_0 *un exposant asymptotique* (*resp. exposant*) *de* F_{ν_0} *le long de* $P_\phi(\mathscr{P})$. *Alors pour toute suite* (ν_n) *dans* Ω *tendant vers* ν_0 *il existe une suite* (λ_n) *dans* $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ *qui converge vers* λ_0 *et telle, que* λ_n *soit un exposant asymptotique* (*resp. exposant*) *de* F_{ν_n} *le long de* $P_\phi(\mathscr{P})$.

Démonstration. Supposons que λ_0 soit un exposant asymptotique (resp. exposant) de F_{ν_0} le long de $P_\phi(\mathscr{P})$. Alors il existe $x \in G$ (resp. $x \in K$) et $X \in \mathfrak{a}_\phi$ tels que $p_{\lambda_0}(\mathscr{P}, F_{\nu_0}, x, X)$ soit non nul (cf. § (2.2.5)). Alors, d'après le lemme précédent, il existe pour n assez grand $\lambda_n \in \Xi(\nu_n, \lambda_0)$ tel que $p_{\lambda_n}(\mathscr{P}, F, x, X)$ soit non nul. Donc λ_n est exposant asymptotique (resp. exposant) de F_{ν_n}. Mais $\lambda_n = w_n(\Lambda - \nu_n)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu_n$ où $w_n \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$, $\mu_n \in \mathscr{L}^-(\mathscr{P})$ vérifient:

$$w_n(\Lambda - \nu_0)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu_n = \lambda_0$$

Alors $\|\lambda_n - \lambda_0\| \leqslant \|\nu_n - \nu_0\|$ et (λ_n) tend vers λ_0. ∎

Définition 2. Soit F une fonction C^∞ sur G/H, $\mathbb{D}(G/H)$-finie et élément de $C^\infty_r(G)$ pour un réel r, cette dernière condition étant automatiquement vérifiée si F est en outre K-finie. On dit que F est tempérée si pour tout $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$ et tout exposant asymptotique (directeur) λ de F le long de $P_\phi(\mathscr{P})$, on a:

$$\operatorname{Re} \lambda \leqslant_{\mathscr{P}} 0 \qquad (\text{i.e. } \operatorname{Re} \lambda_{|\mathfrak{a}^+_\phi(\mathscr{P})} \leqslant 0).$$

Rermarque 5. Si F est K-finie, on peut remplacer "exposant asymptotique" par "exposant" dans la définition, d'après l'identité des exposants asymptotiques directeurs et des exposants directeurs (cf. la discussion après (2.2.4)). Au vu des théorèmes 6.3 et 6.4 de [2] cette définition coïncide avec celle de [31], corollaire 4.5, au moins si G est semi-simple connexe, F propre sous $\mathbb{D}(G/H)$ et K-finie. De plus, la notion de tempérance ne dépend que de σ et pas de H.

Corollaire 2 du lemme 2. *Avec les notations du lemme 2, soit X une partie de Ω telle que tout $\nu \in X$, F_ν est tempérée. Alors pour tout élément ν de l'adhérence de X dans Ω, F_ν est tempérée.*

Démonstration. Cela résulte de la définition ci-dessus et du corollaire 1.

3. Séries principales généralisées et "intégrales d'Eisenstein"

3.1. *Séries principales généralisées*

On va rappeler ou plutôt généraliser certains résultats de [14], (cf. [14], § 2.3 pour plus de détails). On se fixe un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable P de G comme en 1.4. Si (π, V) est une représentation continue de P dans un espace de Fréchet, on notera (π_V^P, I_V^P) la représentation régulière gauche de G dans:

$$I_V^P = \{\varphi: G \to V^\infty \mid \varphi \text{ est } C^\infty \text{ et } \forall (g, p) \in G \times P, \varphi(gp) = \pi_\rho(p^{-1})\, \varphi(g)\} \tag{3.1.1}$$

où:

$$\pi_\rho(man) = a^\rho \pi(man), \qquad \text{pour} \quad m \in M, a \in A, n \in N \tag{3.1.2}$$

que l'on munit des semi-normes:

$$\|\varphi\|_{D,q} = \sup_{k \in K} q(L_D \varphi(k))$$

où D décrit $U(\mathfrak{g})$ et q décrit les semi-normes définissant la topologie de V^∞. Il est facile de voir que I_V^P est un sous-espace fermé de $C^\infty(G, V^\infty)$ et que sa topologie est induite par celle de $C^\infty(G, V^\infty)$. En conséquence, (π_V^P, I_V^P) est une représentation C^∞. On note que:

$$(\pi_V^P, I_V^P) = (\pi_{V^\infty}^P, I_{V^\infty}^P). \tag{3.1.3}$$

Si V est un espace de Hilbert, I_V^P est l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation continue de G dans l'espace

$$C(G, P, V) := \{\varphi \in C(G, V) \mid \forall g \in G, \forall p \in P, \varphi(gp) = \pi_\rho(p^{-1})\, \varphi(g)\}$$

muni de la norme $\|\varphi\| = \sup_{k \in K} \|\varphi(k)\|$ qui en fait un espace de Banach. En conséquence, si V est un espace de Hilbert, (π_V^P, I_V^P) est à croissance modérée.

Retournons au cas général i.e. V est un espace de Fréchet. En restreignant les fonctions de G à K on obtient un isomorphisme topologique de I_V^P, noté $\varphi \to \bar{\varphi}$, sur:

$$I_V = \{\psi\colon K \to V^\infty \mid \forall (k, m) \in K \times (M \cap K), \psi(km) = \pi(m^{-1})\, \psi(k) \text{ et } \psi \text{ est } C^\infty\}$$

lorsque l'on munit I_V des semi-normes $\psi \mapsto \|\psi\|_{D,q} = \sup_{\kappa \in K} q(L_D\psi(k))$, où q décrit les semi-normes définissant la topologie de V^∞ et D décrit $U(\mathfrak{k})$ (utiliser par exemple le théorème du graphe fermé en remarquant que I_V^P et I_V sont des espaces de Fréchet et que l'homomorphisme de restriction des fonctions à K est continu et bijectif de I_V^P vers I_V). On notera $\bar{\pi}_V^P$ la représentation de G dans I_V obtenue par transport de structure de π_V^P. On notera, pour $\psi \in I_V$, $\tilde{\psi}$ l'élément de I_V^P tel que $\bar{\tilde{\psi}} = \psi$. On note L (resp. R) la représentation régulière gauche (resp. droite) de G dans $\mathscr{D}(G, V^\infty)$ et L' (resp. R') sa contragédiente dans $\mathscr{D}'(G, V^\infty)$.

On définit une application linéaire continue θ_V de $\mathscr{D}(G, V^\infty)$ dans I_V^P par:

$$\forall g \in G, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(G, V^\infty), \qquad (\theta_V(\varphi))(g) = \int_P \pi_\rho(p)\, \varphi(gp)\, dp \tag{3.1.4}$$

qui entrelace π_V^P et L. Ici dp est une mesure de Haar invariante à gauche sur P.

Par ailleurs, on choisit une fonction C^∞ à support compact sur G, ψ_0, invariante à gauche par K et telle que:

$$\int_P \psi_0(p)\, dp = 1. \tag{3.1.5}$$

On note $\mathscr{D}'(G, P, V) := \{\tau \in \mathscr{D}'(G, V^\infty) \mid \forall p \in P, R'_p(\tau) = (\pi')_\rho\, (p^{-1})\, \tau\}$ que l'on munit de la topologie induite par la topologie forte sur $\mathscr{D}'(G, V_\delta^\infty)$. Ici, $(\pi')_\rho\, (man) = a^\rho \pi'(man)$ pour $(m, a, n) \in M \times A \times N$. Alors $(\theta_V)'$ est un isomorphisme topologique de G-modules entre $(I_V^P)'$ (muni de la topologie forte) et $\mathscr{D}'(G, P, V)$ admettant pour inverse l'application ω_V, de $\mathscr{D}'(G, P, V)$ dans $(I_V^P)'$, définie par:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, P, V), \qquad \forall \varphi \in I_V^P, \qquad \langle \omega_V(\tau), \varphi \rangle = \langle \tau, \psi_0 \varphi \rangle. \tag{3.1.6}$$

On identifiera dans la suite $(I_V^P)'$ et $\mathscr{D}'(G, P, V)$. On identifie de même le dual fort de I_V, I'_V, au sous-espace $\mathscr{D}'(K, \pi)$ de $\mathscr{D}'(K, V^\infty)$ (muni de la topologie induite) définie par:

$$\mathscr{D}'(K, \pi) = \{\tau \in \mathscr{D}'(K, V^\infty) \mid \forall m \in M \cap K, R'_m \tau = \pi'(m^{-1})\, \tau\}.$$

L'identification se fait par l'isomorphisme entre I'_V et $\mathscr{D}'(K, \pi)$ qui, à $\tau \in I'_V$, associe $\tau_1 \in \mathscr{D}'(K, \pi)$ défini par:

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(K, V^\infty), \qquad \langle \tau_1, \varphi \rangle := \langle \tau, Q(\varphi) \rangle \tag{3.1.7}$$

où $Q(\varphi) \in I_V$ est défini par:

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}(K, V^\infty), \qquad \forall k \in K, \qquad Q(\varphi)(k) = \int_{M \cap K} \delta(m)\, \varphi(km)\, dm.$$

On notera $\tau \mapsto \tilde{\tau}$ le transposé de l'homomorphisme de restriction des fonctions à K, $\varphi \mapsto \bar{\varphi}$ de I^P_V dans I_V, et $\tau \mapsto \bar{\tau}$ le transposé de $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$. A noter qu'on peut montrer que $\tau \mapsto \bar{\tau}$ correspond à la restriction des distributions à K.

Soient V_1, V_2 deux P-modules de Fréchet et $u: V_1 \mapsto V_2$ (resp. $V_1^\infty \mapsto V_2^\infty$) un morphisme continu de P-modules. On en déduit un morphisme continu de G-modules $\operatorname{Ind} u: I^P_{V_1} \mapsto I^P_{V_2}$ donné par:

$$\forall \varphi \in I^P_{V_1}, \qquad (\operatorname{Ind} u)(\varphi) = u \circ \varphi. \tag{3.1.8}$$

On vérifie facilement que le transposé, $(\operatorname{Ind} u)'$, de $\operatorname{Ind} u$, regardé comme morphisme continu de G-modules de $\mathscr{D}'(G, P, V_2)$ dans $\mathscr{D}'(G, P, V_1)$ vérifie:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, P, V_2), \qquad \forall \varphi \in \mathscr{D}(G, V_1^\infty), \qquad \langle (\operatorname{Ind} u)'(\tau), \varphi \rangle = \langle \tau, u \circ \varphi \rangle \tag{3.1.9}$$

Alors

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, P, V_2), \qquad \operatorname{Supp}((\operatorname{Ind} u)'\,(\tau)) \subset \operatorname{Supp} \tau \tag{3.1.10}$$

où Supp désigne le support.

De plus, si u, regardée comme application linéaire de V_1^∞ dans V_2^∞, est surjective et admet une section linéaire continue, on a:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, P, V_2), \qquad \operatorname{Supp}(\operatorname{Ind} u)'(\tau) = \operatorname{Supp} \tau. \tag{3.1.11}$$

Supposons que l'on ait des P-modules dans des Fréchet V_1, V_2, V_3 et une suite exacte forte de P-modules:

$$0 \to V_1^\infty \xrightarrow{u_1} V_2^\infty \xrightarrow{u_2} V_3^\infty \to 0. \tag{3.1.12}$$

Comme $M \cap K$ est compact, u_2 admet une section linéaire continue qui est un $M \cap K$-morphisme. Alors on voit facilement que les suites:

$$0 \to I^P_{V_1} \xrightarrow{\operatorname{Ind} u_1} I^P_{V_2} \xrightarrow{\operatorname{Ind} u_2} I^P_{V_3} \to 0 \tag{3.1.13}$$

et:

$$0 \to \mathscr{D}'(G, P, V_3) \xrightarrow{(\operatorname{Ind} u_2)'} \mathscr{D}'(G, P, V_2) \xrightarrow{(\operatorname{Ind} u_1)'} \mathscr{D}'(G, P, V_1) \to 0 \tag{3.1.14}$$

sont des suites exactes fortes de G-modules (utiliser les I_{V_i}).

Si (δ, V_δ) est une représentation de M et $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ on note $(\delta_\nu, (V_\delta)_\nu)$ la représentation de P dans V_δ définie par:

$$\forall (m, a, n) \in M \times A \times N, \qquad \delta_\nu(man) = a^\nu \, \delta(m). \tag{3.1.15}$$

Notez que $((V_\delta)_\nu)^\infty = (V_\delta^\infty)_\nu$. Si V_δ est un Fréchet, on posera:

$$(\pi^P_{\delta, \nu}, I^P_{\delta, \nu}) := (\pi^P_{(V_\delta)_\nu}, I^P_{(V_\delta)_\nu}), \qquad \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu) := \mathscr{D}'(G, P, (V_\delta)_\nu) \tag{3.1.16}$$

$$I_\delta := I_{(V_\delta)_\nu}, \qquad \mathscr{D}'(K, \delta) := \mathscr{D}'(K, \delta_\nu) \tag{3.1.17}$$

(cf. [14], § 2.3).

Si δ est la représentation triviale de dimension 1 de M on oubliera δ dans la notation:

$$\pi^P_\nu := \pi^P_{\delta, \nu}, \qquad \mathscr{D}'(G, P, \nu) := \mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu). \tag{3.1.18}$$

3.2. *Vecteurs distribution H-invariants des séries principales généralisées*

Rappelons certains résultats de [14]. On note W le quotient du normalisateur dans K de $\mathfrak{a}_\phi$, $N_K(\mathfrak{a}_\phi)$, par son centralisateur, qui s'identifie au groupe de Weyl du système de racines $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\phi)$ (cf. e.g. [4], lemme 1.2). On fixe P comme en 1.4. On note W_H (resp. W^M) l'image dans W du normalisateur dans $K \cap H$ (resp. $K \cap M$) de $\mathfrak{a}_\phi$, $N_{K \cap H}(\mathfrak{a}_\phi)$ (resp. $N_{K \cap M}(\mathfrak{a}_\phi)$). On note $\mathscr{W}$ un ensemble de représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_\phi)$ de l'ensemble des (W_H, W^M)-doubles classes dans W, $W_H \backslash W / W^M$, tel que $e \in \mathscr{W}$. C'est un ensemble de représentants des (H, P)-doubles classes ouvertes dans G (cf. [14], lemme 3).

On se donne (δ, V_δ) une représentation unitaire de M telle que:

(i) δ est une somme finie de représentations unitaires irréductibles (3.2.1)

(ii) δ admet un caractère infinitésimal.

Pour tout $w \in N_K(\mathfrak{a}_\phi)$, on notera:

$$\mathscr{V}(\delta, w) = (V_\delta^{-\infty})^{M \cap (w^{-1} H w)} \tag{3.2.2}$$

et σ_w l'involution de G définie par:

$$\forall g \in G, \qquad \sigma_w(g) = w^{-1} \sigma(w g w^{-1}) \, w \tag{3.2.3}$$

qui commute à θ et laisse stable $\mathfrak{a}_\phi$. On définit:

$$\mathscr{V}(\delta) = \prod_{w \in \mathscr{W}} \mathscr{V}(\delta, w). \tag{3.2.4}$$

L'injection (resp. la projection) naturelle de $\mathscr{V}(\delta, w)$ dans $\mathscr{V}(\delta)$ (resp. $\mathscr{V}(\delta)$ sur $\mathscr{V}(\delta, w)$) sera notée i_w (resp. pr_w). L'espace $\mathscr{V}(\delta)$ est de dimension finie. Pour $v \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ on dispose d'une application évaluation en $w \in \mathscr{W}$ (resp. sur $\mathscr{W}$) notée ev_w (resp. ev) qui envoie l'espace des vecteurs distributions H-invariants de $I^P_{\delta, v}$, $\mathscr{D}'(G, P, \delta, v)^H$, dans $\mathscr{V}(\delta, w)$ (resp. $\mathscr{V}(\delta)$), l'application ev étant le produit des applications ev_w.

Alors on sait qu'il existe une famille localement finie d'hyperplans dans $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, notée $\mathscr{H}_{ev, \delta}$ (et dont le complémentaire dans $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ sera notée $\mathscr{H}^c_{ev, \delta}$) telle que pour tout v élément de $\mathscr{H}^c_{ev, \delta}$), ev est bijective et telle que:

$$\begin{gathered} \exists X_1, \dots X_p, \in \mathfrak{a}\backslash\{0\}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}^*, \\ \mathscr{H}_{ev, \delta} = \bigcup_{j=1}^{p} \left\{ v \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \mid v(X_j) \in \bigcup_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mathbb{N}) \right\} \end{gathered} \tag{3.2.5}$$

(cf. [14], théorème 1).

De plus, (cf. l.c. théorème 3) il existe une unique famille méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $v \mapsto j(P, \delta, v)$, d'applications linéaires de $\mathscr{V}(\delta)$ dans $\mathscr{D}'(G, P, \delta, v)^H$ telle que

$$ev \circ j(P, \delta, v) \equiv \mathrm{Id}_{\mathscr{V}(\delta)}. \tag{3.2.6}$$

La méromorphie peut aussi bien être interprétée en regardant $j(P, \delta, v)$ comme à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathscr{V}(\delta), \mathscr{D}'(G, V^\infty_\delta))$ ou bien en regardant $j(P, \delta, v)$ dans la réalisation compacte grâce à l'isomorphisme de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, v)$ avec I'_δ (cf. l.c. § 2.4 et lemme 5). On notera $v \mapsto \bar{j}(P, \delta, v)$ l'application méromorphe de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ dans $\mathrm{End}(\mathscr{V}(\delta), I'_\delta) \approx \mathrm{End}(\mathscr{V}(\delta), \mathscr{D}'(K, \delta))$ obtenue par transport de structure. De plus, la variété polaire de $v \mapsto j(P, \delta, v)$ est contenue dans une famille localement finie d'hyperplans de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $\mathscr{H}_{j, \delta}$, telle que:

$$\begin{gathered} \exists H_1, \dots, H_l \in \mathfrak{a}\backslash\{0\}, \mu_1, \dots, \mu_l \in \mathbb{C}, \omega_0 \in \mathfrak{a}^*, \\ \mathscr{H}_{j, \delta} = \bigcup_{i=1}^{l} \{ v + n\omega_0 \mid v \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}, n \in \mathbb{N}, v(H_i) = \mu_i \} \end{gathered} \tag{3.2.7}$$

(cf. [14], théorème 3). On notera:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{Im}, ev, \delta} := \bigcup_{j=1}^{n} \{ v \in \mathfrak{a}^* \mid v(X_j) \in \{ \mathrm{Im}\, \lambda_1, \dots, \mathrm{Im}\, \lambda_k \} \} \tag{3.2.8}$$

et

$$\mathscr{H}_{\mathrm{Im}, j, \delta} := \bigcup_{i=1}^{\ell} \{ \nu \in \mathfrak{a}^* \mid \nu(H_i) = \mathrm{Im}\, \mu_i \}. \tag{3.2.9}$$

Comme $X_1, ..., X_p, H_1, ..., H_l \in \mathfrak{a} \backslash \{0\}$ et $\omega_0 \in \mathfrak{a}^*$, on a facilement:

$$\forall \nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \qquad \mathrm{Im}\, \nu \notin \mathscr{H}_{\mathrm{Im}, *, \delta} \Rightarrow \nu \notin \mathscr{H}_{*, \delta} \tag{3.2.10}$$

où $*$ vaut pour *ev* ou *j*.

3.3. *Croissance polynomiale de* $\bar{j}(P, \delta, \nu)$

Pour $R \in \mathbb{R}$ on définit (cf. 1.4 pour la définition de $\Sigma(\mathscr{P})$ et Θ):

$$\mathfrak{a}^*(R) := \{ \nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid \forall \alpha \in \Sigma(\mathscr{P}) \backslash \Theta, \mathrm{Re}(\nu - \rho, \alpha) > R \}. \tag{3.3.1}$$

Ici $\mathfrak{a}$ est muni du produit scalaire induit par B ce qui permet de l'identifier à $\mathfrak{a}^*$ et de munir ce dernier d'un produit scalaire. Ce procédé sera utilisé pour d'autres sous-espaces sans référence particulière. On rappelle que $j(P, \delta, \nu)$ et $\bar{j}(P, \delta, \nu)$ sont holomorphes sur $\mathfrak{a}^*(0)$ (cf. par exemple [14], prop. 2).

Rappelons l'équation fonctionnelle pour j sous une forme adaptée à nos besoins. Soit $\mu \in \mathfrak{a}^*$ que l'on regarde comme un élément de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$, en utilisant $\mathfrak{j} = (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{a}$. On suppose, qu'avec les notations de l.c., lemme 1, $\mu = \sum_{i=1}^{m} m_i \tilde{\delta}_i$, $m_i \in \mathbb{N}^*$.

On note ε_μ la fonction C^∞ sur G (notée $\varepsilon_\mu(e_K^*)$ dans l.c. § 4.4) qui vérifie:

$$\forall (k, m, a, n) \in K \times M \times A \times N, \qquad \varepsilon_\mu(kman) = a^{-\mu}. \tag{3.3.2}$$

Alors il existe des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $b_\mu, q_1, ..., q_s$, avec $b_\mu \not\equiv 0$, des éléments $U_1, ..., U_s$ de $U(\mathfrak{g})$ et une fonction polynomiale sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathscr{V}(\delta))$, R_μ, qui laisse invariante les $\mathscr{V}(\delta, w)$, tels que l'on ait l'identité de fonctions méromorphes:

$$\begin{aligned} &\forall \eta \in \mathscr{V}(\delta), b_\mu(\nu)\, j(P, \delta, \nu, \eta) \\ &\qquad = \sum_{i=1}^{s} q_i(\nu)((\pi_{\delta,\nu}^P)'(U_i))(\varepsilon_\mu j(P, \delta, \nu + \mu, R_\mu(\nu)\, \eta)). \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

On obtient cette équation fonctionnelle par prolongement méromorphe de l'équation fonctionnelle du théorème 2 de l.c., en utilisant l'expression de $\Delta(Z_\nu)$ et en effectuant les contractions qui s'imposent. On doit également remarquer que la multiplication par ε_μ envoie $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu + \mu)$ dans $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu)$.

LEMME 3. *Soient $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$ et $R \in \mathbb{R}$. Il existe un polynôme b_R sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, non identiquement nul, un entier $N \in \mathbb{N}$ et une semi-norme continue $p_{R,\eta}$ sur I_δ tels que*:

(i) $b_R j(P, \delta, \nu, \eta)$ *est holomorphe sur* $\mathfrak{a}^*(R)$

(ii) $\forall \varphi \in I_\delta, \forall \nu \in \mathfrak{a}^*(R)$,

$$|\langle b_R(\nu) \bar{j}(P, \delta, \nu, \eta), \varphi \rangle| \leqslant (1 + \|\nu\|)^N p_{R,\eta}(\varphi).$$

Démonstration. On se ramène aisément au cas où $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{z} = \{0\}$. Par linéarité et en tenant compte de l.c. (2.4.5), on peut supposer $\eta \in \mathscr{V}(\delta, e)$, ce que nous ferons dans la suite. Montrons d'abord le lemme en supposant $R > 0$. Soit $\nu_0 \in \mathfrak{a}^*$ tel que: $\forall \alpha \in \Sigma(\mathscr{P}) \backslash \Theta$, $(\nu_0 - \rho, \alpha) = R$.

Alors, $\bar{j}(P, \delta, \nu_0, \eta)$ est une application continue de K dans $V_\delta^{-\infty}$ (cf. par exemple [14], proposition 2), donc d'image compacte et a fortiori bornée, pour la topologie forte de dual sur $V_\delta^{-\infty}$. Mais $V_\delta^{-\infty}$ est un espace de Fréchet donc tonnelé. Alors (cf. [10], ch. IV, § 3.2 proposition 2) cette image est une partie équicontinue du dual topologique de V_δ^∞. En particulier, il existe une semi-norme continue sur V_δ^∞, p_0, telle que:

$$\forall k \in K, \qquad \forall \psi \in V_\delta^\infty, \qquad \langle (\bar{j}(P, \delta, \nu_0, \eta))(k), \psi \rangle \leqslant p_0(\psi). \tag{3.3.4}$$

Maintenant si $\nu \in \mathfrak{a}^*(R)$ et $\nu - \nu_0 = \sum_{i=1}^m (\nu - \nu_0)_i \tilde{\delta}_i$, on a:

$$\bar{j}(P, \delta, \nu, \eta) = \prod_{i=1}^m \bar{\varepsilon}^{(\nu - \nu_0)_i} \bar{j}(P, \delta, \nu_0, \eta) \tag{3.3.5}$$

où $m = \# \Sigma(\mathscr{P}) \backslash \Theta$ et les $\bar{\varepsilon}_i$ sont les restrictions à K des fonctions continues sur G, ε_i, qui vérifient:

(α) ε_i est nulle en dehors de HP

(β) $\forall (h, m, a, n) \in H \times M \times A \times N$, $\varepsilon_i(hman) = a^{\tilde{\delta}_i}$

où $\tilde{\delta}_i$ vérifie $(\tilde{\delta}_i, \alpha) \geqslant 0$ pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$.

Mais, d'après le théorème de convexité d'E. van den Ban (cf. [1], théorème 1.2), si $k \in K$ vérifie $k = hman$ avec $(h, m, a, n) \in H \times M \times A \times N$, on a $a = \exp X$, où X vérifie, pour tout $i = 1, ..., m$: $\langle \tilde{\delta}_i, X \rangle \leqslant 0$. On en déduit que les fonctions $\bar{\varepsilon}_i$ de (3.3.5) sont majorées par 1.

Alors (3.3.4) joint à (3.3.5) donne:

$$\forall \nu \in \mathfrak{a}^*(R), \qquad \forall \varphi \in I_\delta, \qquad |\langle j(P, \delta, \nu, \eta)(k), \varphi(k) \rangle| \leqslant p_0(\varphi(k))$$

et en intégrant sur K:

$$\forall \nu \in \mathfrak{a}^*(R), \qquad \forall \varphi \in I_\delta, \qquad |\langle \bar{j}(P, \delta, \nu, \eta), \varphi \rangle| \leqslant p_{R,\eta}(\varphi)$$

où $p_{R,\eta}(\varphi) = \sup_{k \in K} p_0(\varphi(k))$. Le polynôme b_R identiquement égal à 1, l'entier $N = 0$ et $p_{R,\eta}$ vérifient les conditions voulues, lorsque $R > 0$.

Supposons maintenant R quelconque. On se fixe μ comme dans l'équation fonctionnelle de j (cf. (3.3.3)) tel que $(\mu, \alpha) > -R + 1$ pour tout α élément de $\Sigma(\mathscr{P}) \backslash \Theta$. Alors le polynôme $b_R := b_\mu$ vérifie (i) grâce à l'holomorphie de j sur $\mathfrak{a}^*(0)$. On réécrit (3.3.3) en restreignant les deux membres à K et en se rappelant que $\varepsilon_{\mu\,|K} \equiv 1$:

$$\forall \nu \in \mathfrak{a}^*(R), \qquad b_R(\nu)\, \bar{j}(P, \delta, \nu, \eta)$$
$$= \sum_{i=1}^{s} q_i(\nu)((\bar{\pi}^P_{\delta,\nu})'\,(U_i))(\bar{j}(P, \delta, \nu + \mu, R_\mu(\nu)\, \eta)).$$

On applique les deux membres à $\varphi \in I_\delta$ et on transpose $(\bar{\pi}^P_{\delta,\nu})'\,(U_i)$:

$$\forall \nu \in \mathfrak{a}^*(R), \qquad \forall \varphi \in I_\delta,$$
$$\langle b_R(\nu)\, \bar{j}(P, \delta, \nu, \eta), \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{s} q_i(\nu) \langle \bar{j}(P, \delta, \nu + \mu, R_\mu(\nu)\, \eta), \bar{\pi}^P_{\delta,\nu}(U^t_i)\, \varphi \rangle.$$

Alors, d'après la première partie de la démonstration:

$$|\langle b_R(\nu)\, \bar{j}(P, \delta, \nu, \eta), \varphi \rangle|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{s} |q_i(\nu)| \left(\sum_{j=1}^{t} |R_{\mu,j}(\nu)|\, (p_{1,\eta_j}(\bar{\pi}^P_{\delta,\nu}(U^t_i)\, \varphi)) \right)$$

où $(\eta_1, ..., \eta_t)$ est une base de $\mathscr{V}(\delta, e)$ et:

$$R_\mu(\nu)\, \eta = \sum_{j=1}^{t} R_{\mu,j}(\nu)\, \eta_j.$$

Mais pour $U \in U(\mathfrak{g})$, $\nu \mapsto \bar{\pi}^P_{\delta,\nu}(U)$ est une application polynomiale de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ dans les endomorphismes continus de I_δ, i.e. à valeurs dans un espace de dimension finie et polynomiale. Pour cela voir par exemple [17], § 2, proposition 1 où l'assertion est démontrée pour l'action de U sur l'espace des vecteurs K-finis d'une série principale. Cette démonstration vaut sans changement, en utilisant le fait que V^∞_δ s'identifie à un sous-module fermé d'une série principale de M, grâce au théorème du sous-module de Casselman et à la proposition 1. Ceci, joint au fait que les $R_{\mu,j}$ sont des fonctions polynomiales, permet d'achever la démonstration du lemme. ∎

3.4. "*Intégrales d'Eisenstein*": *Définition et majorations initiales*

DÉFINITION 3. Lorsque $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$ sont tels que $j(P, \delta, \nu, \eta)$ est bien défini, on appelle "intégrale d'Eisenstein" de paramètre $P, \delta, \nu, \eta, \varphi$ où $\varphi \in I_\delta$, la fonction $E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)$ sur G/H définie par:

$$\forall g \in G, \qquad E(P, \delta, \nu, \eta, gH) = \langle (\bar{\pi}^P_{\delta,\nu})'\,(g)\, \bar{j}(P, \delta, \nu, \eta), \varphi \rangle.$$

Il est clair que, lorsqu'elle est définie, c'est une fonction C^∞. Si $\varphi \in I^P_{\delta,\nu}$, on notera parfois $E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)$ la fonction $E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi_{|K})$.

Lemme 4. *Soit p une semi-norme continue sur I_δ. Il existe une semi-norme p' sur I_δ, $r>0$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que*:

$$\forall k, k' \in K, \qquad \forall X \in \mathfrak{a}_s, \qquad \forall \nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}, \qquad \forall \varphi \in I_\delta,$$
$$p((\bar{\pi}^P_{\delta,\nu}(k(\exp X)\, k'))(\varphi)) \leqslant (1+\|\nu\|)^q\, e^{(r+\|\mathrm{Re}\,\nu\|)(\|X\|)} p'(\varphi)$$

(*où $\mathfrak{a}_s$ est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{s}$ cf.* § 2.1).

Démonstration. Dans le cas où $\sigma = \theta$ et P est un sous-groupe parabolique minimal de G, cela résulte immédiatement de [5], lemme 10.1. Maintenant en utilisant un plongement de V^∞_δ dans une série principale C^∞ de M, qui est un isomorphisme topologique sur son image (cf. démonstration du lemme 3), et en induisant par étage, le lemme résulte du cas particulier ci-dessus. ∎

Proposition 2. *Soit $R \in \mathbb{R}$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$. Soit b_R comme dans le lemme* 3. *Alors il existe $r>0$ tel que pour tout $D \in U(\mathfrak{g})$, il existe $n \in \mathbb{N}$, une semi-norme, p, continue sur I_δ vérifiant*:

$$\forall \varphi \in I_\delta, \qquad \forall k \in K, \qquad \forall X \in \mathfrak{a}_\phi, \qquad \forall \nu \in \mathfrak{a}^*(R),$$
$$|(L_D(b_R(\nu)\, E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)))(k(\exp X)\, H)|$$
$$\leqslant (1+\|\nu\|)^n\, e^{(r+\|\mathrm{Re}\,\nu\|)(\|X\|)} p(\varphi)$$

(*ici, on a prolongé $\nu \mapsto b_R(\nu)\, E(P, \delta, \nu, gH)$ de façon holomorphe à $\mathfrak{a}^*(R)$*).

Démonstration. En effet, on a par définition:

$$(L_D(b_R(\nu)\, E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)))(k(\exp X)\, H)$$
$$= \langle b_R(\nu)\, \bar{j}(P, \delta, \nu, \eta), \bar{\pi}^P_{\delta,\nu}((\exp - X) k^{-1})\, \bar{\pi}^P_{\delta,\nu}(D)\, \varphi \rangle.$$

En utilisant le fait que $\nu \mapsto \bar{\pi}^P_{\delta,\nu}\,(D)$ est polynomiale (cf. la fin de 3.3) et en appliquant les lemmes 3 et 4 avec $p = p_{R,\eta}$, on obtient le résultat voulu. ∎

Proposition 3. *Soit $\eta \in \mathscr{V}(\delta, e)$. On suppose que η est propre sous l'action de $U(\mathfrak{m})^{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{h}}/(U(\mathfrak{m})(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{h})) \cap (U(\mathfrak{m}))^{\mathfrak{m}\cap\mathfrak{h}}$ pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_M)^*_{\mathbb{C}}$. Alors*:

(i) *Si $R \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in I_\delta$, la fonction sur $\mathfrak{a}^*(R) \times G/H$ définie par*:

$$(\nu, gH) \mapsto b_R(\nu)(E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi))(gH)$$

est un élément de $\mathscr{A}_*(G/H, \Lambda, \mathfrak{a}^*(R))$ (cf. définition 1, § 2.3).

(ii) *Soit* $\mathscr{H}^c_{j,\delta}$ *le complémentaire de* $\mathscr{H}_{j,\delta}$ *dans* $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ (*cf.* (3.1.7)). *La fonction sur* $\mathscr{H}^c_{j,\delta} \times G/H$ *définie par*:

$$(v, gH) \mapsto (E(P, \delta, v, \varphi))(gH)$$

est un élément de $\mathscr{A}_*(G/H, \Lambda, \mathscr{H}^c_{j,\delta})$.

Démonstration. Soit $D \in \mathbb{D}(G/H)$ que l'on confond avec un représentant dans $U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{h}}$. En utilisant l'invariance à droite par N et à gauche par H de $j(P, \delta, v, \eta)$ et la définition de $\omega_{\mathfrak{p}}$ (cf. (2.1.1)) on a immédiatement pour $v \in \mathfrak{a}^*(0)$:

$$ev_e(((\pi^P_{\delta,v})'(D))(j(P, \delta, v, \eta))) = ev_e(((\pi^P_{\delta,v})'(\omega_{\mathfrak{p}}(D)))(j(P, \delta, v, \eta))).$$

En tenant compte du fait que $j(P, \delta, v, \eta)$ est un élément de $\mathscr{D}'(G, P, \delta, v)$ et de la définition de $\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}$ (cf. (2.1.2)) on a facilement

$$\begin{aligned} ev_e(((\pi^P_{\delta,v})'(D))(j(P, \delta, v, \eta))) &= (\delta'((\omega_{\mathfrak{p}}(D))(-v+\rho_P))\, ev_e(j(P, \delta, v, \eta))) \\ &= ((\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}}(D))(-v))\,\eta. \end{aligned}$$

Mais d'après les propriétés de η et en tenant compte de (2.1.3) ceci est égal à $(\gamma_{\mathfrak{a}^d}(\Lambda - v))\,\eta$. D'où, en utilisant la propriété caractéristique de j (cf. (3.1.6)), on déduit l'égalité de fonctions holomorphes (resp. méromorphes) sur $\mathfrak{a}^*(0)$ (resp. $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$)

$$((\pi^P_{\delta,v})'(D))(j(P, \delta, v, \eta)) = (\gamma_{\mathfrak{a}^d}(\Lambda - v))\, j(P, \delta, v, \eta). \tag{3.4.1}$$

Il en résulte aisément que $b_R(v)\, E(P, \delta, v, \eta, \varphi)$ est propre sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre $\Lambda - v$. Alors (i) résulte de la remarque 4 et de la proposition 2.

Prouvons (ii). Soit $v_0 \in \mathscr{H}^c_{j,\delta}$. Soient $r_0 \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$ tels que: $v \mapsto b_R(v)$ $E(P, \delta, v, \eta, \varphi)$ soit holomorphe de $B(v_0, \varepsilon)$ dans $C^\infty_{r_0}(G)$ où $B(v_0, \varepsilon)$ est la boule ouverte de centre v_0 de rayon $\varepsilon > 0$ (r_0 et ε existent d'après (i)). Il existe $v'_0 \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que le polynôme d'une variable z, $z \mapsto b_R\,(v_0 + zv'_0)$ ne soit pas identiquement nul. Alors il existe $r > 0$ tel que $\{\gamma_{v_0}(t) = v_0 + re^{it}v'_0 \mid t \in [0, 2\pi]\}$ soit inclus dans $B'(v_0, \varepsilon) = \{v \in B(v_0, \varepsilon) \mid b_R(v) \neq 0\}$. Puis par continuité et compacité on trouve $V(v_0)$ voisinage compact de v_0 contenu dans $B(v_0, \varepsilon)$ tels que:

$$\{\gamma_v(t) = v + re^{it}v'_0 \mid v \in V(v_0),\, t \in [0, 2\pi]\} \subset B'(v_0, \varepsilon).$$

Alors en écrivant la formule intégrale de Cauchy on a:

$$\forall \nu \in V(\nu_0),$$
$$(E(P, \delta, \nu, \varphi))(gH) = 1/2i\pi \int_0^{2\pi} (b_R(\nu + re^{it}\nu_0'))^{-1} \times (b_R(\nu + re^{it}\nu_0'))((E(P, \delta, \nu + re^{it}\nu_0', \eta, \phi))(gH))\, dt.$$

On estime alors le numérateur dans l'intégrale grâce à la proposition 2. De plus, le module du dénominateur est minoré. On en déduit que $\{E(P, \delta, \nu, \varphi) \mid \nu \in V(\nu_0)\}$ est un borné de $C_{r_0}(G)$. On achève de prouver (ii) grâce à la remarque 4 et en remplaçant φ par $\bar{\pi}^P_{\delta, \nu}(D)\, \varphi$, $D \in U(\mathfrak{g})$, dans le raisonnement ci-dessus. ▮

3.5. *Enoncé du théorème principal, première réduction*

On dit que $\eta \in (V_{\bar{\delta}}^{-\infty})^{M \cap H}$ est de carré intégrable pour $M \cap H$ si l'application de $V_{\bar{\delta}}^{\infty}$ dans $C^{\infty}(M/M \cap H)$, qui à $v \in V_{\bar{\delta}}^{\infty}$ associe la fonction $m(M \cap H) \mapsto \langle \delta'(m)\, \eta, v \rangle$, est à valeurs dans $L^2(M/M \cap H)$. En utilisant la proposition 1, on voit qu'il suffit que cette propriété soit vraie pour $v \in (V_\delta)_{M \cap K}$ (cf. [12], proposition 1 pour un raisonnement similaire). Notez que, comme δ n'est pas supposée irréductible, cela n'implique pas que δ est une sous-représentation de $L^2(M/M \cap H)$.

Théorème 1. *Avec les notations et hypothèses de* § 3.2, *soit* $\eta \in \mathscr{V}(\delta, e) = (V_{\bar{\delta}}^{-\infty})^{M \cap H}$ *de carré intégrable.*

Soit $R > 0$ *et* b_R *comme dans le lemme* 3. *Alors pour tout* ν *élément de* $i\mathfrak{a}^*$ *et tout* φ *élément de* $(I_\delta)_{(K)}$, $b_R(\nu)\, E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)$ *est une fonction tempérée sur* G/H.

Corollaire du théorème 1. *Soit* $\eta \in \mathscr{V}(\delta, e)$ *de carré intégrable. Alors pour tout* $\nu \in i\mathfrak{a}^*$, *tel que* $\nu \notin \mathscr{H}_{j, \delta}$ *et tout* $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}$, $E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)$ *est une fonction tempérée sur* G/H.

Démonstration. Cela résulte immédiatement du théorème 1 et de la proposition 3 (ii). ▮

Remarque 6. Au vu du corollaire 2 du lemme 2 et de la proposition 3, on voit que le théorème 1 est équivalent à son corollaire.

Nous allons commencer par réduire la démonstration du théorème à des cas particuliers.

Lemme 5. (i) *Il suffit de prouver le théorème lorsque* H *est supposé connexe.*

(ii) *Il suffit de prouver le théorème lorsque l'on suppose en outre que* G *est semi-simple et connexe.*

Démonstration. Pour prouver (i) on affecte d'un indice supérieur "^{o}" les notations relatives à G/H^o: $\mathscr{W}^o$, $\mathscr{V}^o(\delta), j^o, ev^o, E^o$ etc... On choisit $\mathscr{W}^0$ et $\mathscr{W}$ de telle sorte que $\mathscr{W} \subset \mathscr{W}^0$. On remarque que HP est la réunion de (H^0, P) doubles classes qui sont toutes ouvertes.

En effet si $x \in K \cap H$ on a $\operatorname{Ad} x(\mathfrak{a}_\phi) \subset \mathfrak{p} \cap \mathfrak{q}$. Alors il existe $u \in (K \cap H)^o$ tel que $(\operatorname{Ad} u^{-1} \operatorname{Ad} x)(\mathfrak{a}_\phi) = \mathfrak{a}_\phi$. D'où $x = u(u^{-1}x)$ avec $(u^{-1}x) \in N_K(\mathfrak{a}_\phi)$ et $u \in H^o$. Donc:

$$H = \bigcup_{w \in N_K(\mathfrak{a}_\phi) \cap H} H^o w \qquad \text{et} \qquad HP = \bigcup_{w \in N_K(\mathfrak{a}_\phi) \cap H} H^o w P.$$

On note $\mathscr{W}_1^o = \{ w \in \mathscr{W}^o \mid H^o w P \subset HP \}$. Si $w \in \mathscr{W}_1^o$ on peut écrire $w = w_1 w_2$ avec $w_1 \in N_K(\mathfrak{a}_\phi) \cap H$ et $w_2 \in N_K(\mathfrak{a}_\phi) \cap M$. Alors

$$\begin{aligned} M \cap (w^{-1} H^o w) &= M \cap w_2^{-1} H^o w_2^{-1} \\ &= w_2^{-1} (M \cap H^o)\, w_2 \end{aligned}$$

Soit $\eta \in \mathscr{V}(\delta, e) = (V_\delta^{-\infty})^{M \cap H}$. Étudions $j(P, \delta, v, \eta)$. Pour $w \in \mathscr{W}_1^o$ avec $w = w_1 w_2$ comme ci-dessus, on voit que: $ev_w^o(j(P, \delta, v, \eta)) = \delta'(w_2^{-1})\, \eta$ et si $w \notin \mathscr{W}_1^o$: $ev_w^o(j(P, \delta, v, \eta)) = 0$.

D'où, en posant $\eta_w = \delta'(w_2^{-1})\, \eta$:

$$j(P, \delta, v, \eta) = \sum_{w \in W_1^o} j^o(P, \delta, v, \eta_w). \tag{3.5.1}$$

Mais η_e est de carré intégrable pour $M/M \cap H^o$ car $M \cap H/M \cap H^o$ est fini. En effet, on a $(M \cap H)^o \subset M \cap H^o \subset M \cap H$ et $M \cap H/(M \cap H)^o$ est fini d'après [2], proposition 1.1. Alors, par transport de structure, il en va de même de η_w pour $M/w_2^{-1}(M \cap H^o)\, w_2$. D'autre part, grâce à [14], eq. (2.4.5), (2.4.6), on a:

$$E^o(P, \delta, v, \eta_w, \varphi) = E^o(wPw^{-1}, w\delta, wv, \eta_w, R(w)\, \varphi)$$

où R désigne la représentation régulière droite et dans le membre de droite on a $\eta_w \in \mathscr{V}(w\delta, e)(= \mathscr{V}(\delta, w))$. Si le théorème est vrai pour H^o le membre de droite de cette égalité est tempéré et (i) résulte de (3.5.1), qui implique une relation similaire entre E et E^o, et de la fin de la remarque 5.

Passons à (ii). On suppose H connexe. Il résulte aisément de la définition qu'une fonction $Z(\mathfrak{g})$-finie et K-finie sur G/H est tempérée dès que la restriction à $G^o/(G^o \cap H)$ de ses translatées à gauche par K sont tempérées. Alors, grâce à la remarque 6, il suffit de prouver que la restriction à G^o/H de $E(P, \delta, v, \eta, \varphi)$ est tempérée pour tout $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}$ et $v \in (i\mathfrak{a}^*) \cap \mathscr{H}_{j,\delta}^c$. En fait, d'après le corollaire 2 du lemme 2, il suffit de le prouver pour v dans un ouvert dense de $(i\mathfrak{a}^*) \cap \mathscr{H}_{j,\delta}^c$. Comme δ est une représentation unitaire, les exposants sont imaginaires purs sur $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}_\phi$ et la restriction de $E(P, \delta, \nu, \varphi, \eta)$ à G^o/H est tempérée si et seulement si sa restriction à $G_1/G_1 \cap H$ est tempérée. Maintenant $G = G_1 P$ car P rencontre toutes les composantes connexes de G (cf. [22], lemme 4.11). On note δ_1 la restriction de δ à $M_1 = M \cap G_1$. Comme par hypothèse $\exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{m})$ agit par un caractère sur V_δ on voit que $V_\delta^\infty = V_{\delta_1}^\infty$. Mais la restriction des fonctions de G à G_1 induit un isomorphisme topologique de $I_{\delta, \nu}^P$ sur $I_{\delta_1, \nu_1}^{P_1}$, où $P_1 = P \cap G_1$ et $\nu_1 = \nu_{|\mathfrak{a}_1}$, avec $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_1$. En outre cet isomorphisme entrelace $\pi_{\delta, \nu}^P$ et $\pi_{\delta_1, \nu_1}^{P_1}$ comme représentations de G_1. (cf. e.g. [41], § 11.4.1 pour plus de détails). De plus, $M/M_1 \exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{m})$ est fini car M/M^o est fini puisque M est dans la classe d'Harish-Chandra. On en déduit que δ_1 est une représentation unitaire de M_1, somme finie de représentations irréductibles, qui admet un caractère infinitésimal.

Étudions $HP \cap G_1$. Comme, par connexité, $H = (H \cap G_1)^o \exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h})$ et que $\exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h})$ est contenu dans P on voit que si $g \in HP$, on a $g = hp$ où $h \in (H \cap G_1)^o$, $p \in P$. Si on a de plus $g \in G_1$, on a $p \in P_1$. D'où $HP \cap G_1 = H_1 P_1$ où $H_1 := (H \cap G_1)^o$. Avec η comme dans l'énoncé du théorème on voit que η définit un élément de $(V_{\delta_1}^{-\infty})^{M_1 \cap H_1}$ de carré intégrable pour $M_1/(M_1 \cap H)$ grâce à la formule:

$$\forall f \in C_c(M/M \cap H), \int_{\exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{m})\, M_1(M \cap H)/M \cap H} f(m(M \cap H))\, d\dot{m}$$

$$= \int_{\exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k})} \int_{M_1/M_1 \cap H} f(km_1(M_1 \cap H))\, d\dot{m}_1\, dk$$

et au fait que $\exp(\mathfrak{z} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k})$, qui est compact, agit par un caractère unitaire sur η. La formule ci-dessus résulte de l'égalité

$$\mathfrak{z} \cap \mathfrak{m} = (\mathfrak{z} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{z} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}) \qquad \text{car} \qquad \mathfrak{z} \cap \mathfrak{m} \cap \mathfrak{q} \cap \mathfrak{s} = \{0\}.$$

Alors comme $HP \cap G_1 = H_1 P_1$, on voit que, dans l'isomorphisme entre $I_{\delta, \nu}^P$ et $I_{\delta_1, \nu_1}^{P_1}$, $j(P, \delta, \nu, \eta)$ se transporte sur $j(P_1, \delta_1, \nu_1, \eta)$, d'où l'on déduit aisément:

$$\forall \varphi \in (I_\delta)_{(K)}, \qquad E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)_{|G_1/G_1 \cap H} = E(P_1, \delta_1, \nu_1, \eta, \varphi_1)$$

où $\varphi_1 = \varphi_{|K \cap G_1}$ et où les deux membres sont définis simultanément. Si le théorème est vrai pour G_1 et H_1, on voit donc que, pour ν élément de $\{\xi \in (i\mathfrak{a}^*) \cap \mathscr{H}_{j,\delta}^c \mid \xi_{|\mathfrak{a}_1} \in \mathscr{H}_{j,\delta_1}^c\}$ (qui est un ouvert dense de $\mathscr{H}_{j,\delta}^c$), $E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)$ est tempérée. Ceci achève de prouver (ii). ∎

3.6. *Un cas particulier du théorème* 1

Définition 4. On suppose $\mathfrak{g}$ semi-simple. On dit que $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)^*$ est "bon", si pour tout $\mathscr{P}$ élément de $\mathscr{F}$ et tout w élément de $W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ on a $w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} \leqslant_{\mathscr{P}} 0$ dès que $w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} \leqslant_{\mathscr{P}} \rho_{\mathscr{P}}$.

LEMME 6. *Si $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)^*$, il existe $t_0 > 0$ tel que pour tout $t \geqslant t_0$, $t\Lambda$ est "bon".*

Démonstration. Soit w et $\mathscr{P}$ tels que $w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} \not\leqslant_{\mathscr{P}} 0$ i.e. $w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} = \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathscr{P})} n_\alpha \alpha$ avec au moins l'un des n_α, n_{α_0}, strictement positif. On écrit de même $\rho_{\mathscr{P}} = \sum_{\alpha \in \Sigma(\mathscr{P})} m_\alpha \alpha$. On choisit $t_{w,\mathscr{P}} \in \mathbb{R}^+$ tel que $t_{w,\mathscr{P}}(n_{\alpha_0}) > m_{\alpha_0}$. On prend $t_0 := \operatorname{Sup}\{t_{w,\mathscr{P}} \mid w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d),\ \mathscr{P} \in \mathscr{F},\ w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} \not\leqslant_{\mathscr{P}} 0\}$. On vérifie aisément que t_0 convient. ▮

Le lemme suivant est un cas particulier du théorème 1.

LEMME 7. *On suppose G semi-simple. Soit $\eta \in \mathscr{V}(\delta, e)$ de carré intégrable et propre sous $U(\mathfrak{m})^{\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}} / (U(\mathfrak{m})(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})) \cap (U(\mathfrak{m})^{\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}})$ pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)^*$. Si Λ est bon, pour tout $R > 0$, tout $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ et $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}$, $b_R(\nu)\, E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)$ est tempérée.*

Démonstration. Avec les notations de l'énoncé, comme $\nu \in i\mathfrak{a}^*$, $\pi_{\delta,\nu}^P$ est unitaire. Il résulte de [21], corollaire 2.2 que $E_R(\nu) := b_R(\nu)\, E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)$ est bornée sur G/H. Par ailleurs, $E_R(\nu)$ est propre sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre $\Lambda - \nu$ (cf. proposition 3). Utilisant (2.2.3) et le lemme 1, on en déduit que les exposants directeurs le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ ($\mathscr{P} \in \mathscr{F}$) de $E_R(\nu)$ sont de la forme $w(\Lambda - \nu)_{|\mathfrak{a}_\phi}$ où $w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ avec: $\operatorname{Re} w(\Lambda - \nu)_{|\mathfrak{a}_\phi} - \rho_{\mathscr{P}} \leqslant_{\mathscr{P}} 0$. Mais ν est imaginaire pur sur $\mathfrak{a}$ et Λ réel sur $\mathfrak{a}_M^d$. Comme w préserve $\mathfrak{a}^d$ on a: $\operatorname{Re} w(\Lambda - \nu) = w\Lambda$. Donc: $w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} - \rho_{\mathscr{P}} \leqslant_{\mathscr{P}} 0$. Comme $\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi}$ est bon (par hypothèse), on a: $w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} \leqslant_{\mathscr{P}} 0$, soit encore: $\operatorname{Re} w(\Lambda - \nu)_{|\mathfrak{a}_\phi} \leqslant_{\mathscr{P}} 0$, ce qui assure que $E_R(\nu)$ est tempérée. ▮

4. "INTÉGRALES D'EISENSTEIN" ET FONCTEURS DE TRANSLATION

4.1. *Projections selon les caractères infinitésimaux*

Si V est $\mathfrak{g}$-module sur lequel $Z(\mathfrak{g})$ agit de façon localement finie et χ est un caractère de $Z(\mathfrak{g})$ on notera:

$$V_\chi := \{v \in V \mid \exists k \in \mathbb{N}, \forall Z \in Z(\mathfrak{g}), (Z - \chi(Z))^k v = 0\}.$$

On note $\widehat{Z(\mathfrak{g})}$ l'ensemble des caractères de $Z(\mathfrak{g})$. Alors $V = \bigoplus_{\chi \in \widehat{Z(\mathfrak{g})}} V_\chi$ et l'on note p_χ^V ou p_χ le projecteur sur V_χ parallèlement à la somme des $V_{\chi'}$, $\chi' \neq \chi$. Si $\mathfrak{j}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $\lambda \in \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$ on note χ_λ le caractère de $Z(\mathfrak{g})$ obtenu par composition de l'homomorphisme d'Harish-Chandra, $\gamma_{\mathfrak{j}}$, suivi de l'évaluation en λ. Si $\chi = \chi_\lambda$ on dit que λ est un paramètre de Harish-Chandra de χ. On utilisera des notations similaires pour $\mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{m}$ en indice supérieur.

Le lemme suivant est une conséquence immédiate d'une observation de D. Vogan (cf. [41] lemme 10.A.1.6).

Lemme 8. *Soit V un $\mathfrak{g}$-module annulé par un idéal de codimension finie I de $Z(\mathfrak{g})$. Alors, pour tout $\chi \in \widehat{Z(\mathfrak{g})}$, il existe $Z_\chi^I \in Z(\mathfrak{g})$ tel que p_χ soit donné par l'action de Z_χ^I.*

Démonstration. On considère $\mathscr{M}_I$ la catégorie des $\mathfrak{g}$-modules annulés par I. La correspondance qui à V associe p_χ^V, pour V objet de $\mathscr{M}_I$, est une transformation naturelle du foncteur identique de $\mathscr{M}_I$. Alors l'existence de Z_χ^I résulte de [41], lemme 10.A.16.

Remarque 7. (i) On remarque que si $\chi_1, ..., \chi_p \in \widehat{Z(\mathfrak{g})}$ et $n_1, ..., n_p \in \mathbb{N}$, l'idéal de $Z(\mathfrak{g})$ engendré par $\{(Z-\chi_1(Z))^{n_1} \cdots (Z-\chi_p(Z))^{n_p} \mid Z \in Z(\mathfrak{g})\}$, est de codimension finie et que tout idéal de codimension finie de $Z(\mathfrak{g})$ contient un tel idéal. Pour démontrer la première partie de l'assertion on identifie $Z(\mathfrak{g})$ à $\mathbb{C}[X_1, ..., X_l]$. Si $\chi_i(P) = P(\lambda_i)$ l'idéal étudié contient:

$$J = \{P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_l] \mid \partial^\alpha/\partial X^\alpha P(\lambda_i) = 0 \text{ pour } |\alpha| \leqslant n_i, \text{ et } i = 1, ..., p\}.$$

Mais J est clairement de codimension finie. Pour la deuxième partie, il suffit d'étudier l'action de $Z(\mathfrak{g})$ sur $Z(\mathfrak{g})/I$ en opérant une trigonalisation simultanée de l'action de générateurs algébriquement indépendants de $Z(\mathfrak{g})$.

(ii) Avec les hypothèses du lemme, si V est en outre un G-module différentiable on voit que les p_χ sont continus et leurs images sont fermées.

4.2.

On fera dans la suite du § 4 les hypothèses suivantes. On suppose G connexe et semi-simple et l'on suppose données deux représentations unitaires (δ, V_δ), $(\tilde{\delta}, V_{\tilde{\delta}})$ de M de longueur finie, possédant un caractère infinitésimal. On suppose qu'il existe $\eta \in (V_{\delta}^{-\infty})^{M \cap H}$, $\tilde{\eta} \in (V_{\tilde{\delta}}^{-\infty})^{M \cap H}$ et une représentation de dimension finie de G, (π, F), dont le dual possède un vecteur non nul invariant par H, e_H^*, tels que:

$$\text{(a)}\quad \eta \text{ (resp. } \tilde{\eta}\text{) est propre sous } U(\mathfrak{m})^{\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}}/(U(\mathfrak{m})(\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h})) \cap (U(\mathfrak{m})^{\mathfrak{m} \cap \mathfrak{h}}) \text{ pour la valeur propre } \Lambda \text{ (resp. } \tilde{\Lambda}\text{).} \tag{4.2.1}$$

Alors le caractère infinitésimal de δ (resp. $\tilde{\delta}$) admet $-\Lambda_s$ (resp. $-\tilde{\Lambda}_s$) comme paramètre de Harish-Chandra (cf. (2.1.4) et (2.1.5)) où $\Lambda_s := \Lambda + \rho_{\mathfrak{m}^d}$ (resp. $\tilde{\Lambda}_s := \tilde{\Lambda} + \rho_{\mathfrak{m}^d}$).

(b) Notant F_1 le M-module F^N, on a un isomorphisme topologique de M-modules:

$$p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}(V_{\tilde{\delta}}^\infty \otimes F_1) \simeq V_\delta^\infty. \tag{4.2.2}$$

Dans la suite on se fixera un isomorphisme et on identifiera ces deux espaces. En particulier on écrira:

$$p^{\mathfrak{m}}_{A_s}(V^{\infty}_{\tilde{\delta}} \otimes F^*_1) = V^{\infty}_{\delta} \tag{4.2.3}$$

(c) Notant $e^*_{M,H}$ la restriction de e^*_H à F_1 (qui est non nulle, cf. par exemple [24] démonstration du théorème 4.1, eq (7), p. 537) on a:

$$(\tilde{\eta} \otimes e^*_{M,H})_{|V^{\infty}_{\delta}} = \eta. \tag{4.2.4}$$

On notera e_μ un vecteur non nul de poids extrémal sous $\mathfrak{j}, \mu$, tel que $e_\mu \in F^N$. On notera $\mu_1 = \mu_{|\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}}$ et $\nu_1 = \mu_{|\mathfrak{a}}$. On voit que F^N est irréductible sous MA, que $\mathfrak{a}$ agit sur F^N par ν_1 et que F_1 admet μ_1 comme poids extrémal. Enfin l'existence de e^*_H impose à μ d'être nul sur $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}$ (cf. [24], ch. V, théorème 4.1).

4.3. *Foncteurs de translation et séries principales généralisées*

Soit $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. On note Φ_ν, l'isomorphisme de G-modules entre $I^P_{\tilde{\delta},\nu} \otimes F$ et $I^P_{(V_{\tilde{\delta}})_\nu \otimes F}$ défini par:

$$\forall \varphi \in I^P_{\tilde{\delta},\nu}, \qquad \forall v \in F, \qquad \forall g \in G, \qquad (\Phi_\nu(\varphi \otimes v))(g) = \varphi(g) \otimes \pi(g^{-1})\, v \tag{4.3.1}$$

(cf. [14], eq. (4.2.2)).

On définit également un isomorphisme, Ψ_ν, de G-modules entre $\mathscr{D}'(G, P, \tilde{\delta}, \nu) \otimes F^*$ et $\mathscr{D}'(G, P, (V_{\tilde{\delta}})_\nu) \otimes F$ (que l'on identifie à un sous-espace de $\mathscr{D}'(G, V^{\infty}_{\tilde{\delta}}) \otimes F^*$) par la formule imagée:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G, P, \tilde{\delta}, \nu), \qquad \forall v^* \in F^*, \qquad \text{“}\Psi_\nu(\tau \otimes v^*)(g) \equiv \tau(g) \otimes \pi^*(g^{-1})\, v^*\text{”} \tag{4.3.2}$$

(cf. [14], lemme 12 (ii) pour plus de détails).

On vérifie sans peine que Ψ_ν est l'inverse du transposé Φ'_ν de Φ_ν.

On note i l'injection naturelle de $V^{\infty}_{\delta} = p^{\mathfrak{m}}_{-A_s}(V^{\infty}_{\tilde{\delta}} \otimes F_1)$ dans $V^{\infty}_{\tilde{\delta}} \otimes F$.

Celle-ci induit un morphisme continu de P-modules entre $(V^{\infty}_{\delta})_{\nu+\nu_1}$ et $(V^{\infty}_{\tilde{\delta}})_\nu \otimes F$.

Proposition 4. *Il existe un polynôme non identiquement nul sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, q, tel que si $q(\nu) \neq 0$ on ait*:

(i) Ind i (*resp.* $\Phi_\nu^{-1} \circ$ Ind i) *est un isomorphisme topologique de* G*-modules entre* $I^P_{\delta,\nu+\nu_1}$ *et* $p_{-A_s+\nu+\nu_1}(I^P_{(V_{\tilde{\delta}})_\nu \otimes F})$ (*resp.* $p_{-A_s+\nu+\nu_1}(I^P_{\tilde{\delta},\nu} \otimes F)$).

On notera $\tilde{\imath} := \Phi_\nu^{-1} \circ$ Ind i.

(ii) *Le morphisme de G-modules transposé de* Ind i (*resp.* $\tilde{\imath}$), (Ind i)$'$ (*resp.* $\tilde{\imath}'$), *entre* $\mathscr{D}'(G, P, (V_{\tilde{\delta}})_\nu \otimes F)$ (*resp.* $\mathscr{D}'(G, P, \tilde{\delta}, \nu) \otimes F^*$) *et* $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\nu_1)$, *induit un isomorphisme topologique de l'image de* $p_{\Lambda_s-\nu-\nu_1}$ *sur* $\mathscr{D}'(G, P, \delta, \nu+\nu_1)$. *De plus* $\tilde{\imath}' = (\mathrm{Ind}\, i)' \circ \Psi_\nu$.

Démonstration. On considère une suite de Jordan Hölder du P-module F, $0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_r = F$. On peut supposer que chaque F_i a un supplémentaire MA-invariant et irréductible dans F_{i+1}, (utiliser l' "unitary trick"). Les sous-quotients simples F_i/F_{i-1} sont de la forme $(V_i)_{\nu_i}$ où ν_i est un poids de $\mathfrak{a}$ dans F et V_i est un M-module simple. En particulier on a l'identité de P-modules: $F_1 = (F_1)_{\nu_1}$.

Introduisons une suite de Jordan Hölder topologique (i.e. les éléments de la filtration sont fermés et topologiquement irréductibles) du M-module de Harish-Chandra $V_{\tilde{\delta}}^\infty \otimes V_i = (V_{\tilde{\delta}} \otimes V_i)^\infty$ (cf. (1.1.1)) à croissance modérée (cf. (1.2.4)) construite à l'aide d'une suite de Jordan Hölder du $(\mathfrak{m}, M \cap K)$)-module des vecteurs $M \cap K$-finis et de la proposition 1. On notera $V_{i,j}$ les sous-quotients irréductibles de celle-ci. Alors en utilisant le fait que le foncteur $V \to I_V^P$ transforme les suites exactes fortes de P-modules différentiables en suites exactes fortes de G-modules (cf. (3.1.13)), l'exactitude forte de toute suite exacte de M-modules de Harish-Chandra à croissance modérée (cf. proposition 1 et (3.1.13)), l'isomorphisme Φ_ν entre $I_{\tilde{\delta},\nu}^P \otimes F$ et $I_{(V_{\tilde{\delta}})_\nu \otimes F}^P$, l'égalité $I_{(V_{\tilde{\delta}})_\nu \otimes F}^P = I_{(V_{\tilde{\delta}}^\infty)_\nu \otimes F}^P$ (cf. 1.1.1) et (3.1.3), on voit que $I_{\tilde{\delta},\nu}^P \otimes F$ possède une suite de composition dont les sous-quotients sont les $I_{(V_{i,j})_{\nu+\nu_i}}^P$. Soit $\Lambda_{i,j}$ le paramètre de Harish-Chandra du caractère infinitésimal de $V_{i,j}$. Alors $I_{(V_{i,j})_{\nu+\nu_i}}^P$ a pour caractère infinitésimal $\chi_{\Lambda_{i,j}+\nu+\nu_i}$.

Montrons que si $\chi_{\Lambda_{i,j}} \neq \chi_{-\Lambda_s}$ ou bien si $i \neq 1$, il existe un polynôme $p_{i,j}$ non nul sur $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$ invariant sous $W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ tel que:

$$q_{i,j}(\nu) := p_{i,j}(\Lambda_{ij} + \nu_i + \nu) - p_{i,j}(-\Lambda_s + \nu_1 + \nu)$$

soit un polynôme sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ non identiquement nul. Si $p_{i,j}$ n'existait pas on aurait $\chi_{\Lambda_{i,j}+\nu_i+\nu} = \chi_{-\Lambda_s+\nu_1+\nu}$ pour tout $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Mais alors $\Lambda_{i,j}+\nu_i+\nu$ et $-\Lambda_s+\nu_1+\nu$ sont conjugués par un élément de $W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ pour tout $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. Grâce à la propriété de Baire de $\mathfrak{a}^*$ et la finitude de $W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$, on voit:

$$\exists w \in W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}), \qquad \forall \nu \in \mathfrak{a}^*, \qquad w\nu = \nu, \qquad \nu_i = \nu_1 \qquad \text{et} \qquad w\Lambda_{i,j} = -\Lambda_s.$$

Donc $i = 1$. De plus on a $w \in W(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m})_{\mathbb{C}})$ et $\chi_{\Lambda_{i,j}} = \chi_{-\Lambda_s}$, ce qui prouve l'existence de $p_{i,j}$. On note q le produit des $p_{i,j}$.

Soit $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $q(\nu) \neq 0$. On va utiliser l'identité $(V_{\tilde{\delta}}^\infty)_\nu \otimes F = ((V_{\tilde{\delta}}^\infty)_\nu \otimes F)^\infty$ (cf. (1.1.1)) et l'identité $I_V^P = I_{V^\infty}^P$, pour tout P-module de Fréchet V (cf. (3.1.3)). Alors la suite:

$$0 \to V_{\tilde{\delta}}^\infty \xrightarrow{\ i\ } V_{\tilde{\delta}}^\infty \otimes F \to (V_{\tilde{\delta}}^\infty \otimes F)/\mathrm{Im}\, i \to 0$$

est une suite exacte forte de M-modules de Harish-Chandra à croissance modérée car, d'après la proposition 1, l'image de i est fermée et toute suite exacte est forte. Comme l'application i est un morphisme de P-modules entre $(V_{\delta}^{\infty})_{\nu+\nu_1}$ et $(V_{\delta}^{\infty})_{\nu}\otimes F$, on dispose d'une suite exacte forte de P-modules:

$$0\to (V_{\delta}^{\infty})_{\nu+\nu_1}\xrightarrow{i}(V_{\tilde{\delta}}^{\infty})_{\nu}\otimes F\to((V_{\tilde{\delta}}^{\infty})_{\nu}\otimes F)/\mathrm{Im}\, i\to 0$$

qui, par induction (cf. (3.1.13)) donne une suite exacte forte:

$$0\to I_{\delta,\,\nu+\nu_1}^{P}\xrightarrow{\mathrm{Ind}\, i} I^{P}_{(V_{\tilde{\delta}}^{\infty})_{\nu}\otimes F}\to I^{P}_{((V_{\tilde{\delta}}^{\infty})_{\nu}\otimes F)/\mathrm{Im}\, i}\to 0.$$

Grâce aux propriétés de q on voit que tous les sous-quotients d'une suite de composition topologique de $I^{P}_{((V_{\tilde{\delta}}^{\infty})_{\nu}\otimes F)/\mathrm{Im}\, i}$ ont des caractères infinitésimaux différents de $\chi_{-\Lambda_s+\nu+\nu_1}$. De l'exactitude du foncteur $V\to V_{\chi}$ (où $\chi\in\hat{Z}(\mathfrak{g})$ et V est dans la catégorie des modules $Z(\mathfrak{g})$-localement finis) on déduit que: $p_{-\Lambda_s+\nu+\nu_1} I^{P}_{((V_{\tilde{\delta}}^{\infty})_{\nu}\otimes F)/\mathrm{Im}\, i}=\{0\}$ puis que Ind i induit un isomorphisme de G-modules entre $I^{P}_{\delta,\,\nu+\nu_1}$ et $p_{-\Lambda_s+\nu+\nu_1}(I^{P}_{(V_{\tilde{\delta}}^{\infty})_{\nu}\otimes F})$. D'après le théorème du graphe fermé c'est un isomorphisme topologique. Ceci, compte tenu des propriétés de Φ_{ν}, prouve (i). Alors (ii) s'en déduit par transposition, en tenant compte des propriétés de Ψ_{ν}. ∎

Proposition 5. *Soit* $\nu\in\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^{*}$, *tel que* $q(\nu)\neq 0$, $\nu\notin\mathscr{H}_{j,\,\tilde{\delta}}$, $\nu+\nu_1\notin\mathscr{H}_{j,\,\delta}\cup\mathscr{H}_{ev,\,\delta}$.

Alors, on a:

$$(\tilde{\imath}')((p_{\Lambda_s-\nu-\nu_1})(j(P,\tilde{\delta},\nu,\tilde{\eta})\otimes e_H^{*}))=j(P,\delta,\nu+\nu_1,\eta)$$

(*cf.* § (3.2.5) *et* (3.2.7) *pour la définition de* $\mathscr{H}_{j,\,\delta}$, $\mathscr{H}_{ev,\,\delta}$, *et la proposition précédente pour la définition de* $\tilde{\imath}$).

Démonstration. Avec nos hypothèses les deux membres de l'égalité à prouver ont un sens et sont des éléments de $\mathscr{D}'(G,P,\delta,\nu+\nu_1)^{H}$ dont il faut comparer l'image par *ev*. Mais on a: $\tilde{\imath}'\circ p_{\Lambda_s-\nu-\nu_1}=p_{\Lambda_s-\nu-\nu_1}\circ\tilde{\imath}'$ et comme $\mathscr{D}'(G,P,\delta,\nu+\nu_1)$ admet $\chi_{\Lambda_s-\nu-\nu_1}$ comme caractère infinitésimal, on en déduit: $\tilde{\imath}'\circ p_{\Lambda_s-\nu-\nu_1}=\tilde{\imath}'$. Alors grâce à la définition de $\tilde{\imath}'$ et Ψ_{ν}, ainsi qu'aux propriétés de $(\mathrm{Ind}\, i)'$ (cf. (3.1.9)), on voit que:

$$\forall w\in\mathscr{W},\qquad ev_w(\tilde{\imath}'(j(P,\tilde{\delta},\nu,\tilde{\eta})\otimes e_H^{*}))=i'(ev_w(j(P,\tilde{\delta},\nu,\tilde{\eta}))\otimes\pi^{*}(w^{-1})\,e_H^{*}).$$

Ceci est égal à 0 pour $w\neq e$ et à $\tilde{\imath}'(\tilde{\eta}\otimes e_H^{*})$ pour $w=e$. Mais i est l'application canonique $V_{\delta}^{\infty}=p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}(V_{\tilde{\delta}}^{\infty}\otimes F_1)\xrightarrow{i} V_{\tilde{\delta}}^{\infty}\otimes F$ et (4.2.4) implique: $i'(\tilde{\eta}\otimes e_H^{*})=\eta$.

D'où il résulte que les images par *ev* des deux membres de l'égalité à démontrer sont égales. D'après les propriétés de *ev* et le fait que $\nu+\nu_1\notin\mathscr{H}_{ev,\,\delta}$, ceci implique l'égalité voulue. ∎

Soit f est une fonction C^∞ sur G/H annulée par un idéal de codimension finie I de $Z(\mathfrak{g})$. Alors le sous-G-module fermé de $C^\infty(G/H)$ engendré par f, noté V, vérifie les hypothèses du lemme 8. En particulier pour χ caractère de $Z(\mathfrak{g})$, on peut définir $p_\chi^V(f)$ que l'on notera $p_\chi(f)$. Alors f est égale à $\sum_{\chi \in \widehat{Z(\mathfrak{g})}} p_\chi(f)$, où la somme ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls.

De plus $p_\chi(f) = L_{Z_\chi^I} f$, où $Z_\chi^I \in Z(\mathfrak{g})$ (cf. lemme 8).

Proposition 6. *Notons pour $v \in F$, $\tilde{v}$ la fonction C^∞ sur G/H définie par $\tilde{v}(gH) := \langle \pi^*(g)\, e_H^*, v \rangle$. Soit $v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ tel que $q(v) \neq 0$, $v \notin \mathscr{H}_{j,\tilde{\delta}}$, $v + v_1 \notin \mathscr{H}_{j,\delta} \cup \mathscr{H}_{ev,\delta}$.*

Alors:

$$\text{(i)}\quad \forall \varphi \in I_{\tilde{\delta}}, \qquad \forall v \in F, \qquad p_{-\Lambda_s + v + v_1}((E(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta}, \varphi))(\tilde{v}))$$
$$= E(P, \delta, v + v_1, \eta, (\tilde{\imath}^{-1}(p_{-\Lambda_s + v + v_1}(\tilde{\varphi}_v \otimes v)))^-).$$

Ici on considère l'inverse de $\tilde{\imath}$ qui est défini sur l'image de $\tilde{\imath}$ (cf. proposition 4). De plus l'application $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}_v$ de $I_{\tilde{\delta}}$ dans $I_{\tilde{\delta}, v}^P$ (resp. $\psi \mapsto \overline{\psi}$ de $I_{\delta, v+v_1}^P$ dans I_δ) a été définie au § 3.1.

(ii) *Soit $V(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta}) = \{E(P, \delta, v, \eta, \varphi) \mid \varphi \in (I_{\tilde{\delta}})_{(K)}\}$. C'est un sous $(\mathfrak{g}, K)$-module d'Harish-Chandra de $C^\infty(G/H)$. On introduit de même $V(P, \delta, v + v_1, \eta)$. On note $\tilde{F} = \{\tilde{v} \mid v \in F\}$ qui est un sous G-module de $C^\infty(G/H)$. On note $V(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta})) \cdot \tilde{F}$ l'espace vectoriel engendré par les produits des éléments de $V(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta})$ et $\tilde{F}$. C'est un sous $(\mathfrak{g}, K)$-module de Harish-Chandra de $C^\infty(G/H)$.*

(iii) *On a*:

$$p_{-\Lambda_s + v + v_1}(V(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta}) \cdot \tilde{F}) = V(P, \delta, v + v_1, \eta).$$

Démonstration. Prouvons (i). Soit Φ le produit des fonctions C^∞ sur G/H, $E(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta})$ et $\tilde{v}$. Alors:

$$\forall g \in G, \qquad \Phi(gH) = \langle ((\pi_{\tilde{\delta}, v}^P)'\,(g) \otimes \pi^*(g))(j(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta}) \otimes e_H^*), \tilde{\varphi}_v \otimes v \rangle.$$

L'effet de $p_{-\Lambda_s + v + v_1}$ sur Φ est alors facile à calculer en fonction de l'action de $p_{-\Lambda_s + v + v_1}$ sur $I_{\tilde{\delta}, v}^P \otimes F$:

$$\forall g \in G, \qquad (p_{-\Lambda_s + v + v_1} \Phi)(gH) = \langle (((\pi_{\tilde{\delta}, v}^P)' \otimes \pi^*)(g))(j(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta})) \otimes e_H^*),$$
$$p_{-\Lambda_s + v + v_1}(\tilde{\varphi}_v \otimes v) \rangle.$$

Utilisant le fait que $p_{-\Lambda_s+\nu+\nu_1}$ est un projecteur de $I^P_{\tilde{\delta},\nu}\otimes F$, de transposé $p_{\Lambda_s-\nu-\nu_1}$, on en déduit:

$$\begin{aligned}\forall g\in G, \qquad (p_{-\Lambda_s+\nu+\nu_1}\Phi)(gH) &\\ = \langle (((\pi^P_{\tilde{\delta},\nu})(\otimes\pi^*)(g))(p_{\Lambda_s-\nu-\nu_1}((j(P,\tilde{\delta},\nu,\tilde{\eta}))\otimes e^*_H)),&\\ p_{-\Lambda_s+\nu+\nu_1}(\tilde{\varphi}_\nu\otimes v)\rangle.&\end{aligned}$$

De la proposition 5, on déduit:

$$\begin{aligned}(p_{-\Lambda_s+\nu+\nu_1}\Phi)(gH) = \langle (((\pi^P_{\tilde{\delta},\nu})'\otimes\pi^*)(g))(\tilde{\imath}'^{-1}(j(P,\delta,\nu+\nu_1,\eta))),&\\ p_{-\Lambda_s+\nu+\nu_1}(\tilde{\varphi}_\nu\otimes v)\rangle.&\end{aligned}$$

Ici, on regarde $\tilde{\imath}'$ comme une bijection de $p_{\Lambda_s-\nu-\nu_1}((I^P_{\tilde{\delta},\nu})'\otimes F^*)$ sur $(I^P_{\delta,\nu+\nu_1})'$ (cf. proposition 4 (ii)). En transposant $\tilde{\imath}'^{-1}$ (après commutation avec $((\pi^P_{\tilde{\delta},\nu})'\otimes\pi^*)(g)$) on obtient (i).

Pour (ii) on remarque que $V(P,\tilde{\delta},\nu,\tilde{\eta})$ (resp, $V(P,\delta,\nu+\nu_1,\eta)$) est un quotient du $(\mathfrak{g},K)$-module de Harish-Chandra $(I^P_{\tilde{\delta},\nu})_{(K)}$ (resp. $(I^P_{\delta,\nu+\nu_1})_{(K)}$.

De même $V(P,\tilde{\delta},\nu,\tilde{\eta})\cdot\tilde{F}$ est un quotient de $(I^P_{\tilde{\delta},\nu})_{(K)}\otimes F$.

Pour (iii) on remarque d'abord que si (π,V) est un G-module différentiable, dans un Fréchet, annulé par un idéal de codimension finie de $Z(\mathfrak{g})$, on a:

$$\forall\chi\in Z(\mathfrak{g}), p_\chi(V_{(K)})=(p_\chi V)_{(K)}. \tag{4.3.3}$$

D'autre part:

$$(V\otimes F)_{(K)} = V_{(K)}\otimes F. \tag{4.3.4}$$

En effet, $V_{(K)}\otimes F\subset (V\otimes F)_{(K)}$. D'autre part, soit $T\in\mathrm{Hom}_K(E,V\otimes F)$ où E est un K-module de dimension finie. On définit $T_1\in\mathrm{Hom}_K(E\otimes F^*,V)$ par:

$$\forall e\in E, \qquad \forall v^*\in F^*, \qquad (T_1(e\otimes v^*))=\langle T(e),v^*\rangle\in V.$$

Alors l'image de T_1, V_1, est contenue dans $V_{(K)}$ et celle de T est contenue dans $V_1\otimes F$. Ceci achève de prouver (4.3.4).

Donc, grâce à la proposition 4, on a:

$$\tilde{\imath}^{-1}(p_{-\Lambda_s+\nu+\nu_1}((I^P_{\tilde{\delta},\nu})_{(K)}\otimes F))=(I^P_{\delta,\nu+\nu_1})_{(K)}.$$

Maintenant, (iii) résulte de (i). ∎

5. Séries discrètes pour les espaces symétriques réductifs et foncteurs de translation

5.1.

On se propose de réunir les conditions de 4.2 pour des séries discrètes de $M/M\cap H$.

On commence par compléter, dans le numéro suivant, un résultat de D. Vogan ([40], p. 207, 208). Précisons certaines notations.

Si $\Lambda\in(\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ on note V^∞_Λ ou $V^\infty_{G,\Lambda}$ le sous-espace de $L^2(G/H, d\dot{g})$ formé des vecteurs C^∞ pour l'action régulière gauche de G et qui sont propres sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre Λ. On notera V_Λ l'adhérence de V^∞_Λ dans $L^2(G/H)$ qui est un sous-espace invariant sur lequel G agit par une représentation unitaire π_Λ. De plus, l'espace des vecteurs C^∞ de V_Λ, $(V_\Lambda)^\infty$, vérifie:

$$(V_\Lambda)^\infty=V^\infty_\Lambda. \tag{5.1.1}$$

En effet, on a clairement $V^\infty_\Lambda\subset(V_\Lambda)^\infty$ et V^∞_Λ est égal à l'espace $\{f\in(V_\Lambda)^\infty \mid f \text{ est } \mathbb{D}(G/H)\text{-propre pour la valeur propre } \Lambda\}$. Comme V_Λ est un facteur direct de $L^2(G/H)$, $(V_\Lambda)^\infty$ est un sous-espace fermé de $L^2(G/H)^\infty$. Les éléments de $\mathbb{D}(G/H)$ agissant continument sur $L^2(G/H)^\infty$ (cf. [3], lemme 1.1), on en déduit que V^∞_Λ est fermé dans $(V_\Lambda)^\infty$. Par ailleurs utilisant le théorème 1.3 de [35] avec $\mathbb{B}=V_\Lambda$ et $\mathbb{D}=V^\infty_\Lambda$ on voit que V^∞_Λ est dense dans $(V_\Lambda)^\infty$. D'où (5.1.1).

Je remercie le referee de cette simplification de ma démonstration de (5.1.1).

D'après [3], théorème 1.5, toute série discrète de G/H (i.e. sous-représentation irréductible de $L^2(G/H)$) est contenue dans une somme finie de V_Λ et (cf. l.c., théorème 3.1):

> Chaque V_Λ est la somme directe d'un nombre fini de représentations unitaires irréductibles de G. (5.1.2)

On notera η_Λ le vecteur distribution de V_Λ donné par l'évaluation en eH des éléments de V^∞_Λ. On remarque que:

$$V_\Lambda=V_{\Lambda'} \text{ dès que } \Lambda \text{ et } \Lambda' \text{ sont conjugués sous } W(\mathfrak{g}^d,\mathfrak{a}^d). \tag{5.1.3}$$

5.2. *Séries discrètes pour G/H et foncteurs de translation, lorsque G est semi-simple connexe de centre fini*

On rappelle le choix de P (§ 1.4) et celui de $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{a}^d$, $\Delta^+(\mathfrak{m}^d, \mathfrak{j}\cap\mathfrak{h})$ (cf. fin du paragraphe 2.1).

On choisit pour la suite de l'article un ensemble de racines positives $\Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ (resp. $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$) de $\Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ (resp. $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$) de telle sorte que:

$$\begin{aligned} &\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}) && \text{si et seulement si:} \\ &\alpha_{|\mathfrak{a}^d} \neq 0 \quad \text{et} && \alpha_{|\mathfrak{a}^d} \in \Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d), \quad \text{ou bien} \\ &\alpha_{|\mathfrak{a}^d} = 0 \quad \text{et} && \alpha_{|\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}} \in \Delta^+(\mathfrak{m}^d, \mathfrak{j} \cap \mathfrak{h}). \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

On suppose en outre que si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ et $\alpha_{|\mathfrak{a}} \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$ on a $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$.

On rappelle brièvement la "dualité" de Flensted-Jensen dans un cadre légèrement plus général que celui de [20], § 2. Cette extension est nécessaire à notre propos.

On suppose dans ce numéro et jusqu'à nouvel ordre que G est semi-simple connexe de centre fini et H connexe. On note $G_{\mathbb{C}}$ le groupe semi-simple, connexe, simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et G^d, H^d, K^d, $\underline{G}$, $\underline{H}$, $\underline{K}$ les sous-groupes analytiques de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbres de Lie $\mathfrak{g}^d$, $\mathfrak{h}^d$, $\mathfrak{k}^d$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$.

On note M^d le centralisateur dans K^d de $\mathfrak{a}^d$, $A^d := \exp \mathfrak{a}^d$ et $P^d = M^d A^d N^d$ le sous-groupe parabolique minimal de G^d tel que $\Delta(\mathfrak{n}^d, \mathfrak{a}^d) = \Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$.

On note $\tilde{G}$ le revêtement universel de G et $\pi_1 : \tilde{G} \to G$, $\pi_2 : \tilde{G} \to \underline{G}$, les projections canoniques. On note $\tilde{K}$ (resp. $H^\sim$) les sous-groupes analytiques de $\tilde{G}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$ (resp. $\mathfrak{h}$). D'après [28], corollaire 1, page 161:

$$\begin{array}{l} \text{les applications de } (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}) \times (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}) \times K \text{ (resp. } \underline{K}, \tilde{K}) \\ \text{dans } G \text{ (resp. } \underline{G} \text{ resp. } \tilde{G}) \text{ de même que l'application} \\ \text{de } (i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})) \times (\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}) \times K^d \text{ dans } G^d, \text{ définies par:} \\ (X, Y, k) \mapsto (\exp X)(\exp Y)\, k, \text{ sont des difféomorphismes.} \end{array} \tag{5.2.2}$$

On en déduit que H est homéomorphe à $(K \cap H) \times \exp \mathfrak{s} \cap \mathfrak{h}$. Donc $K \cap H$ est connexe puisque H est connexe. De même, on voit que $\underline{K} \cap \underline{H}$, $\tilde{K} \cap H^\sim$ et $K^d \cap G^d$ sont connexes. Alors $\underline{K} \cap \underline{H}$ et $K^d \cap G^d$ sont des sous-groupes fermés de $G_{\mathbb{C}}$ (car K^d et $\underline{K}$ sont fermés dans G^d et $\underline{G}$, et $\underline{G}$ (resp. H^d, $\underline{H}$) sont fermés dans $G_{\mathbb{C}}$ (resp. G^d, $\underline{H}$) comme sous-groupes ouverts du groupe des points fixes d'une involution. De plus, ils ont même algèbre de Lie. Donc: $K^d \cap H^d = \underline{K} \cap \underline{H}$. De même, $\tilde{K} \cap H^\sim$ est fermé dans $\tilde{G}$. On dispose alors de morphismes canoniques surjectifs: $\bar{\pi}_1 : \tilde{K} \cap H^\sim \to K \cap H$, $\bar{\pi}_2 : \tilde{K} \cap H^\sim \to \underline{K} \cap \underline{H}$, induits par π_1 et π_2. On sait que $\operatorname{Ker} \pi_1$ et $\operatorname{Ker} \pi_2$ sont contenus dans le centre de $\tilde{G}$, $Z(\tilde{G})$.

Soit $\hat{K}(H) = \{\mu \in \hat{K} \mid \mu \text{ est triviale sur } Z(G) \cap K \cap H\}$. Alors $\tilde{\mu} = \mu \circ \bar{\pi}_1$ est une représentation de $\tilde{K} \cap H^\sim$, triviale sur $Z(\tilde{G}) \cap \tilde{K} \cap H^\sim$ qui contient $\operatorname{Ker} \bar{\pi}_2$. Alors $\tilde{\mu}|_{\tilde{K} \cap H^\sim} = \underline{\mu} \circ \bar{\pi}_2$ où $\underline{\mu}$ est une représentation de $\underline{K} \cap \underline{H}$ $(= K^d \cap H^d)$. Par prolongement $\mathbb{C}$-linéaire à $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ de la différetielle de μ et restriction à $\mathfrak{h}^d$ on obtient une représentation μ^d de $\mathfrak{h}^d$ qui coïncide sur

$\mathfrak{k}^d \cap \mathfrak{h}^d$ avec la différentielle de $\underline{\mu}$. Comme $H^d = (K^d \cap H^d) \exp i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q})$, on en déduit qu'il existe une représentation irréductible de dimension finie de H^d de différentielle μ^d, qu'on notera encore μ^d. On notera: $\hat{H}^d(K) = \{\mu^d \mid \mu \in \hat{K}(H)\}$. Remarquez que $\hat{H}^d(K) \not\subset \hat{H}^d$.

On notera, pour $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$, $\mathscr{A}(G/H, \Lambda)_{(K)}$ l'espace des éléments K-finis de $\mathscr{A}(G/H, \Lambda)$ (cf. § 2.3 pour la définition de $\mathscr{A}(G/H, \Lambda)$). De façon analogue, on note $\mathscr{A}(G^d/K^d, \Lambda)$ l'espace des fonctions C^∞ sur G^d/K^d propres sous $\mathbb{D}(G^d/K^d) \approx \mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre Λ. Si $\mu \in \widehat{H^d}(K)$ on notera $\mathscr{A}(G^d/K^d, \Lambda)^\mu$ l'espace des éléments de $\mathscr{A}(G^d/K^d, \Lambda)$ qui se transforment par un multiple de μ sous H^d. On notera:

$$\mathscr{A}(G^d/K^d, \Lambda)_{(H^d, K)} = \bigoplus_{\mu \in \widehat{H^d}(K)} \mathscr{A}(G^d/K^d, \Lambda)^\mu. \tag{5.2.3}$$

Alors la correspondance de Flensted Jensen définit un morphisme de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-modules bijectif $f \mapsto f^d$ entre $\mathscr{A}(G/H, \Lambda)_{(K)}$ et $\mathscr{A}(G^d/K^d, \Lambda)_{(H^d, K)}$.

Rappelons la définition de f^d pour $f \in C^\infty(G/H)_{(K)}$. On définit une application F_f de G/H dans $C^\infty(K)$ par:

$$\forall x \in G/H, \qquad \forall k \in K, \qquad (F_f(x))(k) = f(k^{-1}x). \tag{5.2.4}$$

Si f est de type $\mu \in \hat{K}$ sous K, F_f est à valeurs dans l'espace V_1 engendré par les coefficients de la représentation μ. Il est clair que V_1 est isomorphe à $V_\mu \otimes V_\mu^*$, où V_μ est l'espace de μ. Si $f \neq 0$ on voit que $\mu \in \hat{K}(H)$.

Alors on a une bijection entre V_1 et l'espace engendré par les coefficients de la représentation μ^d de H^d, V_2, qui associe au coefficient de μ, $g \mapsto \langle \mu(g)\, v, v^* \rangle$, pour $(v, v^*) \in V_p \times V_p^*$, le coefficient de μ^d, $g \mapsto \langle \mu^d(g)\, v, v^* \rangle$. On la note $\varphi \mapsto \varphi^d$. Alors f^d est caractérisée par:

$$\forall a \in \exp \mathfrak{a}_\phi, \qquad \forall h \in H^d, \qquad f^d(haK^d) = (F_f(a))^d\,(h^{-1}). \tag{5.2.5}$$

On rappelle la définition de la transformation de Poisson $\mathscr{P}_\Lambda$ qui est un morphisme de G-modules entre $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \Lambda)$ (cf. (3.1.18) pour la notation) et $\mathscr{A}(G^d/K^d, \Lambda)$. On note 1_Λ l'élément de $I_\Lambda^{P^d}$ qui est identiquement égal à 1 sur K^d et l'on a:

$$\forall g \in G^d, \qquad \forall \tau \in \mathscr{D}'(G^d/P^d, \Lambda), \qquad (\mathscr{P}_\Lambda \tau)(g) = \langle \pi_\Lambda^{P^d}(g)\, 1_\Lambda, \tau \rangle.$$

Soit $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ tel que V_Λ soit non nul. Alors:

$$\Lambda \in (\mathfrak{a}^d)^* \text{ (i.e. } \Lambda \text{ est réel sur } \mathfrak{a}^d\text{) et } \Lambda \text{ est régulier par rapport à } \Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d) \tag{5.2.6}$$

(c.f. [33], § 1 théorème (i), (iii) et note p. 388). De plus, (cf. l.c.) il existe un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{q}$ contenu dans $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$, $\mathfrak{t}'$. On notera $\mathfrak{a}'^d := i\mathfrak{t}'$. C'est un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{s}^d$. On peut en outre choisit $x_1, ..., x_p \in K^d$ tels que $\mathrm{Ad}(x_j)\, \mathfrak{a}^d = \mathfrak{a}'^d$ et que $\{H^d x_j P^d \mid j = 1, ..., p\}$ soit l'ensemble des (H^d, P^d)-doubles classes fermées dans G^d. On définit:

$$\mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \Lambda)_{(H^d, K)} = \{\tau \in \mathscr{D}'(G^d, P^d, \Lambda) \mid \mathrm{Supp}\,\tau \subset H^d x_j P^d \text{ et } \tau \text{ se transforme sous } H^d \text{ par une représentation de dimension finie de } H^d \text{ qui est somme directe d'éléments de } \widehat{H^d}(K)\}. \tag{5.2.7}$$

Alors si V_Λ est non nul, on a un isomorphisme de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-modules:

$$T\colon \bigoplus_{j=1}^{p} \mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \Lambda)_{(H^d, K)}\ (\subset \mathscr{D}'(G^d, P^d, \Lambda)) \to (V_\Lambda)_{(K)} \tag{5.2.8}$$

donné par:

$$\tau \mapsto (\mathscr{P}_\Lambda(\tau))^d \tag{5.2.9}$$

qui est bien défini par $\mathscr{P}_\Lambda(\tau) \in \mathscr{A}_{(H^d, K)}(G^d/K^d, \Lambda)$.

Pour ce qui précède cf. l.c. § 1, théorème, dans lequel on a remplacé les hyperfonctions par des distributions, grâce aux résultats de E. van den Ban et H. Schlichtkrull (cf. [6], théorème 12.2 et théorème 14.1). Notons en abrégé $\mathscr{D}'^j$ pour $\mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \Lambda)_{(H^d, K)}$. Comme $f^d(e) = f(e)$ et $\mathscr{P}_\Lambda(\tau)(e) = \langle \tau, 1_\Lambda \rangle$, on a:

$$\forall \tau \in \bigoplus_{j=1}^{p} \mathscr{D}'^j, \qquad \eta_\Lambda(T(\tau)) = \langle \tau, 1_\Lambda \rangle. \tag{5.2.10}$$

La proposition suivante contient et précise un résultat de D. Vogan ([40], p. 207, 208).

PROPOSITION 7. *On suppose toujours G semi-simple connexe de centre fini mais H n'est plus supposé connexe. Soit $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ tel que V_Λ soit non nul. Alors Λ est réel sur $\mathfrak{a}^d$ et régulier par rapport à $\Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ (cf. (5.2.6)). On peut supposer Λ dominant par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ (cf. (5.1.3)), ce que l'on fera dans la suite.*

(i) *Soit (π, F) une représentation de dimension finie de G de plus haut poids $\mu(\in \mathfrak{j}^*_{\mathbb{C}})$ relativement à $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ possédant une forme linéaire non nulle invariante par H. On en choisit une que l'on note e^*_H. On note $\tilde{\Lambda} = \Lambda + \mu_{|\mathfrak{a}^d}$ et $\Lambda_s = \Lambda + \rho_{\mathfrak{m}^d}$.*

Soit t l'application de $(V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty} \otimes F)$ dans $C^{\infty}(G/H)$ définie par:

$$\forall v \in F, \qquad \forall \varphi \in V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty}, \qquad t(\varphi \otimes v) = p_{-\Lambda_s}(\varphi \cdot \tilde{v}),$$

où $\tilde{v}$ est la fonction sur G/H définie par: $\tilde{v}(gH) = \langle \pi^*(g)\, e_H^*, v \rangle$ pour g élément de G. Alors t est un morphisme continu de G-modules qui vérifie $t \circ p_{-\Lambda_s} = t$.

(ii) *Le morphisme de G-modules t induit un isomorphisme topologique de G-modules entre $p_{-\Lambda_s}(V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty} \otimes F)$ et V_{Λ}^{∞}.*

(iii) *De plus, le transposé de cet isomorphisme transporte η_{Λ} sur $p_{\Lambda_s}(\eta_{\tilde{\Lambda}} \otimes e_H^*)$, soit encore: $\eta_{\Lambda} \circ t = (\eta_{\tilde{\Lambda}} \otimes e_H^*) \circ p_{-\Lambda_s}$, pour un bon choix de e_H^*.*

(iv) *Il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $p_0 \Lambda$, regardé comme élément de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*$, soit un poids entier dominant relativement à $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$.*

Démonstration. On va commencer par démontrer la proposition lorsque H est connexe et on utilise les notations qui précèdent l'énoncé de la proposition.

(i) est immédiat même si H est non connexe (utiliser le lemme 8 pour la continuité).

Comme F^* admet un vecteur H invariant non nul, on a d'après, le théorème de Cartan–Helgason: $\mu_{|\mathfrak{j}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}} = 0$ i.e. $\mu \in (\mathfrak{a}^d)^*$. D'autre part, F (resp. F^*) est muni d'une représentation holomorphe de $G_{\mathbb{C}}$ de différentielle égale au prolongement $\mathbb{C}$-linéaire de la différentielle de π (resp. π^*) à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ notée encore π (resp. π^*). En particulier F et F^* sont des G^d-modules. On note e_{μ} (resp. e_{μ}^*) un élément non nul de F (resp. F^*) de poids μ (resp. $-\mu$) sous $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$. On suppose en outre $\langle e_{\mu}^*, e_{\mu} \rangle = 1$.

On note $e_{K^d}^*$ un élément non nul de F^* invariant par H (donc par K^d). D'après [24], démonstration du théorème V.4.1, page 537, eq. (7), on peut choisir $e_{K^d}^*$ tel que $\langle e_{K^d}^*, e_{\mu} \rangle = 1$. On note $\mathbb{C}_{\Lambda}$ (resp. $\mathbb{C}_{\tilde{\Lambda}}$) le P^d-module de dimension 1 sur lequel $M^d N^d$ agit trivialement et A^d agit par le caractère de différentielle Λ (resp. $\tilde{\Lambda}$). On dipose d'un morphisme canonique de P^d-modules, $p\colon \mathbb{C}_{\tilde{\Lambda}} \otimes F^* \to \mathbb{C}_{\Lambda}$, donné par:

$$\forall (\lambda, v^*) \in \mathbb{C}_{\tilde{\Lambda}} \times F^*, \qquad p(\lambda \otimes v^*) = \lambda \langle v^*, e_{\mu} \rangle.$$

En effet, comme $\mu_{|(\mathfrak{j} \cap \mathfrak{h})_{\mathbb{C}}}$ est nul, e_{μ} est invariant par $\mathfrak{m}^d$. De plus, $\tilde{\Lambda} - \mu_{|\mathfrak{a}^d} = \Lambda$. D'autre part, on introduit, de façon similaire à (4.3.1) un isomorphisme de G-modules:

$$\Phi\colon I_{\tilde{\Lambda}}^{P^d} \otimes F^* \mapsto I_{\mathbb{C}_{\tilde{\Lambda}} \otimes F^*}^{P^d} \tag{5.2.11}$$

par:

$$\forall g \in G^d, \quad \forall \varphi \in I_{\tilde{\Lambda}}^{P^d}, \quad \forall v^* \in F^*, \qquad (\Phi(\varphi \otimes v^*))(g) = \varphi(g) \otimes (\pi^*(g^{-1})\, v^*). \tag{5.2.12}$$

On voit facilement que le transposé Φ' de Φ est un isomorphisme de G^d-modules entre $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{\tilde{\Lambda}} \otimes F^*)$ et $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \tilde{\Lambda}) \otimes F$ donné par la formule imagée:

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{\tilde{\Lambda}} \otimes F^*), \qquad \text{“}(\Phi'(\tau))(g) \equiv (1 \otimes \pi(g))(\tau(g))\text{”}. \quad (5.2.13)$$

Alors en utilisant le lemme 4.8 de [40] au lieu de la généricité de v, on démontre de façon similaire à la proposition 4 (i) que le morphisme de G^d-modules:

$$\tilde{p} := \operatorname{Ind} p \circ \Phi \colon I_{\tilde{\Lambda}}^{P^d} \otimes F^* \to I_{\Lambda}^{P^d} \quad (5.2.14)$$

induit par restriction un ismorphisme de G^d-modules entre $p_{\Lambda_s}(I_{\tilde{\Lambda}}^{P^d} \otimes F^*)$ et $I_{\Lambda}^{P^d}$. Par transposition, on voit que le morphisme de G^d-modules:

$$\tilde{p}' := \Phi' \circ (\operatorname{Ind} p)' \colon \mathscr{D}'(G^d, P^d, \Lambda) \to \mathscr{D}'(G^d, P^d, \tilde{\Lambda}) \otimes F \quad (5.2.15)$$

est un isomorphisme topologique entre $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \Lambda)$ et $p_{-\Lambda_s}(\mathscr{D}'(G^d, P^d, \tilde{\Lambda}) \otimes F)$.

Il nous faut maintenant discuter d'une variante des vecteurs K-finis.

Si V est un $\mathfrak{g}^d$-module, c'est aussi un $\mathfrak{g}$-module (utiliser $U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}^d)$) et le $(\mathfrak{g}, K/(Z(G) \cap H))$-module des vecteurs $(K/(Z(G) \cap H))$-finis est bien défini (cf. [39], définition 6.2.4). On le notera $V_{(H^d, K)}$. C'est un $\mathfrak{g}^d$-module.

Cette notation est cohérente avec les notations antérieures. Comme F^* a un élément non nul invariant par H, π est triviale sur $Z(G) \cap H$. Alors utilisant un raisonnement similaire à celui conduisant à (4.3.4), on voit que:

$$V_{(H^d, K)} \otimes F = (V \otimes F)_{(H^d, K)}. \quad (5.2.16)$$

Si en outre V est $Z(\mathfrak{g})$-localement fini:

$$(p_\chi(V))_{(H^d, K)} = p_\chi(V_{(H^d, K)}). \quad (5.2.17)$$

Étudions maintenant l'image par $\tilde{p}'$ de $\mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \Lambda)_{(H^d, K)}$. On remarque d'abord que $(\operatorname{Ind} p)'$ préserve les supports d'après (3.1.11). Il est immédiat d'établir la même propriété pour Φ', qui est aussi vraie pour $\tilde{p}'$. Par ailleurs,

$$\tilde{p}' \circ p_{-\Lambda_s} = p_{-\Lambda_s} \circ \tilde{p}' = \tilde{p}' \quad (5.2.18)$$

puisque $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \Lambda)$ admet $\chi_{-\Lambda_s}$, comme caractère infinitésimal.

Notons $\mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \Lambda) = \{\tau \in \mathscr{D}'(G^d, P^d, \Lambda) \mid \operatorname{Supp} \tau \subset H^d x^j P^d\}$ et de même pour $\tilde{\Lambda}$. Comme $\tilde{p}'$ préserve les supports, il résulte de (5.2.18) que:

$$\tilde{p}'(\mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \Lambda)) \subset p_{-\Lambda_s}(\mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \tilde{\Lambda}) \otimes F).$$

Montrons qu'il y a égalité. Soit $\tau \in p_{-\Lambda_s}(\mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \tilde{\Lambda}) \otimes F)$. Alors Supp τ est inclus dans $H^d x_j P^d$ car $p_{-\Lambda_s}$ est donné par l'action d'un élément de $Z(\mathfrak{g})$ (cf. lemme 8 et [27], théorème 5.1). Par ailleurs, τ est dans l'image de $\tilde{p}'$ d'après ce que l'on vient de voir. Donc $\tau = \tilde{p}'(\tau_1)$ où $\tau_1 \in \mathscr{D}'(G^d, P^d, \Lambda)$. Mais $\tilde{p}'$ préserve les supports. Ceci montre l'égalité voulue et que $\tilde{p}'$ réalise un isomorphisme de G^d-modules:

$$\tilde{p}' : \mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \Lambda) \simeq p_{-\Lambda_s}(\mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \tilde{\Lambda}) \otimes F).$$

Prenant les vecteurs $(K/Z(G) \cap H)$)-finis et utilisant (5.2.16) et (5.2.17), on voit que $\tilde{p}'$ réalise un isomorphisme de $\mathfrak{g}^d$-modules:

$$\tilde{p}' : \mathscr{D}'^j(G^d, P^d, \Lambda)_{(H^d, K)} \to p_{-\Lambda_s}(\mathscr{D}'(G^d, P^d, \tilde{\Lambda})_{(H^d, K)} \otimes F). \quad (5.2.19)$$

Cet isomorphisme est celui décrit par D. Vogan dans [40] p. 207–208 et dont il m'a fourni une version détaillée. Ceci achève de prouver (ii).

Étudions $\tilde{p}(p_{\Lambda_s}(1_{\tilde{\Lambda}} \otimes e^*_{K^d}))$. C'est un élément de $I_\Lambda^{P^d}$ invariant par K^d donc proportionnel à 1_Λ. Calculons la constante de proportionnalité c. On a: $c = \tilde{p}(p_{\Lambda_s}(1_{\tilde{\Lambda}} \otimes e^*_{K^d}))(e)$. Mais $I_\Lambda^{P^d}$ a pour caractère infinitésimal χ_{Λ_s}, donc $c = \tilde{p}(1_{\tilde{\Lambda}} \otimes e^*_{K^d})(e)$. Maintenant en utilisant la définition de $\tilde{p} = \operatorname{Ind} p \circ \Phi$, celle de Φ ((5.2.12)) et de $\operatorname{Ind} p$ (§ 3.1), on a: $c = \langle e^*_{K^d}, e_\mu \rangle = 1$. Donc, en utilisant encore (5.2.18):

$$\tilde{p}((p_{\Lambda_s}(1_{\tilde{\Lambda}} \otimes e^*_{K^d})) = \tilde{p}(1_{\tilde{\Lambda}} \otimes e^*_{K^d}) = 1_\Lambda. \quad (5.2.20)$$

On remarque maintenant qu'il existe un isomorphisme $\tilde{T}$ pour $(V_{\tilde{\Lambda}})_{(K)}$ analogue à T (cf. (5.2.8)). En effet, comme $V_\Lambda \neq 0$ et Λ est $\Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ dominant, il est strictement dominant d'après [33], § 1, théorème (i). Alors il en va de même de $\tilde{\Lambda} = \Lambda + \mu$ (car μ est élément de $(\mathfrak{a}^d)^*$ et de plus $\Delta^+(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{j}_\mathbb{C})$-dominant) et l'on peut appliquer le théorème (ii) du paragraphe 1 de [33].

En utilisant (5.2.19), (5.2.20), (5.2.10) et son analogue pour $\tilde{T}$, on obtient par transport de structure un isomorphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules:

$$r : (V_\Lambda)_{(K)} \to p_{-\Lambda_s}(V_{\tilde{\Lambda}})_{(K)} \otimes F$$

tel que:

$$\eta_{\Lambda|(V_\Lambda)_{(K)}} = (\eta_{\tilde{\Lambda}} \otimes e^*_{K^d}) \circ r.$$

D'après la propriété de continuité automatique r se prolonge en un morphisme continu de G-modules, noté encore r, entre V_Λ^∞ et $V_{\tilde{\Lambda}}^\infty \otimes F$ qui réalise un isomorphisme topologique entre V_Λ^∞ et $p_{-\Lambda_s}(V_{\tilde{\Lambda}}^\infty \otimes F)$. De plus, on a:

$$\eta_\Lambda = (\eta_{\tilde{\Lambda}} \otimes e^*_{K^d}) \circ r \quad (5.2.21)$$

et

$$p_{-\Lambda_s} \circ r = r \circ p_{-\Lambda_s} = r. \tag{5.2.22}$$

On va voir que si on prend $e_H^* := e_{K^d}^*$ alors $t = r^{-1} \circ p_{-\Lambda_s}$. Posons $t_1 = r^{-1} \circ p_{-\Lambda_s}$. Clairement: $t_1 \circ p_{-\Lambda_s} = p_{-\Lambda_s}$, et t_1 induit par restriction un isomorphisme topologique de G-modules entre $p_{-\Lambda_s}(V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty} \otimes F)$ et V_{Λ}^{∞}.

Calculons maintenant pour $\varphi \in V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty}$ et $v \in F$, $\varphi_1 := t_1(\varphi \otimes v)$. Grâce à la définition de η_Λ, on a, pour g élément de G:

$$\varphi_1(gH) = \langle \pi'_\Lambda(g)\, \eta_\Lambda, t_1(\varphi \otimes v) \rangle$$

et d'après (5.2.21):

$$\varphi_1(gH) = \langle \pi'_\Lambda(g)((\eta_{\tilde{\Lambda}} \otimes e_H^*) \circ r), t_1(\varphi \otimes v) \rangle.$$

Alors, grâce à la définition de t_1 et le fait que r, t_1, $p_{-\Lambda_s}$ sont des morphismes de G-modules, on a:

$$\varphi_1(gH) = \langle \eta_{\tilde{\Lambda}} \otimes e_H^*, p_{-\Lambda_s}((\pi_{\tilde{\Lambda}}(g^{-1})\, \varphi) \otimes \pi(g^{-1})\, v \rangle.$$

Mais $\varphi(gH) = \langle \eta_{\tilde{\Lambda}}, \pi_{\tilde{\Lambda}}(g^{-1})\, \varphi \rangle$. Alors $\varphi_1(gH) = (p_{-\Lambda_s}(\varphi \cdot \tilde{v}))(gH)$.

D'où $t_1(\varphi \otimes v) = p_{-\Lambda_s}(\varphi \cdot \tilde{v})$ et $t_1 = t$. Alors (ii) résulte des propriétés de t_1 et (iii) résulte de (5.2.21).

Prouvons (iv). On définit ρ^d et $\rho_c^d \in (\mathfrak{a}^d)^*$ par:

$$\forall X \in \mathfrak{a}^d,\ \rho^d(X) = 1/2\ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\ X)_{|\mathfrak{n}^d},$$

$$\rho_c^d(X) = 1/2\ \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\ X)_{|\mathfrak{n}^d \cap \mathfrak{h}^d}.$$

On définit ρ_j^d, $\rho_{j,c}^d$ et $\Lambda_j \in (\mathfrak{a}'^d)^*$ par $\rho_j^d = \rho^d \circ \mathrm{Ad}\, x_j^{-1}$, etc... Alors d'après [33], § 1 théorème (iii), comme $V_\Lambda^\infty \neq 0$, il existe j_0 tel que $\mu_\Lambda^{j_0} := \Lambda_{j_0} + \rho_{j_0}^d - 2\rho_{j_0,c}^d$ soit un élément du réseau engendré par les plus hauts poids des représentations de K admettant un vecteur non nul invariant par $K \cap H$.

On regarde $(\mathfrak{a}'^d)_{\mathbb{C}}^*$ comme un sous-espace de $(\mathfrak{j}')_{\mathbb{C}}^*$ (où $\mathfrak{j}' := \mathrm{Ad}\, x_{j_0}(\mathfrak{j})$) de la manière habituelle. On va montrer qu'il existe $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}^*$ tels que $n_1 \mu_\Lambda^{j_0}$, $n_2 \rho_{j_0}^d$ et $2n_3 \rho_{j_0,c}^d$ soient des poids du système de racines $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}'_{\mathbb{C}})$.

Pour l'existence de n_1, on voit qu'il suffit de démontrer que pour tout μ_0, plus haut poids d'une représentation de K ayant un vecteur $K \cap H$-invariant non nul, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0 \mu_0$ soit un poids pour $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}'_{\mathbb{C}})$.

On note $\mathfrak{t} := \{X \in \mathfrak{j}'_{\mathbb{C}} \mid \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}'_{\mathbb{C}}), \alpha(X) \in i\mathbb{R}\}$ et T le sous-groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}$, qui est compact. Alors $\lambda \in (\mathfrak{j}')_{\mathbb{C}}^*$ est un poids si et seulement si λ est la différentielle d'un caractère de T. On note que $\mathfrak{t}_1 := i\mathfrak{a}'^d \subset \mathfrak{t}$. Le sous-groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_1$, T_1 est un sous-groupe ouvert du sous-groupe de T formé des éléments anti-invariants par $\sigma_{\mathbb{C}}$. Ici $\sigma_{\mathbb{C}}$ est l'involution de $G_{\mathbb{C}}$ dont la différentielle est le prolongement $\mathbb{C}$-linéaire à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ de σ. Soit $\mathfrak{t}_1^{\perp}$ l'orthogonal de $\mathfrak{t}_1$ dans $\mathfrak{t}$. Il est contenu dans le centralisateur, $\mathfrak{m}'^d$, de $\mathfrak{a}'^d$ dans $\mathfrak{k}^d$ et le sous-groupe analytique de T d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_1^{\perp}$, $T_1^{\perp}$ est un tore maximal du centralisateur de $\mathfrak{a}'^d$ dans K^d. Il est donc compact. L'intersection de T_1 et $T_1^{\perp}$ est donc finie. Soit χ un caractère de T_1. Soit n tel que χ^n soit trivial sur $T_1 \cap T_1^{\perp}$. Alors il existe un caractère $\tilde{\chi}$ de T, trivial sur $T_1^{\perp}$ et égal á χ^n sur T_1. Si $\mu_0 \in (\mathfrak{a}'^d)^*$ est le plus haut poids d'une représentation de K admettant un vecteur invariant par K, μ_0 est la différentielle d'un caractère de T_1. L'existence de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_0\mu_0$ soit un poids relativement à $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}'_{\mathbb{C}})$ résulte de ce qui précède. L'existence de n_1 est alors immédiate. Comme $2\rho^d$ et $2\rho_c^d$ sont les différentielles de caractères de T_1, l'existence de n_2 et n_3 suit de même. On déduit alors (iv) des égalités:

$$\Lambda_{j_0} = \mu_{\Lambda}^{j_0} + \rho_{j_0}^d - 2\rho_{j_0, c}^d$$

$$\Lambda_{j_0} = \Lambda \circ \operatorname{Ad} x_{j_0}^{-1}.$$

Ceci achève de prouver la proposition lorsque H est connexe.

Passons au cas général. On note V_{Λ}^0, $V_{\tilde{\Lambda}}^0$ les espaces correspondants à H^0. Comme H/H^0 est fini (cf. e.g. [2] proposition 1.1), on a: $V_{\Lambda}^{\infty} \subset (V_{\Lambda}^0)^{\infty}$ et $V_{\Lambda}^{\infty} = \{\varphi \in (V_{\Lambda}^0)^{\infty} \mid \forall h \in H/H^0, R_h\varphi = \varphi\}$.

On note t^0 le morphisme de $(V_{\tilde{\Lambda}}^0)^{\infty} \otimes F$ sur $(V_{\Lambda}^0)^{\infty}$ que l'on vient de construire.

Décomposant V_{Λ}^0 et $V_{\tilde{\Lambda}}^0$ sous l'action à droite de H/H^0 on voit facilement que t^0 induit le morphisme voulu de $V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty} \otimes F$ sur V_{Λ}^{∞}. Alors (ii) et (iii) en résultent. De même pour (iv) car si $V_{\Lambda}^{\infty} \neq \{0\}$ on a $(V_{\Lambda}^0)^{\infty} \neq \{0\}$. ∎

5.3. *Foncteurs de translation et séries discrètes pour l'espace symétrique associé au sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique σθ-stable d'un groupe semi-simple connexe*

G est donc toujours supposé connexe et semi-simple et P comme en 1.4. On adopte les notations de 5.1 pour les séries discrètes de $M/M \cap H$ en omettant l'indice M lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité.

PROPOSITION 8. *Soit $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}}^*$ tel que $V_{M,\Lambda}$ soit non nul. Alors*:

(i) *Λ est réel sur $\mathfrak{a}_M^d$ et*:

$$\forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d), \qquad \alpha_{|\mathfrak{a}} = 0 \Rightarrow (\Lambda, \alpha) \neq 0.$$

(ii) *On suppose en outre Λ dominant par rapport aux racines positives de $\mathfrak{a}_M^d$ dans $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$. Il existe $\nu_1 \in \mathfrak{a}^*$, $p_1 \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mu = n(p_1 \Lambda + \nu_1) (\in (\mathfrak{a}^d)^* \subset \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}^*)$ soit le plus haut poids d'une représentation de dimension finie (π, F) de G dont la contragédiente possède un vecteur non nul invariant par H, e_H^*.*

(iii) *Avec les notations de (ii), posons $\tilde{\Lambda} = \mu_{|\mathfrak{a}_M^d} + \Lambda = (np_1 + 1)\Lambda$, $F_1 = F^N$. Soit t l'application de $V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty} \otimes F_1$ dans $C^{\infty}(M/M \cap H)$ définie par:*

$$\forall \varphi \in V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty}, \qquad \forall v \in F_1, \qquad t(\varphi \otimes v) = p_{-\Lambda_s}(\varphi \cdot \tilde{v}),$$

où $\tilde{v}$ est la fonction C^{∞} sur $M/M \cap H$ définie par:

$$\tilde{v}(m(M \cap H)) = \langle \pi^*(m)\, e_H^*, v \rangle.$$

L'image de t est égale à V_{Λ}^{∞} et t induit par restriction un isomorphisme topologique de M-modules, noté encore t, entre $p_{-\Lambda_s}(V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty} \otimes F_1)$ et V_{Λ}^{∞}. De plus, $\eta_{\Lambda} \circ t = (\eta_{\tilde{\Lambda}} \otimes e_{M,H}^*) \circ p_{-\Lambda_s}$ où $e_{M,H}^*$ est la restriction de e_H^* à F_1.

Remarque 8. L'isomorphisme entre $p_{-\Lambda_s}(V_{\tilde{\Lambda}}^{\infty} \otimes F_1)$ et V_{Λ}^{∞} est contenu dans [40] pages 207–208. Les détails donnés ici reposent sur l.c. et une lettre de D. Vogan mentionnée dans l'introduction. On précise ici l'isomorphisme.

Pour la démonstration de la proposition nous commencerons par établir deux lemmes. On regarde $M^0/(M^0 \cap H)$ comme un sous-ensemble de $M/(M \cap H)$. Comme M n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, puisqu'il est dans la classe d'Harish-Chandra, on a $M = \bigsqcup_{x \in \Omega} M^0 x(M \cap H)$ (réunion disjointe) pour un sous-ensemble fini de M bien choisi Ω contenant e. Comme M^0 est ouvert dans M, chacun des sous-ensembles de la partition de M est ouvert et fermé. Donc $M^0/(M^0 \cap H)$ est ouvert et fermé dans $M/(M \cap H)$. On note i_{M^0} le morphisme de M^0-modules de $C^{\infty}(M^0/(M^0 \cap H))$ dans $C^{\infty}(M/(M \cap H))$ donné par l'extension des fonctions par 0 en dehors de $M^0/(M^0 \cap H)$. On note r_{M^0} le morphisme de M^0-modules de $C^{\infty}(M/(M \cap H))$ dans $C^{\infty}(M^0/(M^0 \cap H))$ donné par la restriction des fonctions.

Lemme 9. (i) $\forall \varphi \in C^{\infty}(M/(M \cap H))$, $\varphi = \sum_{x \in \Omega} L_x \circ i_{M^0} \circ r_{M^0}(L_{x^{-1}} \varphi)$

(ii) *Si V est un sous M-module (pas nécessairement fermé) de $C^{\infty}(M/(M \cap H))$, V est contenu dans le sous M-module de $C^{\infty}(M/(M \cap H))$, engendré par $i_{M^0} \circ r_{M^0}(V)$.*

Démonstration. (i) résulte d'un calcul immédiat et (ii) est une conséquence facile de (i). ∎

On note r_{M_1} le morphisme de restriction des fonctions C^∞ sur M ou M^0 au sous-groupe analytique de M d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}_1 = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$, M_1. On notera $\mathfrak{a}_{M_1}^d = \mathfrak{a}_M^d \cap (\mathfrak{m}_1)_{\mathbb{C}}$. Par définition de $\mathfrak{m}$ le centre $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})$ de $\mathfrak{m}$ vérifie:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q} = \{0\}, \qquad \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) = (\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}).$$

On note $Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$ le sous-groupe analytique de M d'algèbre de Lie $\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}} := \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$. Alors:

$$M^0/(M^0 \cap H) = Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}(M_1/(M_1 \cap H)) \tag{5.3.1}$$

où l'on regarde $M_1/(M_1 \cap H)$ comme un sous-ensemble de $M^0/(M^0 \cap H)$.

Notons $Z_1 = Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}} \cap (M_1(M^0 \cap H))$. On remarque que M est fermé dans G et dans la classe d'Harish-Chandra. Il en est donc de même de M_1 (cf. § 1.2). De même $Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$ est fermé dans G car c'est un sous-groupe ouvert du sous-groupe fermé de G: $\{g \in Z(M) \mid \sigma(g) = g^{-1}, \theta(g) = g\}$. Étant contenu dans K, il est compact. D'autre part, $M_1(M^0 \cap H)$ est fermé dans G. En effet, si (m_n) (resp. (m'_n)) est une suite dans M_1 (resp. $M^0 \cap H$) telle que $(m_n m'_n)$ converge vers $m \in G$, $(m_n \sigma(m_n^{-1}))$ converge vers $m\sigma(m^{-1})$. Mais d'après [32], cela implique que $m_n M_1^\sigma$ converge dans M_1/M_1^σ, où $M_1^\sigma = \{m \in M_1 \mid \sigma(m) = m\}$. Mais $M_1^\sigma/(M_1 \cap H)$ est fini. Quitte à extraire une sous-suite on peut supposer que $(m_n(M_1 \cap H))$ converge dans $M_1/(M_1 \cap H)$. Ceci équivaut à l'existence d'une suite (m''_n) dans $M_1 \cap H$ telle que $(m_n m''_n)$ converge dans M_1. Ecrivons $m_n m'_n = (m_n m''_n)(m''^{-1}_n m'_n)$. Alors $(m_n m''_n)$ converge dans M_1 et $(m''^{-1}_n m'_n)$ est une suite dans $M^0 \cap H$ qui converge. Mais $M^0 \cap H$ est fermé dans G car M^0 et H le sont. D'où $m \in M_1(M^0 \cap H)$ comme désiré. Alors Z_1 est fermé et contenu dans K, donc compact.

On montre de même que si (m_n) est une suite dans M_1 et $m \in M_1$ tels que $m_n(M^0 \cap H)$ converge vers $m(M^0 \cap H)$ dans $M^0/M^0 \cap H$, il existe une sous suite de $(m_n(M_1 \cap H))$ qui converge vers $m(M_1 \cap H)$ dans $M_1/M_1 \cap H$. Il en résulte que l'image, par l'injection naturelle de $M_1/M_1 \cap H$ dans $M^0/M^0 \cap H$, d'un fermé de $M_1/M_1 \cap H$ est fermé dans l'image de cette injection naturelle. Celle-ci est donc un plongement.

Comme Z_1 est un sous-ensemble du centre de M^0 on voit facilement que Z_1 est un sous-groupe central de M^0. En effet, si $z, z' \in Z_1$, on a $z = m_1 m_0$, $z' = m'_1 m'_0$ avec: $z, z' \in Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$, $m_1, m'_1 \in M_1$, $m_0, m'_0 \in M^0 \cap H$. Alors, comme z est dans le centre de M^0, $m_0 z^{-1} = z^{-1} m_0$ et $z^{-1} = m_1^{-1} m_0^{-1} \in Z_1$. De même: $zz' = m'_1 z m'_0 = m'_1 m_1 m_0 m'_0 \in Z_1$.

Il est clair que Z_1 laisse invariant le sous-ensemble $M_1/M_1 \cap H$ de $M^0/M^0 \cap H$. En effet, soient $z = m_1 m_0$ avec $z \in Z_1$, $m_1 \in M_1$, $m_0 \in M^0 \cap H$ et $m'_1 \in M_1$. Comme z est dans le centre de M^0 on a:

$$zm'_1(M^0 \cap H) = m'_1 m_1 m_0(M^0 \cap H) = m'_1 m_1(M^0 \cap H).$$

Comme l'injection naturelle de $M_1/M_1 \cap H$ dans $M^0/M^0 \cap H$ est un prolongement, on en déduit une action de Z_1 sur $C^\infty(M_1/(M_1 \cap H))$ qui commute à l'action de M_1 et tel que le morphisme de restriction des fonctions de $M^0/(M^0 \cap H)$ à $M_1/(M_1 \cap H)$, r_{M_1}, soit à la fois un morphisme de M_1 et Z_1-modules.

Lemme 10. *Soit $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)^*_{\mathbb{C}}$ et Λ_1 sa restriction à $(\mathfrak{a}_{M_1}^d)^*_{\mathbb{C}}$.*

(i) *Soit $\varphi \in C^\infty(M^0/M^0 \cap H)$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) $\varphi \in V_{M^0, \Lambda}$

(b) $\forall z \in Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$, $r_{M_1}(L_z(\varphi)) \in V_{M_1, \Lambda_1}$ *et* $\forall X \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$ $(\subset (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}})$, $L_X \varphi = -\Lambda(X)\, \varphi$.

(ii) *Supposons $V_{M^0, \Lambda} \neq 0$. Il existe un caractère unitaire, χ, de $Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$ de différentielle $-\Lambda_{|\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}}$ par lequel agit $Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$ sur $V^\infty_{M^0, \Lambda}$.*

On note $V_{M_1, \Lambda_1, \chi} = \{\varphi \in V^\infty_{M_1, \Lambda_1} \mid \varphi$ se transforme sous Z_1 par $\chi_{|Z_1}\}$. Alors r_{M_1} induit une bijection de $V^\infty_{M^\varphi, \Lambda}$ sur $V^\infty_{M_1, \Lambda_1, \chi}$.

Démonstration. Comme $\mathbb{D}(M^0/(M^0 \cap H))$ est isomorphe à $\mathbb{D}(M_1/M_1 \cap H) \otimes S(\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}})$ on voit, grâce à (5.3.1), que pour $\varphi \in C^\infty(M^0/(M^0 \cap H))$ les conditions suivantes sont équivalentes:

(a′) φ est propre sous $\mathbb{D}(M^0/(M^0 \cap H))$ pour la valeur propre Λ.

(b′) Pour tout $z \in Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$, $r_{M_1}(L_z \varphi)$ est propre sous $\mathbb{D}(M_1/(M_1 \cap H))$ pour la valeur propre Λ_1 et pour tout X élément de $\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$, φ est propre sous L_X pour la valeur propre $-\Lambda(X)$.

Pour prouver l'équivalence de (a) et (b) il suffit donc de voir que si φ vérifie les conditions équivalentes (a′) et (b′), φ est de carré intégrable si et seulement si $r_{M_1}(L_z \varphi)$ l'est pour tout $z \in Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$. Mais d'après (b′), φ se transforme par un caractère du groupe compact $Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$, χ. Celui-ci est unitaire. Alors l'équivalence voulue résulte de (5.3.1) et de la compacité de $Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$, ce qui achève de prouver (i).

Prouvons (ii). L'existence de χ résulte de la démonstration de (i). De cette existence et de (i) on déduit immédiatement: $r_{M_1} V^\infty_{M^0, \Lambda} \subset V^\infty_{M_1, \Lambda_1, \chi}$.

L'injectivité de r_{M_1} résulte de (5.3.1) et du fait que les éléments de $V^\infty_{M^0, \Lambda}$ se transforment par χ sous $Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$.

Montrons la surjectivité de r_{M_1}. Soit $\psi \in V_{M_1, \Lambda_1, \chi}$. On définit une fonction φ sur $M^0/(M^0 \cap H)$ par:

$$\forall z \in Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}, \qquad \forall m_1 \in M_1, \qquad \varphi(z \cdot m_1(M^0 \cap H)) = \chi(z^{-1})\, \psi(m_1(M_1 \cap H)) \tag{5.3.2}$$

On vérifie aisément que φ est bien définie et C^∞, que $r_{M_1}\varphi = \psi$. Utilisant (i) on voit qu'en outre $\varphi \in V^\infty_{M^0, \Lambda}$. D'où la surjectivité de r_{M_1}. ∎

Démonstration de la proposition 8. On remarque que $r_{M^0}(V^\infty_{M, \Lambda})$ est inclus dans $V^\infty_{M^0, \Lambda}$ et que $i_{M^0}(V^\infty_{M^0, \Lambda}) \subset V^\infty_{M, \Lambda}$. Donc $r_{M^0}(V^\infty_{M, \Lambda}) = V^\infty_{M^0, \Lambda}$. Alors, d'après le lemme 9 (ii), $V_{M, \Lambda}$ est égal au sous-M-module de $C^\infty(M/M \cap H)$ engendré (algébriquement) par $i_{M^0}(V^\infty_{M^0, \Lambda})$. En particulier, comme $V^\infty_{M, \Lambda}$ est non nul, $V^\infty_{M^0, \Lambda}$ est non nul et, d'après le lemme précédent, $V^\infty_{M_1, \Lambda_1}$ est également non nul.

Alors, d'après la proposition 7, Λ_1 est réel sur $\mathfrak{a}^d_{M_1}$. Par ailleurs, $\Lambda_{|_{\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}}}$ est imaginaire pur puisque c'est la différentielle de χ. Comme $\mathfrak{a}^d_M = \mathfrak{a}^d_{M_1} \oplus i(\mathfrak{z}_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}})$, ceci prouve (i).

Prouvons (ii). On suppose Λ dominant par rapport aux racines positives de $\mathfrak{a}^d_M$ dans $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$. Soit T_1 le sous-groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{t}_1 := (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}_1)_{\mathbb{C}} \cap (\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{s})$. Montrons que T_1 est compact. Notons $M_{\mathbb{C}}$ (resp. $M_{1\mathbb{C}}$) le sous-groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{m}_{1\mathbb{C}}$). Comme $G_{\mathbb{C}}$ est semi-simple connexe, il est de centre fini donc dans la classe d'Harish-Chandra. Alors, d'après les propriétés des sous-groupes de Levi des sous-groupes paraboliques, $M_{\mathbb{C}}$ est fermé dans $G_{\mathbb{C}}$ et dans la classe d'Harish-Chandra. Alors $M_{1\mathbb{C}}$ est fermé dans $M_{\mathbb{C}}$ (cf. [38], part II, § 1.2 proposition 8) donc aussi dans $G_{\mathbb{C}}$. Alors T_1 apparaît comme un tore maximal d'un sous-groupe compact maximal de $M_{1\mathbb{C}}$.

De même le sous-groupe analytique, T, de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{t} := \mathfrak{j}_{\mathbb{C}} \cap (\mathfrak{k} \oplus i\mathfrak{s})$ est compact ainsi que $T_M := \exp \mathfrak{t}_M$ (resp. $T_{Z, k, \mathfrak{q}} := \exp \mathfrak{t}_{Z, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$, $T_{Z, \mathfrak{h}} := \exp \mathfrak{t}_{Z, \mathfrak{h}}$) où $\mathfrak{t}_M := \mathfrak{t} \cap \mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ (resp. $\mathfrak{t}_{Z, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}} := \mathfrak{t} \cap (\mathfrak{z}(\mathfrak{m})_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$, $\mathfrak{t}_{Z, \mathfrak{h}} := \mathfrak{t} \cap (\mathfrak{z}(\mathfrak{m})) \cap \mathfrak{h})_{\mathbb{C}}$), car c'est un sous-groupe ouvert du sous-groupe fermé de T, $T \cap M_{\mathbb{C}}$, (resp. $\{t \in T \cap Z(M_{\mathbb{C}}) \mid \sigma_{\mathbb{C}}(t) = t^{-1}, \theta_{\mathbb{C}}(t) = t\}$ resp. $\{t \in T \cap Z(M_{\mathbb{C}}) \mid \sigma_{\mathbb{C}}(t) = t\}$). Ici $\theta_{\mathbb{C}}$ (resp. $\sigma_{\mathbb{C}}$) est l'involution holomorphe de $G_{\mathbb{C}}$ dont la différentielle est le prolongement $\mathbb{C}$-linéaire de θ (resp. σ) à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Enfin soit $T_{\mathfrak{a}} := \exp i\mathfrak{a}$ qui est compact comme sous-groupe ouvert du sous-groupe fermé de T:

$$\{t \in T \mid \sigma_{\mathbb{C}}(t) = t^{-1}, \theta_{\mathbb{C}}(t) = t^{-1}, \quad \forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}), \alpha_{|\mathfrak{a}} = 0 \Rightarrow t^\alpha = 1\}. \tag{5.3.3}$$

On a alors:

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 \oplus \mathfrak{t}_{Z, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}} \oplus \mathfrak{t}_{Z, \mathfrak{h}} \oplus i\mathfrak{a} \qquad \text{et} \qquad T = T_1 T_{Z, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}} T_{Z, \mathfrak{h}} T_{\mathfrak{a}} \tag{5.3.4}$$

où les intersections deux à deux des groupes du membre de droite sont finies.

Si $\lambda^0{}_1 \in (\mathfrak{t}_1^*)_{\mathbb{C}}$ (resp. $\lambda^0{}_2 \in (\mathfrak{t}_{Z, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}})^*_{\mathbb{C}}$, $\lambda^0{}_3 \in (\mathfrak{t}_{Z, \mathfrak{h}})^*_{\mathbb{C}}$, $\lambda^0{}_4 \in (i\mathfrak{a})^*_{\mathbb{C}}$) est tel que l'un de ses multiples entiers non nul soit la différentielle d'un caractère de T_1 (resp. $T_{Z, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$, $T_{Z, \mathfrak{h}}$, $T_{\mathfrak{a}}$), il existe un entier p tel que $p(\lambda^0{}_1 + \lambda^0{}_2 + \lambda^0{}_3 + \lambda^0{}_4)$

soit la différentielle d'un caractère de T, c'est-à-dire un poids relativement à $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ (en identifiant $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ à $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$). Dans la suite on identifiera $(\mathfrak{t}_1)^*_{\mathbb{C}}$ (etc...) à un sous-espace de $\mathfrak{j}^*_{\mathbb{C}}(=\mathfrak{t}^*_{\mathbb{C}})$ grâce à la décomposition de $\mathfrak{t}$ de (5.3.4).

On regarde $\Lambda_1 = \Lambda_{|\mathfrak{a}^d_{M_1}}$ comme un élément de $(\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}_1)^*_{\mathbb{C}}$ nul sur l'orthogonal de $(\mathfrak{a}^d_{M_1})_{\mathbb{C}}$ dans $(\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}_1)_{\mathbb{C}}$ pour la forme de Killing. Alors, d'après le lemme 10, on a $V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1} \neq \{0\}$ et, grâce à la proposition 7 (iv), $\lambda_1 := \Lambda_1$ satisfait les propriétés voulues.

Pour λ_3 on prendra 0. On note $\rho_{\mathfrak{n}} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})} \alpha \in (\mathfrak{j})^*_{\mathbb{C}}$. On va voir que $\rho_{\mathfrak{n}} = \rho_P$ (où $\rho_P \in \mathfrak{a}^*$ est regardé comme un élément de $(\mathfrak{j}_{\mathbb{C}})^*$).

D'après les propriétés de $\mathfrak{n}$ on a facilement que $\sigma(\rho_{\mathfrak{n}}) = \theta(\rho_{\mathfrak{n}}) = \rho_{\mathfrak{n}}$. Il suffit alors de voir que $\rho_{\mathfrak{n}|_{\mathfrak{a}_\phi}} = \rho_P$. Cela se réduit à montrer que $\rho_{\mathfrak{n}|_{\mathfrak{m} \cap \mathfrak{a}_\phi}} = 0$. Mais $\mathfrak{j} = (\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{a}$ car $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{j}$. De plus, comme $\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{m} \cap \mathfrak{j}$ on a $\mathfrak{j} \cap \mathfrak{m} = (\mathfrak{j} \cap [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) \oplus \mathfrak{z}(\mathfrak{m})$. Mais $\mathfrak{a}_\phi \cap \mathfrak{m} = \mathfrak{m} \cap \mathfrak{j} \cap \mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$. Alors comme $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})$ et $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ sont σ et θ-stables on voit que: $\mathfrak{a}_\phi \cap \mathfrak{m} = (\mathfrak{a}_\phi \cap [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]) \oplus (\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{a}_\phi)$. En faisant agir $\mathfrak{m}$ sur $\Lambda^{\dim \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}}(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}})$, qui est de dimension 1, on voit que $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ agit trivialement et que $\rho_{\mathfrak{n}}$ est nul sur $\mathfrak{j} \cap [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$. Par ailleurs, $\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{a}_\phi = 0$. En effet, si $X \in \mathfrak{a}_\phi$ et $X \notin \mathfrak{a}$, il existe $\alpha \in \Theta$, tel que $\alpha(X) \neq 0$. Mais alors $\mathfrak{g}^\alpha$ qui est inclus dans $\mathfrak{m}$ ne commute pas à X. Donc $X \notin \mathfrak{m}$. Donc $\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{a}_\phi \subset \mathfrak{a}$ et, comme $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{a} = \{0\}$. Finalement on a bien montré $\rho_P = \rho_{\mathfrak{n}}$. Il en résulte que $\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}$ agit trivialement sur $\Lambda^{\dim \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}} \mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$. Il en est de même de l'action de $\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}$. Alors $2\rho_{\mathfrak{n}}$ est le plus haut poids d'une représentation de dimension finie de $\mathfrak{g}$. Montrons $\langle \rho_{\mathfrak{n}}, \alpha \rangle > 0$ si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$. D'après la définition de $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$, on a $\Sigma_0 = \Sigma_{\mathfrak{n}} \cup \Sigma_{\mathfrak{m}}$ où Σ_0 (resp. $\Sigma_{\mathfrak{n}}$) est l'ensemble des racines simples de $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ (resp. des racines simples de $\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ contenues dans $\Delta(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$) et $\Sigma_{\mathfrak{m}}$ est l'ensemble des racines simples de $\Delta^+(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$. On note $\rho_0 = 1/2 \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})} \alpha$, $\rho_{\mathfrak{m}} = 1/2 \sum_{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})} \alpha$. Comme deux éléments distincts de Σ_0 ont un produit scalaire négatif ou nul, on voit que si $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{n}}$, $\langle \rho_{\mathfrak{m}}, \alpha \rangle \leqslant 0$. Alors, comme $\langle \rho_{\mathfrak{n}}, \alpha \rangle = \langle \rho_0, \alpha \rangle - \langle \rho_{\mathfrak{m}}, \alpha \rangle$, on a $\langle \rho_{\mathfrak{n}}, \alpha \rangle \geqslant \langle \rho_0, \alpha \rangle > 0$. Traitons maintenant le cas où $\alpha \in \Sigma_{\mathfrak{m}}$. Dans ce cas, $\langle \rho_{\mathfrak{n}}, \alpha \rangle = 0$. Par addition on voit que, si $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$, on a: $\langle \rho_{\mathfrak{n}}, \alpha \rangle > 0$, comme désiré.

Pour λ_4 on choisira $2k_0\rho_P$ avec $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que:

$$\forall \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}), \qquad 2k_0 \langle \rho_P, \alpha \rangle \geqslant -\langle \Lambda, \alpha \rangle \tag{5.3.5}$$

qui vérifie également les conditions voulues.

On remarque maintenant que $(\mathfrak{t}_{Z,\mathfrak{k},\mathfrak{q}})_{\mathbb{C}} = (\mathfrak{a}^d_M \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}))_{\mathbb{C}}$ ce qui permet d'identifier $(\mathfrak{t}_{Z,\mathfrak{k},\mathfrak{q}})^*_{\mathbb{C}}$ à $(\mathfrak{a}^d_M \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}}))^*_{\mathbb{C}}$. On va voir que $\lambda_2 := \Lambda_{|\mathfrak{a}^d_M \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{m}_{\mathbb{C}})}$ satisfait les hypothèses voulues. On remarque que $\mathfrak{t}_{Z,\mathfrak{k},\mathfrak{q}} = \mathfrak{z}_{\mathfrak{m},\mathfrak{k},\mathfrak{q}}$ et λ_2 est la différentielle d'un caractère χ de $Z_{\mathfrak{m},\mathfrak{k},\mathfrak{q}}$ (cf. lemme 10 (ii)). Le centre de G étant fini, une puissance de χ, $\chi^n (n \in \mathbb{N}^*)$, est un caractère de

$Z_{\mathfrak{m},\mathfrak{k},\mathfrak{q}}/(Z_{\mathfrak{m},\mathfrak{k},\mathfrak{q}} \cap Z(G))$ qui est un sous-groupe de Ad G. Mais le sous-groupe analytique $\underline{G}$ de $G_{\mathbb{C}}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, est un revêtement de Ad G. Alors $T_{Z,\mathfrak{k},\mathfrak{q}}$ est un revêtement de $Z_{\mathfrak{m},\mathfrak{k},\mathfrak{q}}/(Z_{\mathfrak{m},\mathfrak{k},\mathfrak{q}} \cap Z(G))$ et λ_2 vérifie la propriété voulue.

Alors un multiple entier non nul de $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4$ est un poids entier relativement à $\Delta(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$. Celui-ci est de plus dominant grâce à l'hypothèse sur Λ et à (5.3.5). Quitte à multiplier encore par 2, on voit que c'est le plus haut poids d'une représentation de $G_{\mathbb{C}}$ dont la contragédiente possède un vecteur non nul invariant par le sous-groupe analytique de $G_{\mathbb{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, $\underline{H}$, d'après le théorème de Cartan Helgason ([24], théorème V.4.1). On la note (π_1, F_1) et on note son plus haut poids μ_1. Réalisant la représentation de plus haut poids $p\mu_1$, (π_p, F_p) comme sous-représentation de $(\pi_1^{\otimes p}, F_1^{\otimes p})$ on voit que, pour $p \in \mathbb{N}^*$, π_p^* admet un vecteur non nul $\underline{H}$ invariant. De plus, pour p bien choisi, sa restriction à $\underline{G}$ provient d'une représentation de Ad $\underline{G} =$ Ad G. Alors (π_p, F_p) est aussi une représentation de G dont la contragrédiente admet un vecteur H^o-invariant. Comme H/H^o est fini et que $(F_p^*)^{H^o}$ est de dimension un, un nouvel argument de tensorisation montre que pour $p' \in \mathbb{N}^*$ bien choisi $(\pi_{pp'}^*, F_{pp'}^*)$ admet un vecteur invariant H-invariant de même que $\pi_{kpp'}^*$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Si $\mu_1 = p''(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)$ avec $p'' \in \mathbb{N}^*$, ce qui précède montre que $p_1 = pp'p''$ et $v_1 = 2p_1 k_0 \rho_P$ satisfont (ii), car $\lambda_1+\lambda_2 = \Lambda$ et $\lambda_4 = 2k_0\rho_P$.

Passons à (iii) dont on adopte les hypothèses et notations. Montrons que l'image de t est contenue dans V_Λ^∞. Soit $\varphi \in V_{\tilde{\Lambda}}^\infty$ et $v \in F_1$. Il est clair que:

$$\psi := t(\varphi \otimes v) \in C^\infty(M/M \cap H). \tag{5.3.6}$$

Soit $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$. Alors X agit sur v par $\mu(X)$ et sur φ par $-\tilde{\Lambda}(X)$. Or $\mu(X) - \tilde{\Lambda}(X) = -\Lambda(X)$ d'après la définition de $\tilde{\Lambda}$. Donc:

$$\forall X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}, \qquad ((L \otimes \pi)(X))(\varphi \otimes v) = -\Lambda(X)(\varphi \otimes v)$$
$$\text{et} \qquad L_X \psi = -\Lambda(X)\,\psi. \tag{5.3.7}$$

De même, on voit que:

$$\forall X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{m}) \cap \mathfrak{h}, \qquad (L \otimes \pi)(X)(\varphi \otimes v) = 0 \qquad \text{et} \qquad L_X\psi = 0. \tag{5.3.8}$$

Grâce à (5.3.7) et (5.3.8), on voit que:

$$p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}(\varphi \cdot \tilde{v}) = p^{\mathfrak{m}_1}_{-\Lambda_{1s}}(\varphi \cdot \tilde{v}) \qquad \text{où} \qquad \Lambda_{1s} = \Lambda_{s|\mathfrak{a}^d_{\mathbb{C}} \cap (\mathfrak{m}_1)_{\mathbb{C}}}.$$

Appliquant aux deux membres l'opérateur de restriction des fonctions de $M/(M \cap H)$ à $M_1/(M_1 \cap H)$ et utilisant que cet opérateur commute à $p_{-\Lambda_{1s}}$ on a:

$$r_{M_1}(\psi) = p^{\mathfrak{m}_1}_{-\Lambda_{1s}}(r_{M_1}(\varphi) \cdot r_{M_1}(\tilde{v})). \tag{5.3.9}$$

Donc: $r_{M_1}(\psi) \in V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1}$, d'après la proposition 7(ii).

On applique ce résultat en partant de $\varphi' = L_z \psi$ et $v' = \pi(z)\, v$, pour $z \in Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$ et l'on voit que:

$$\forall z \in Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}, \qquad r_{M_1}(L_z \psi) \in V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1}. \tag{5.3.10}$$

D'après le lemme 10 (i) et grâce à (5.3.6), (5.3.7), (5.3.10), on en déduit que $r_{M^0}(\psi) \in V^{\infty}_{M^0, \Lambda}$. Alors utilisant le lemme 9 (ii) et le fait que $V^{\infty}_{M, \Lambda}$ est un sous-espace du M-module $V^{\infty}_{M, \Lambda}$, on conclut que:

$$\text{l'image de } t \text{ est contenue dans } V^{\infty}_{M, \Lambda}. \tag{5.3.11}$$

Notons t_1 l'application de $V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1} \otimes F_1$ dans $V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1}$ définie (cf. proposition 7) par $\varphi \otimes v \mapsto p^{\mathfrak{m}_1}_{-\Lambda_{1s}}(\varphi \cdot r_{M_1} \tilde{v})$. Ce qui précède montre que:

$$\forall \varphi \in V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}}, \qquad \forall v \in F_1, (r_{M_1} t)(\varphi \otimes v) = t_1((r_{M_1} \varphi) \otimes v). \tag{5.3.12}$$

Soit χ (resp. $\tilde{\chi}$) le caractère de $Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$ par lequel celui-ci agit sur V^{∞}_{Λ} (resp. $V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}}$). Alors on sait (cf. début de la démonstration) que $r_M{}^0(V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}} = V^{\infty}_{M^0, \tilde{\Lambda}}$, et d'après le lemme 10 (ii):

$$r_{M_1} V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}} = V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1, \tilde{\chi}}. \tag{5.3.13}$$

On a une égalité analogue pour Λ et χ.

Montrons que $t_1(V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1, \tilde{\chi}} \otimes F_1) = V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1, \chi}$. Il est clair que Z_1 agit par un caractère χ_1 sur F_1 puisque Z_1 est central dans M. D'autre part, l'action de Z_1 sur $C^{\infty}(M_1/M_1 \cap H)$ laisse invariante $V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1}$ et $V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1}$. En effet, la mesure M_1-invariante à gauche sur $M_1/(M_1 \cap H)$ se transforme sous l'action de Z_1, par un caractère réel de Z_1. Mais Z_1 étant compact la mesure est invariante par Z_1. Montrons que l'action de Z_1 commute à l'action de $\mathbb{D}(M_1/M_1 \cap H))$ sur $C^{\infty}(M_1/M_1 \cap H)$. L'action de Z_1 commute à l'action de $\mathbb{D}(M^0/(M^0 \cap H))$ sur $C^{\infty}(M^0/(M^0 \cap H))$ car Z_1 est central dans M^0. Par ailleurs, tout élément de $C^{\infty}(M_1/M_1 \cap H))$ est la restriction d'un élément de $C^{\infty}(M^0/M^0 \cap H)$. En effet, $M_1/(M_1 \cap H))$ fermé dans $M^0/(M^0 \cap H)$, puisque $M_1(M^0 \cap H)$ est fermé dans G (cf. les préliminaires du lemme 9), et l'injection canonique de $M_1/M_1 \cap H$ dans $M^0/M^0 \cap H$ est un prolongement (cf. démonstration du lemme 9). On peut donc utiliser [42] proposition 1.36. Comme $\mathbb{D}(M^1/M^1 \cap H)$ est naturellement inclus dans $\mathbb{D}(M^0/M^0 \cap H)$ on obtient le résultat voulu par restriction. L'invariance de $V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1}$ et $V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1}$ par Z_1 résulte alors de ce qui précède.

D'autre part, Z_1 étant central dans M, l'action de Z_1 sur $V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1}$ et $V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1}$ commute à celle de M_1. Alors, avec des notations évidentes:

$$V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1} = \bigoplus_{\kappa \in \widehat{Z_1}} V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1, \kappa} \tag{5.3.14}$$

(et de même pour Λ_1), la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls, car $V_{M_1, \tilde{\Lambda}_1}$ est somme finie de représentations unitaires irréductibles (cf. 5.1.2) de M_1.

Enfin, l'action de Z_1 commute à l'action de $Z(\mathfrak{m}_1)$ sur $C^{\infty}(M_1/M_1 \cap H)$ car l'action de Z_1 commute à celle de $\mathbb{D}(M_1/M_1 \cap H)$. Mais dans la définition de t_1, $p_{-\Lambda_{1s}}$ est donné par l'action d'un élément de $Z(\mathfrak{m}_1)$ (cf. lemme 8 et [27], théorème 5.1). Il résulte de ce qui précède:

$$t_1((V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1, \kappa}) \otimes F_1) \subset V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1, \kappa\chi_1}.$$

Comme l'image de t_1 est égale à $V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1}$ d'après la proposition 7 (ii), on déduit de (5.3.14) et son analogue pour Λ_1

$$t_1(V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1, \kappa} \otimes F_1) = V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1, \kappa\chi_1} \tag{5.3.15}$$

où χ_1 est la restriction à Z_1 du caractère de $Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$, χ'_1, par lequel celui-ci agit sur F_1. L'inspection des différentielles et la connexité de $Z_{\mathfrak{m}, \mathfrak{k}, \mathfrak{q}}$ montrent que $\tilde{\chi}\chi'_1 = \chi$. Alors (5.3.14) et (5.3.15) appliqués à $\kappa = \tilde{\chi}_{|Z_1}$ impliquent l'égalité cherchée:

$$t_1(V^{\infty}_{M_1, \tilde{\Lambda}_1, \tilde{\chi}} \otimes F_1) = V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1, \chi}.$$

Tenant compte de (5.3.12) et (5.3.13) on voit que: $r_{M_1}(\operatorname{Im} t) = V^{\infty}_{M_1, \Lambda_1, \chi'}$.

Alors (5.3.6), (5.3.7) et (5.3.10) et le lemme 10 impliquent:

$$r_{M^0}(\operatorname{Im} t) = V^{\infty}_{M^0, \Lambda}. \tag{5.3.16}$$

Mais $r_{M^0}(\operatorname{Im} t) = t(r_{M^0}(V^{\infty}_{M, \tilde{\Lambda}}) \otimes F)$ puisque $p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}$ est donné par l'action d'un élément de $Z(\mathfrak{m})$ (lemme 8 et [27], théorème 5.1). Donc Im t contient $V^{\infty}_{M^0, \Lambda}$. Joint à (5.3.16) et au lemme 9, cela prouve que le sous-M-module de $C^{\infty}(M/M \cap H)$, Im t, est égal à $V^{\infty}_{M, \Lambda}$.

Soit $\psi = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i \otimes v_i \in V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}} \otimes F_1$ tel que $p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}(\psi) = \psi$ et $t(\psi) = 0$. On suppose que (v_i) est une base de F. On a facilement:

$$p^{\mathfrak{m}_1}_{-\Lambda_{1s}}(r_{M_1}(\varphi)\, r_{M_1}(\tilde{v})) = r_{M_1}(p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}(\varphi\tilde{v})),$$

pour $\varphi \in V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}}$, $v \in F_1$. Alors $p^{\mathfrak{m}_1}_{-\Lambda_{1s}}(\psi_1)$, où $\psi_1 = \sum_{i=1}^{p} r_{M_1}(\varphi_i) \otimes v_i$, est dans le noyau de l'application t_1, d'après (5.3.12), donc nul d'après la proposition 7 (ii). D'autre part, on voit facilement que $p^{\mathfrak{m}_1}_{-\Lambda_{1s}}(\psi_1)=\psi_1$ car $p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}(\psi)=\psi$. D'où $\psi_1=0$ et $r_{M_1}(\varphi_i)=0$ pour tout i. Donc $r_{M^0}\varphi_i=0$ d'après le lemme 10 (ii).

Appliquant ce résultat aux $(L_x\otimes\pi(x))\,\psi$, $x\in\Omega$, qui vérifient les mêmes conditions que ψ, on voit, grâce au lemme 9 (i), que les φ_i sont nulles, donc que ψ est nulle. Donc t est un isomorphisme de G-modules entre $p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}(V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}}\otimes F_1)$ et V^{∞}_{Λ}. D'autre part, t est clairement continu de $V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}}\otimes F_1$ dans $C^{\infty}(M/M\cap H)$. La proposition 1 permet de conclure que t est continu de $V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}}\otimes F_1$ dans V^{∞}_{Λ}, induisant un isomorphisme topologique entre $p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}(V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}}\otimes F_1)$ et V^{∞}_{Λ}.

Étudions $\eta_\Lambda\circ t$. Soit η_{Λ_1} (resp. $\eta_{\tilde{\Lambda}_1}$) l'élément de $V^{-\infty}_{M_1,\Lambda_1}$ (resp. $V^{-\infty}_{M_1,\tilde{\Lambda}_1}$) défini par l'évaluation en l'élément neutre. Alors:

$$\eta_\Lambda=\eta_{\Lambda_1}\circ r_{M_1},\qquad \eta_{\tilde{\Lambda}}=\eta_{\tilde{\Lambda}_1}\circ r_{M_1}. \tag{5.3.17}$$

Donc: $\eta_\Lambda\circ t=\eta_{\Lambda_1}\circ r_{M_1}\circ t$. Mais, d'après (5.3.12), on a $r_{M_1}\circ t=t_1\circ(r_{M_1}\otimes\mathrm{Id})$. Alors:

$$\eta_\Lambda\circ t=\eta_{\Lambda_1}\circ t_1\circ(r_{M_1}\otimes\mathrm{Id}). \tag{5.3.18}$$

D'après la proposition 7 (iii), on a:

$$\eta_{\Lambda_1}\circ t_1=(\eta_{\tilde{\Lambda}_1}\otimes e^*_{M,H})\circ p^{\mathfrak{m}_1}_{-\Lambda_{1s}}. \tag{5.3.19}$$

De plus:

$$p^{\mathfrak{m}_1}_{-\Lambda_{1s}}\circ(r_{M_1}\otimes\mathrm{Id})=(r_{M_1}\otimes\mathrm{Id})\circ p^{\mathfrak{m}_1}_{-\Lambda_{1s}}. \tag{5.3.20}$$

Mais le centre de $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})$, agissant sur $V^{\infty}_{\tilde{\Lambda}}\otimes F_1$ par une forme linéaire nulle sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})\cap\mathfrak{h}$ et égale à Λ_1 sur $\mathfrak{z}(\mathfrak{m})\cap\mathfrak{k}\cap\mathfrak{q}$ on a:

$$p^{\mathfrak{m}_1}_{-\Lambda_{1s}}\circ(r_{M_1}\otimes\mathrm{Id})=(r_{M_1}\otimes\mathrm{Id})\circ p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}.$$

Ceci joint à (5.3.18), (5.3.19) et (5.3.20) donne:

$$\eta_\Lambda\circ t=(\eta_{\tilde{\Lambda}_1}\otimes e^*_{M,H})\circ(r_{M_1}\otimes\mathrm{Id})\circ p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}.$$

Et grâce à (5.3.17): $\eta_\Lambda\circ t=(\eta_{\tilde{\Lambda}}\otimes e^*_{M,H})\circ p^{\mathfrak{m}}_{-\Lambda_s}$. ∎

6. Transformation de Poisson, valeur au bord et foncteurs de translation

6.1.

On supposera dans tout le paragraphe 6 que $\mathfrak{g}$ est semi-simple et on adopte les notations du paragraphe 5.2.

On suppose donnés $\Lambda, \tilde{\Lambda} \in (\mathfrak{a}_M^d)^*$ et $\xi \in (\mathfrak{a}^d)^*$ (ce sont des formes linéaires réelles) telles que:

(a) il existe une représentation irréductible de dimension finie, (π, F), de G^d possédant un vecteur non nul, v_ξ, invariant par M^dN^d, se transformant par ξ sous $\mathfrak{a}^d$ et dont un élément non nul du dual, $e^*_{K^d}$, est invariant par K^d (noter que d'après [24], démonstration du théorème V.4.1, $\langle v_\xi, e^*_{K^d} \rangle$ est non nul; on supposera $\langle v_\xi, e^*_{K^d} \rangle = 1$ dans la suite). (6.1.1)

(b) $$\tilde{\Lambda} = \Lambda + \xi_{|\mathfrak{a}_M^d} \tag{6.1.2}$$

(c) $$\forall \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d), \qquad \alpha_{|\mathfrak{a}} = 0 \Rightarrow (\langle \Lambda, \alpha \rangle > 0 \text{ et } \langle \tilde{\Lambda}, \alpha \rangle > 0) \tag{6.1.3}$$

On notera $\nu_1 = \xi_{|\mathfrak{a}}$ de sorte que l'on a:

$$\tilde{\Lambda} + \nu_1 = \Lambda + \xi \tag{6.1.4}$$

On note également $\Lambda_s = \Lambda + \rho_{\mathfrak{m}^d}$.

La proposition suivante généralise certains résultats établis au cours de la démonstration de la proposition 7 pour le cas où $\dim \mathfrak{a} = 0$ et $x = e$. On procède ici d'une façon légèrement différente avec un moindre controle des supports dans (iii), mais ceci suffit pour la suite.

Proposition 9. *Soit $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que* Im ν *soit régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}^d$. Alors, pour tout $x \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$, il existe un morphisme surjectif de G^d-modules, $p_{x,\nu}$ (noté p_x en abrégé):*

$$p_x : \mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\tilde{\Lambda} - \nu)) \otimes F \to \mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\Lambda - \nu - \nu_1))$$

tel que:

(i) $p_x = p_x \circ p_{-\Lambda_s + \nu + \nu_1}$

(ii) *p_x induit un isomorphisme topologique de G^d-modules:*

$$i_x : p_{-\Lambda_s + \nu + \nu_1}(\mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\tilde{\Lambda} - \nu)) \otimes F) \to \mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\Lambda - \nu - \nu_1))$$

(iii) *L'application p_x restreint les supports.*

(iv) *Pour $\lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ on regarde $1_\lambda (\in I_\lambda^{P^d})$ comme un élément du dual topologique de $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \lambda)$. Alors si $x = e$ ou si $x\tilde{\Lambda}$ est dominant par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$, il existe $c_x \neq 0$ tel que:*

$$c_x 1_{x(\Lambda - \nu - \nu_1)} \circ p_x = (1_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)} \otimes e^*_{K^d}) \circ p_{-\Lambda_s + \nu + \nu_1}.$$

Démonstration. On identifie $\mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\tilde{\Lambda}-\nu))\otimes F$ à $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}\otimes F^*)$ grâce à l'application habituelle (cf. (4.3.2)), Ψ, définie de manière imagée par:

$$\forall\tau\in\mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\tilde{\Lambda}-\nu)), \qquad \forall v\in F, \qquad \text{“}\Psi(\tau\otimes v)(g)\equiv\tau(g)\otimes\pi(g^{-1})\,v\text{”}.$$

On considère une suite de Jordan Hölder du P^d-module F

$$0\subsetneq F_1=\mathbb{C}v_\xi\subsetneq F_2\cdots\subsetneq F_n=F.$$

On en déduit une suite de Jordan Hölder du P^d-module F^* en prenant les orthogonaux des F_i, puis, par induction, une suite de composition du G^d-module $I^{P^d}_{\mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}\otimes F^*}$. Enfin en prenant les orthogonaux des éléments de celle-ci, on obtient une suite de composition de $\mathscr{D}'(G^d, P^d, (\mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}\otimes F^*))$:

$$0\subsetneq U_1\subsetneq U_2\cdots\subsetneq U_n=\mathscr{D}'(G^d, P^d, (\mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}\otimes F^*)),$$

où $U_i=\mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}\otimes F_i^*)$. De plus l'inclusion $U_i\to U_{i+1}$ est égale à $(\mathrm{Ind}\, r_i)'$ où r_i est la projection naturelle de F_{i+1}^* dans F_i^*, ou plus exactement de $\mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}\otimes F_{i+1}^*$ dans $\mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}\otimes F_i^*$. Enfin les sous-quotients de cette suite de composition sont isomorphes à $V_i:=\mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}\otimes(F_i/F_{i-1})^*)$ (cf. (3.1.13) et (3.1.14)).

On note $\mu_i\in(\mathfrak{j})^*_{\mathbb{C}}$ le plus haut poids du M^dA^d-module irréductible F_i/F_{i-1} relativement à l'ensemble de racines positives de $\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}$ dans $(\mathfrak{m}^d\oplus\mathfrak{a}^d)_{\mathbb{C}}$, $\{\alpha\in\tilde{x}(\Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}))\mid\alpha_{|\mathfrak{a}^d}=0\}$, où $\tilde{x}$ est un élément de $W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ tel que $\tilde{x}_{|\mathfrak{a}^d}=x$. Alors le caractère infinitésimal χ_i de V_i admet $-x(\tilde{\Lambda}-\nu)+\mu_i+\tilde{x}\rho_{\mathfrak{m}^d}$ comme paramètre de Harish-Chandra.

Ce caractère χ_i de $Z(\mathfrak{g})$ n'est égal au caractère infinitésimal de $\mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\Lambda-\nu-\nu_1))$, qu'on notera χ, que si (et seulement si) il existe $w\in W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ tel que:

$$-\tilde{x}(\tilde{\Lambda}-\nu)+\mu_i+\tilde{x}\rho_{\mathfrak{m}^d}=w(-\tilde{x}(\Lambda-\nu-\nu_1)+\tilde{x}\rho_{\mathfrak{m}^d})$$

soit encore, en posant $w'=\tilde{x}^{-1}w\tilde{x}$ et $\mu_i'=\tilde{x}^{-1}\mu_i$:

$$(\tilde{\Lambda}-\nu)-\mu_i'-\rho_{\mathfrak{m}^d}=w'(\Lambda-\nu-\nu_1-\rho_{\mathfrak{m}^d}. \tag{6.1.5}$$

On regarde les deux membres de l'égalité ci-dessus comme des formes $\mathbb{C}$-linéaires sur $\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}=(i\mathfrak{t}^d)\oplus\mathfrak{a}^d$, où $\mathfrak{t}^d:=\mathfrak{j}_{\mathbb{C}}\cap\mathfrak{m}^d$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{m}^d$.

Alors en prenant la partie imaginaire des deux membres de (6.1.5) et en tenant compte du fait que $w'\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}=\mathfrak{j}_{\mathbb{R}}$ on voit d'abord que $w'\mathrm{Im}\,\nu=\mathrm{Im}\,\nu$. Mais le stabilisateur de $\mathrm{Im}\,\nu$ dans $W(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$ est engendré par les réflexions par rapport aux racines orthogonales à $\mathrm{Im}\,\nu$. La régularité de $\mathrm{Im}\,\nu$ montre que w' laisse invariant $\mathfrak{a}$ point par point. Alors en restreignant à $\mathfrak{a}$ la partie réelle de (6.1.5) on obtient:

$$\mu'_{i|\mathfrak{a}} = \nu_1. \tag{6.1.6}$$

Donc μ'_i est le plus haut poids relativement à $\Delta^+((\mathfrak{m}^d \oplus \mathfrak{a}^d)_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}) = \{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}) \mid \alpha_{|\mathfrak{a}^d} = 0\}$, d'une sous-représentation irréductible de $M^d A^d$ dans le sous-espace F_1 de F formé des vecteurs de poids ν_1 sous $\mathfrak{a}$. Mais F_1 est une représentation irréductible de $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ (où $\mathfrak{l} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a}$) de plus haut poids ξ par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}) = \{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}}) \mid \alpha_{|\mathfrak{a}} = 0\}$ égale à $U(\mathfrak{m})\, v_\xi$ (utiliser le théorème Poincaré-Birkhoff-Witt et la décomposition $\mathfrak{g} = \theta(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$). Par ailleurs, prenant la partie réelle de (6.1.5) et tenant compte de (6.1.6) et des propriétés de w', on obtient:

$$\mu'_i - (\Lambda + \xi) + \rho_{\mathfrak{m}^d} = w'(-\Lambda + \rho_{\mathfrak{m}^d})$$

où w' est un élément du groupe de Weyl de $\Delta(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$, $W(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{j}_{\mathbb{C}})$.

En utilisant le lemme 4.8 de [40] pour $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ et sa sous-algèbre parabolique $(\mathfrak{p}^d)_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{l}_{\mathbb{C}}$ on obtient $\mu'_i = \xi$ et $\mu_i = \tilde{x}\xi$. Bien entendu l'indice i pour lequel cela se produit est unique. On le notera i_0. Alors comme v_ξ est, à un scalaire, près, le seul vecteur de poids ξ dans F et qu'il est invariant sous M^d on voit que $\xi|_{\mathfrak{j}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{m}^d{}_{\mathbb{C}}} = 0$, $F_{i_0}/F_{i_0 - 1}$ est de dimension 1 et égal à $\mathbb{C}_{\tilde{x}\xi|\mathfrak{a}^d}$ comme P^d-module.

Donc un seul sous-quotient de la suite de composition de $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)} \otimes F^*)$ a une image non nulle sous p_χ et ce sous-quotient V_{i_0} est isomorphe à $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{x(\Lambda - \nu - \nu_1)})$.

Par ailleurs, on a:

$$p_x(\mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)} \otimes F^*)) \subset U_{i_0}. \tag{6.1.7}$$

En effet, on a une suite exacte forte de P^d-modules, $0 \to F_{i_0}^\perp \to F^* \to F_{i_0}^* \to 0$, qui, tensorisée par $\mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}$, donne par induction et transposition (cf. (3.1.14)), une suite exacte forte de G^d-modules, $0 \to U_{i_0} \to U_n \to W_{i_0} \to 0$, où $W_{i_0} = \mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)} \otimes F_{i_0}^\perp)$.

On démontre que $p_\chi(W_{i_0}) = 0$. Pour cela, on considère une suite de composition associée à la suite de Jordan Hölder de F/F_{i_0}, $0 \not\subseteq F_{i_0+1}/F_{i_0} \subset \cdots \subset F_n/F_{i_0} = F/F_{i_0}$. Alors, en utilisant l'exactitude du foncteur p_χ et ce qui précède, on voit que $p_\chi(W_{i_0}) = 0$ et $p_\chi(U_{i_0}) = p_\chi(U_n)$. D'où $p_\chi(U_n) \subset U_{i_0}$ comme annoncé. Mais $F_{i_0}/F_{i_0 - 1} \simeq \mathbb{C}_{\tilde{x}\xi|\mathfrak{a}^d}$ comme P^d-module. D'où une suite exacte forte de P^d-modules, $0 \to F_{i_0 - 1} \to F_{i_0} \to \mathbb{C}_{x\xi|\mathfrak{a}^d} \to 0$, qui par transposition et tensorisation avec $\mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}$ puis induction et transposition (cf. (3.1.14)) conduit, en tenant compte de (6.1.4), à une suite exacte forte de G^d-modules:

$$0 \to U_{i_0 - 1} \to U_{i_0} \xrightarrow{p} \mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{x, (\Lambda - \nu - \nu_1)}) \to 0. \tag{6.1.8}$$

Comme précédemment on voit que $p_\chi(\mathscr{D}'(G^d, P^d, F^*_{i_0-1}))=0$ et que p induit un isomorphisme topologique entre $p_\chi(U_{i_0})=p_\chi(U_n)$ et $\mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\Lambda-\nu-\nu_1))$. On définit alors:

$$p_x = p \circ p_\chi \circ \Psi. \tag{6.1.9}$$

On vérifie que cette expression est bien définie grâce à (6.1.8) et (6.1.7). Les propriétés de p et Ψ permettent de voir que p_x satisfait (i et (ii).

Par ailleurs, p_χ est donné par l'action d'un élément de $Z(\mathfrak{g})$ sur $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \mathbb{C}_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)} \otimes F^*)$ (cf. lemme 8). Cette action est donnée par un opérateur différentiel qui restreint les supports. L'application p possède la même propriété (cf. 3.1.10). Enfin on vérifie aisément que Ψ préserve les supports. Par composition on voit que p_x vérifie (iii).

Prouvons (iv). Comme $p_x = p_x \circ p_\chi$, il suffit de prouver que:

$$(1_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)} \otimes e^*_{K^d})_{|\operatorname{Im} p_\chi} = c_x\, 1_{\Lambda-\nu-\nu_1} \circ i_x, \tag{6.1.10}$$

avec $c_x \neq 0$.

Clairement, $(1_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}) \otimes e^*_{K^d|\operatorname{Im} p_\chi}$ est un élément K^d-invariant du dual topologique de $\operatorname{Im} p_\chi$. Mais d'après la réflexivité de $I^{P^d}_{x(\Lambda-\nu-\nu_1)}$, on voit, grâce à (ii), que le dual topologique de $\operatorname{Im} p_\chi$ est isomorphe à $I^{P^d}_{x(\Lambda-\nu-\nu_1)}$ et admet à un scalaire près un unique vecteur K^d-invariant non nul égal à $1_{x(\Lambda-\nu-\nu_1)} \circ i_x$. Donc il existe $c_x \in \mathbb{C}$ tel que (6.1.10) soit vrai. Montrons que c_x est non nul. Ceci équivaut à montrer que $p_{\check{\chi}}(1_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)} \otimes v^*_{K^d})$ est non nul, où $\check{\chi}$ désigne le caractère infinitésimal de $I^{P^d}_{x(\Lambda-\nu-\nu_1)}$.

Traitons le cas $x=e$. On introduit l'isomorphisme de G^d-modules, $\Phi\colon I^{P^d}_{\tilde{\Lambda}-\nu} \otimes F^* \to I^{P^d}_{\mathbb{C}_{\tilde{\Lambda}-\nu} \otimes F^*}$, défini par:

$$\forall g \in G^d, \qquad \forall \varphi \in I^{P^d}_{\tilde{\Lambda}-\nu}, \qquad \forall v^* \in F^*, \qquad (\Phi(\varphi \otimes v^*))(g) = \varphi(g)\, \pi^*(g^{-1})\, v^*.$$

D'autre part, on a la suite exacte de P^d-modules:

$$0 \to (\mathbb{C}v_\xi)^\perp \to F^* \xrightarrow{r} \mathbb{C}_{-\xi|\mathfrak{a}^d} \to 0,$$

que l'on peut tensoriser par $\mathbb{C}_{\tilde{\Lambda}-\nu}$. Par induction, on en déduit un morphisme de G^d-modules surjectif, noté encore $\operatorname{Ind} r\colon I^{P^d}_{\mathbb{C}_{\tilde{\Lambda}-\nu} \otimes F^*} \xrightarrow{\operatorname{Ind} r} I^{P^d}_{\Lambda-\nu-\nu_1}$ qui vérifie:

$$\forall g \in G^d, \qquad \forall \psi \in I^{P^d}_{\mathbb{C}_{\tilde{\Lambda}-\nu} \otimes F^*}, \qquad ((\operatorname{Ind} r)(\psi))(g) = \langle \psi(g), v_\xi \rangle.$$

On a $\operatorname{Ind} r \circ p_{\check{\chi}} = \operatorname{Ind} r$ car $I^{P^d}_{\Lambda-\nu-\nu_1}$ possède $\check{\chi}$ comme caractère infinitésimal. On pose:

$$c := ((\operatorname{Ind} r \circ \Phi \circ p_{\check{\chi}})(1_{\tilde{\Lambda}-\nu} \otimes e^*_{K^d}))(e).$$

Utilisant $\Phi \circ p_{\check{\chi}} = p_{\check{\chi}} \circ \Phi$ et ce qui précède on a:

$$c = ((\mathrm{Ind}\, r \circ \Phi)(1_{\tilde{\Lambda} - \nu} \otimes e^*_{K^d}))(e).$$

Grâce à la définition de Ind r et de Φ on obtient:

$$c = \langle 1_{\tilde{\Lambda} - \nu}(e)\, e^*_{K^d}, v_\xi \rangle = \langle e^*_{K^d}, v_\xi \rangle.$$

D'où $c = 1$ d'après les hypothèses. Donc $p_{\check{\chi}}(1_{\tilde{\Lambda} - \nu} \otimes e^*_{K^d}) \neq 0$ comme désiré. Ceci achève de prouver (iv) lorsque $x = e$. On a $c_e = 1$.

Soit $x \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ tel que $\langle x\tilde{\Lambda}, \alpha \rangle \geqslant 0$ pour tout α élément de $\Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$. Soit:

$$\mathscr{A}' = \{\lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}} \mid \forall \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d), 2(\lambda, \alpha)/(\alpha, \alpha) \notin -\mathbb{N}^*\}. \quad (6.1.11)$$

Avec nos hypothèses, montrons que $\tilde{\Lambda} - \nu$ et $x(\tilde{\Lambda} - \nu)$ sont éléments de $\mathscr{A}'$.

Si on a $2(\tilde{\Lambda} - \nu, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in -\mathbb{N}^*$, on voit, en prenant la partie imaginaire, que $(\mathrm{Im}\, \nu, \alpha) = 0$ et, d'après la régularité de Im ν, on a $\alpha_{|\mathfrak{a}} = 0$. Alors d'après nos hypothèses ((6.1.3)) on a α négative. Ce qui prouve $\tilde{\Lambda} - \nu \in \mathscr{A}'$.

Si $2(x(\tilde{\Lambda} - \nu), \alpha)/(\alpha, \alpha) \in -\mathbb{N}^*$ on conclut comme précédemment que $x^{-1}\alpha$ est nulle sur $\mathfrak{a}$ donc $(x\nu, \alpha) = 0$. Alors on a $2(x\tilde{\Lambda}, \alpha)/(\alpha, \alpha) \in -\mathbb{N}^*$. L'hypothèse sur x et $\tilde{\Lambda}$ montre alors que α est négative. Ceci achève de prouver que $x(\tilde{\Lambda} - \nu) \in \mathscr{A}'$.

Alors le théorème 12.2 de [6] implique que la transformation de Poisson réalise un isomorphisme de G^d-modules entre $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \tilde{\Lambda} - \nu)$ (resp. $\mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\tilde{\Lambda} - \nu)))$ avec le G^d-module $\mathscr{E}^*_{\tilde{\Lambda} - \nu}(G^d/K^d)$ (cf. [6], page 143, pour les notations). Comme la dimension du sous-espace des vecteurs K^d-invariants dans le dual $I^{P^d}_{\tilde{\Lambda} - \nu}$ (resp. $I^{P^d}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}$) de $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \tilde{\Lambda} - \nu)$ (resp. $\mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\tilde{\Lambda} - \nu)))$ est égale à un, on en déduit un G^d-isomorphisme topologique entre $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \tilde{\Lambda} - \nu)$ et $\mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\tilde{\Lambda} - \nu))$ dont le transposé envoie $1_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}$ sur $1_{\tilde{\Lambda} - \nu}$. Alors par transport de structure, comme $p_{\check{\chi}}(1_{\tilde{\Lambda} - \nu} \otimes e^*_{K^d})$ est non nul, on voit que $p_{\check{\chi}}(1_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)} \otimes e^*_{K^d})$ est non nul. Ceci implique ce $c_x \neq 0$ comme désiré. ∎

On rappelle que, pour $\lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$, la transformation de Poisson $\mathscr{P}_\lambda$ est un G^d-morphisme de $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \lambda)$ dans $\mathscr{E}^*_\lambda(G^d/K^d) \subset C^\infty(G^d/K^d)$ (cf. [6], page 143 pour la définition de $\mathscr{E}^*_\lambda(G^d/K^d)$, et que pour $\lambda \in \mathscr{A}'$, $\mathscr{P}_\lambda$ est un isomorphisme topologique. De plus si $\lambda \in \mathscr{A}'$, on dispose d'un G^d-isomorphisme, β_λ, entre $\mathscr{E}^*_\lambda(G^d/K^d)$ et $\mathscr{D}'(G^d, P^d, \lambda)$, appelé valeur au bord, tel que $\mathscr{P}_\lambda^{-1} = c(\lambda)^{-1}\beta_\lambda$, où c est la fonction d'Harish-Chandra et $c(\lambda) \neq 0$ (cf. [6], théorème 12.2). On note enfin que $\mathscr{E}^*_\lambda(G^d/K^d) = \mathscr{E}^*_{w\lambda}(G^d/K^d)$ si $w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$.

PROPOSITION 10. *On conserve les notations et hypothèses de la proposition* 9, *en particulier l'hypothèse de régularité de* Im ν.

(i) *On suppose que* $x = e$ *ou bien que* $x\tilde{\Lambda} \in (\mathfrak{a}^d)^*$ *est dominant relativement à* $\Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$. *Alors avec les notations de la proposition* 9 (ii), (iv):

$$\forall \tau \in \mathscr{D}'(G^d, P^d, \tilde{\Lambda} - \nu), \qquad \forall v \in F,$$
$$p_{-\Lambda_s + \nu + \nu_1}((\mathscr{P}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}(\tau))\, \tilde{v}) = c_x \mathscr{P}_{x(\Lambda - \nu - \nu_1)}(p_x(\tau \otimes v))$$

(*où* $\tilde{v}$ *est la fonction sur* G^d/K^d *définie par* $\tilde{v}(gK^d) \equiv \langle \pi^*(g)\, e^*_{K^d}, v \rangle$).

(ii) *On suppose que* $x = e$ *ou que* $x\Lambda$ *et* $x\tilde{\Lambda}$ *sont* $\Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$-*dominants. Alors* $x(\tilde{\Lambda} - \nu)$ *et* $x(\Lambda - \nu - \nu_1)$ *sont des éléments de* $\mathscr{A}'$.

(iii) *Avec les hypothèses de* (ii), *il existe* $c_x(\nu) \in \mathbb{C} - \{0\}$ *telle que*:

$$\forall f \in \mathscr{E}^*_{\tilde{\Lambda} - \nu}(G^d/K^d), \qquad \forall v \in F, \qquad p_{-\Lambda_s + \nu + \nu_1}(f \cdot \tilde{v}) \in \mathscr{E}^*_{\Lambda - \nu - \nu_1}(G^d/K^d)$$
$$\text{et} \qquad \beta_{x(\Lambda - \nu - \nu_1)}(p_{-\Lambda_s + \nu + \nu_1}(f\tilde{v})) = c_x(\nu)\, p_x(\beta_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}(f) \otimes v).$$

De plus dans l'égalité ci-dessus le support du premier membre est inclus dans le support de $\beta_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}(f)$.

Démonstration. Prouvons (i). On note $\chi = \chi_{-\Lambda_s + \nu + \nu_1} \in \widehat{Z(\mathfrak{g})}$. Soit $I := (p_\chi((\mathscr{P}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}(\tau))\, \tilde{v}))(g)$ pour $g \in G$. On a, par définition de la transformation de Poisson:

$$((\mathscr{P}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}(\tau))\, \tilde{v})(g) = \langle ((\pi^{P^d}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)} \otimes \pi^*)(g))(1_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)} \otimes e^*_{K^d}), \tau \otimes v \rangle.$$

Appliquant p_χ aux deux membres (regardés comme fonctions). On obtient:

$$I = \langle ((\pi^{P^d}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)} \otimes \pi^*)(g))(1_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)} \otimes e^*_{K^d}), p_\chi(\tau \otimes v) \rangle.$$

Utilisant que p_χ est un G^d-morphisme et la proposition 9 (iv) on a:

$$I = c_x \langle 1_{x(\Lambda - \nu - \nu_1)}, p_x(((\pi^{P^d}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)})' \otimes \pi)(g^{-1}))(\tau \otimes v) \rangle.$$

En utilisant la propriété d'entrelacement de p_x on a finalement:

$$I = c_x \langle \pi^{P^d}_{x(\Lambda - \nu - \nu_1)}(g)\, 1_{x(\Lambda - \nu - \nu_1)}, p_x(\tau \otimes v) \rangle$$
$$= c_x(\mathscr{P}_{x(\Lambda - \nu - \nu_1)}(p_x(\tau \otimes v)))(g).$$

Ceci prouve (i).

On a déjà vu au cours de la démonstration de la proposition 9 (iv) que $x(\tilde{\Lambda} - \nu) \in \mathscr{A}'$. Le même raisonnement appliqué à Λ et $\nu' = \nu + \nu_1$, qui vérifient les mêmes hypothèses, montre que $x(\Lambda - \nu - \nu_1) \in \mathscr{A}'$. Ceci prouve (ii).

Passons à (iii). Appliquons (i) avec $\tau = \beta_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}(f)$, où $f \in \mathscr{E}^*_{\tilde{\Lambda} - \nu}(G^d/K^d)$. On obtient:

$$p_\chi((\mathscr{P}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)} \beta_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}(f))\, \tilde{v}) = c_x \mathscr{P}_{x(\Lambda - \nu - \nu_1)}(p_x(\beta_{x(\tilde{\Lambda} - \nu)}(f) \otimes v)).$$

Ceci prouve que le premier membre est dans l'image de $\mathscr{P}_{x(\tilde{\Lambda} - \nu - \nu_1)}$ i.e. dans $\mathscr{E}^*_{\Lambda - \nu - \nu_1}(G^d/K^d)$. On peut donc appliquer $\beta_{x(\Lambda - \nu - \nu_1)}$ aux deux membres de l'égalité ci-dessus. On obtient alors l'égalité voulue avec:

$$c_x(\nu) = c_x c(x(\tilde{\Lambda} - \nu))^{-1} c(x(\Lambda - \nu - \nu_1)) \tag{6.1.12}$$

qui est bien défini et non nul car $x(\tilde{\Lambda} - \nu)$ et $x(\Lambda - \nu - \nu_1)$ sont des éléments de $\mathscr{A}'$. L'assertion sur les supports résulte du fait que p_x restreint les supports (cf. proposition 9 (iii)). ▮

7. Démonstration du théorème 1

7.1. *Rappel d'un résultat de T. Oshima*

D'après le lemme 5, on peut supposer G semi-simple connexe de centre fini et H connexe, ce que l'on fera dans la suite.

On utilise encore les notations spécifiques à ce cas (§ 5.2). On se donne $\lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$ tel que:

$$\forall \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d), \qquad \operatorname{Re}(\lambda, \alpha) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad (\lambda, \alpha) \neq 0. \tag{7.1.1}$$

L'hypothèse de régularité sur λ est faite pour simplifier un peu l'exposé qui suit. Alors $\lambda \in \mathscr{A}'$. Si f est une fonction C^∞ sur G^d/K^d et propre sous $\mathbb{D}(G^d/K^d)$ pour la valeur propre λ, $\beta_\lambda(f)$ est défini dans [25], § 6. Si de plus $f \in \mathscr{E}^*_\lambda(G^d/K^d)$ on dispose d'une autre définition de $\beta_\lambda(f) \in \mathscr{D}'(G^d, P^d, \lambda)$ (cf. [6] § 12). Mais utilisant les propriétés de ces deux applications (cf. le rappel avant la proposition 10 et [25], § 5 et § 6) on voit que ces deux définitions coïncident pour $f \in \mathscr{E}^*_\lambda(G^d, K^d)$.

Soit $f \in C^\infty(G/H)_{(K)}$ propre sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre λ. Alors $f^d \in \mathscr{A}(G^d/K^d, \lambda)$ et même $f \in \mathscr{E}^*_\lambda(G^d/K^d)$ (cf. e.g. [6] théorème 14.1).

De plus, on a le résultat suivant de T. Oshima (cf. [31], corollaire 4.5). On note $(\alpha_1, ..., \alpha_l)$ l'ensemble des racines simples de $\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\phi)$ et $(\omega_1, ..., \omega_l)$ la base duale de $\mathfrak{a}_\phi \subset \mathfrak{a}^d$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ on note

$$W\langle \lambda \rangle = \{ w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d) \mid (\operatorname{Re}\langle w\lambda, \omega_1 \rangle, ..., \operatorname{Re}\langle w\lambda, \omega_l \rangle) \notin (]-\infty, 0])^l \}. \tag{7.1.2}$$

Alors f est tempérée si et seulement si:

$$\forall w \in W\langle \lambda \rangle, \qquad \operatorname{Supp} \beta_\lambda(f^d)\, \overline{P^d w^{-1} P^d} \text{ n'a pas de point intérieur.} \tag{7.1.3}$$

Ici $\overline{P^d w^{-1} P^d}$ est l'adhérence de $P^d w^{-1} P^d$ dans G^d. Comme $\beta_\lambda(f^d)$ est H^d-fini, $\operatorname{Supp} \beta_\lambda(f^d)$ est invariant à gauche par H^d. Alors $\operatorname{Supp} \beta_\lambda(f^d)$ est une réunion de (H^d, P^d)-doubles classes qui sont en nombre fini ([29]).

Comme la réunion d'une famille (nécessairement finie) de (H^d, P^d)-doubles classes est d'intérieur vide si et seulement si chacune de ces doubles classes est d'intérieur vide (cf. [12], lemme 3 (i)), la condition (7.1.3) est équivalente à:

$$\begin{array}{l}\operatorname{Supp} \beta_\lambda(f^d) \text{ est inclus dans la réunion, } S_\lambda, \\ \text{des } (H^d, P^d)\text{-doubles classes } H^d x P^d \text{ telles que:} \\ \forall w \in W\langle \lambda \rangle, \quad H^d x P^d \overline{P^d w^{-1} P^d} \text{ est d'intérieur vide.}\end{array} \tag{7.1.4}$$

Comme il n'existe qu'un nombre fini de (H^d, P^d)-doubles classes dans G^d et que S_λ est H^d-invariant à gauche et P^d-invariant à droite, il existe un plus grand sous-ensemble de S_λ fermé dans G^d et invariant à gauche (resp. à droite par H^d (resp. P^d). On le note F_λ. Finalement on a:

$$f \text{ est tempérée si et seulement si } \operatorname{Supp} \beta_\lambda(f^d) \subset F_\lambda. \tag{7.1.5}$$

On remarque que:

$$F_\lambda = F_{\operatorname{Re} \lambda} \qquad \text{et} \qquad \forall t > 0, \quad F_\lambda = F_{t\lambda}. \tag{7.1.6}$$

7.2. *Correspondance de Flensted-Jensen et croissance modérée*

G est donc toujours supposé connexe et semi-simple. Comme on l'a fait pour G (cf. § 1.2) on introduit une fonction noter $\| \;\|$ sur G^d. Pour $r \in \mathbb{R}$, on définit, comme en 2.3, les espaces $C_r(G^d)$ et $C_r^\infty(G^d)$ et on note $\| \;\|_r$ la norme sur $C_r(G^d)$ définie par:

$$\forall f \in C_r(G^d), \qquad \|f\|_r = \sup_{g \in G^d} \|g\|^{-r} \, |f(g)|$$

On définit de même des normes $\| \;\|_{q,r}$, $q \in \mathbb{N}$, sur $C_r^\infty(G^d)$, (cf. § 2.3).

LEMME 11. *Soit $\mu \in \hat{K}$ tel que μ soit triviale sur $Z(G) \cap H$. Alors il existe $r_\mu > 0$ et $C_\mu > 0$ tels que l'on ait*:

$$\forall r \geqslant 0, \forall f \in C^\infty(G/H)^\mu \cap C_r(G), \qquad f^d \in C^\infty(G^d/K^d) \cap C_{r+r_\mu}(G^d)$$

$$\textit{et} \qquad \|f^d\|_{r+r_\mu} \leqslant C_\mu \, \|f\|_r$$

Démonstration. On adopte les notations utilisées pour la définition de f^d (cf. (5.2.4) et ce qui suit). On choisit une base orthonormée du sous-espace V_1 de $L^2(K, dk)$, $\varphi_1, ..., \varphi_n$. Alors en écrivant $F_f(x) \in V_1$, pour $x \in G/H$, dans cette base on obtient:

$$F_f(x) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x)\, \varphi_i.$$

Mais:

$$(F_f(x))(k) = f(k^{-1}x),$$

d'après (5.2.4). Donc:

$$F_i(x) = \int_K f(k^{-1}x)\, \overline{\varphi_i(k)}\, dk,$$

et pour tout i, F_i est C^∞ sur G/H. De plus:

$$\forall k_0 \in K, \qquad \forall a \in A_\phi, \qquad |F_i(k_0 aH)| \leqslant (\sup_{k \in K} |f(kaH)|)\, (\sup_{k \in H} |\varphi_i(k)|). \tag{7.2.1}$$

On pose $C_1 = \sup_{k \in K,\, i=1, ..., n} |\varphi_i(k)|$. Soit $g \in G$. Alors $g = k_0 ah$ où $k_0 \in K$, $a \in A_\phi$, $h \in H$. De plus, $\|g\| = \|ah\| \geqslant \|a\|$ (cf. [6], lemme 14.4 (ii) et utiliser le fait que $\|g\| = \|g^{-1}\|$). Comme $r \geqslant 0$, on déduit de (7.2.1) que:

$$\forall i = 1, ..., n, \qquad \forall r \geqslant 0, \qquad \|F_i\|_r \leqslant C_1\, \|f\|_r. \tag{7.2.2}$$

Par ailleurs, comme les φ_i^d (cf. après (5.2.4)) sont de combinaisons linéaires de coefficients d'une représentation de dimension finie de H^d, μ', il résulte des propriétés de $\|\ \|$ sur G^d (cf. [6], lemme 2.1 (iv)):

$$\exists r_\mu > 0, \qquad \exists C_2 > 0, \qquad \forall i = 1, ..., n, \qquad \sup_{h \in H^d} \|h\|^{-r_\mu}\, \varphi_i^d(h) \leqslant C_2. \tag{7.2.3}$$

Tenant compte de l'égalité $G^d = H^d (\exp \mathfrak{a}_\phi)\, K^d$, on a:

$$\|f^d\|_{r + r_\mu} = \sup_{h \in H^d,\, a \in \exp(\mathfrak{a}_\phi)} \|ha\|^{-r - r_\mu}\, |f^d(haK^d)|. \tag{7.2.4}$$

Mais d'après (5.3.5):

$$f^d(haK^d) = \sum_{i=1}^{n} F_i(a)\, \varphi_i^d(h^{-1}). \tag{7.2.5}$$

De plus, d'après [6], lemme 14.4:

$$\forall h \in H^d, \qquad \forall a \in \exp \mathfrak{a}_\phi, \qquad \|ha\| \geqslant \operatorname{Sup}(\|h\|, \|a\|) \geqslant 1$$
$$\text{et} \qquad \|h\| = \|h^{-1}\| \tag{7.2.6}$$

En partant de (7.2.4) et utilisant (7.2.5), (7.2.6) on voit, grâce à (7.2.2), que:

$$\|f^d\|_{r+r_\mu} \leqslant nC_1 C_2 \|f\|_r.$$

D'où le lemme. ∎

On note $\mathscr{S}(G^d) = \bigcap_{r \in \mathbb{R}} C_r^\infty(G^d)$. Si $\psi \in \mathscr{S}(G^d)$ et $f \in C_r(G)$, pour $r \in \mathbb{R}$, le produit de convolution $\check{\psi} * f$ est bien défini, où $\check{\psi}(g) \equiv \psi(g^{-1})$. (cf. [6] haut de la page 143). Soit $b \in \mathbb{R}$ tel que: $\int_{G^d} \|g\|^{-b}\, dg < +\infty$ (cf. [6], § 11 pour l'existence de b). Le lemme suivant est implicite dans [6], lemme 11.1.

Lemme 12. *Soit $r \geqslant 0$. Si $\psi \in \mathscr{S}(G^d)$, l'opérateur de convolution à gauche par $\check{\psi}$, noté $\check{L}(\psi)$, définit un opérateur borné de $C_r(G^d)$ dans $C^\infty_{r+b}(G^d)$.*

Démonstration. On remarque que $C_r(G^d)$ s'identifie à un sous-espace de $(C_{-b-r}(G^d))'$ en posant:

$$\forall \tau \in C_r(G^d), \qquad \forall \varphi \in C_{-b-r}(G^d), \qquad \langle \tau, \varphi \rangle = \int_{G^d} \tau(g)\, \varphi(g)\, dg.$$

De plus, $\|\tau\|'_{-b-r}$ vérifie:

$$\|\tau\|'_{-b-r} \leqslant \left(\int_{G^d} \|g\|^{-b}\, dg \right) \|\tau\|_r$$

où $\|\ \|'_{-b-r}$ est la norme sur le dual topologique de l'espace de Banach $C_{-b-r}(G^d)$. Alors on applique le lemme 11.1 de [6] en y remplaçant φ par ψ, r par $-(b+r)$, T par τ et en y prenant q égal à 0. On obtient:

$$\forall q' \in \mathbb{R}, \qquad \exists s \geqslant 0, \qquad \exists C' > 0, \qquad \forall \psi \in \mathscr{S}(G^d),$$
$$\forall \tau \in C_r(G^d), \qquad \|L^\vee(\psi)\, \tau\|_{q', b+r} \leqslant C' \|\tau\|_r \|\psi\|_{q', -b-r-s}.$$

Le lemme en résulte. ∎

Lemme 13. *Soient $\mu \in \hat{K}$, $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)^*_{\mathbb{C}}$, Ω un ouvert de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ et $f \in \mathscr{A}_*(G/H, \Lambda, \Omega)$. On suppose que pour tout $\nu \in \Omega$, f_ν est de type μ. Soient $x \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ et $\Omega'_x := \{\nu \in \Omega \mid x(\Lambda - \nu) \in \mathscr{A}'\}$. C'est un ouvert de Ω. Alors pour tout $\nu \in \Omega'_x$, on a $f^d_\nu \in \mathscr{E}^*_{\Lambda-\nu}(G^d/K^d)$ et $\beta_{x(\Lambda-\nu)}(f^d_\nu)$ est bien définie.*

De plus, si $\psi \in C_c^\infty(G^d)$, *l'application de* Ω'_x *dans* $\mathbb{C}$ *définie par*:

$$\nu \mapsto \langle \beta_{x(\Lambda-\nu)}(f_\nu^d), \psi \rangle$$

est holomorphe. Ici $\beta_{x(\Lambda-\nu)}(f_\nu^d) \in \mathscr{D}'(G^d, P^d, x(\Lambda-\nu))$ *est regardé comme une distribution sur* G^d.

Démonstration. Il est facile de voir grâce aux lemmes 11 et 12 que pour tout $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $L^\vee(\psi) f_\nu^d$ est $\mathbb{D}(G^d/K^d)$-propre pour la valeur propre $\Lambda - \nu$ et que pour tout $\nu_0 \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ il existe un voisinage ouvert de ν_0 dans $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $V(\nu_0)$, et $r_0 > 0$ tel que $\nu \mapsto L(\check{\psi}) f_\nu^d$ soit holomorphe de $V(\nu_0)$ dans $C_{r_0}^\infty(G^d)$. Alors le lemme résulte de la définition de $\beta_{x(\Lambda-\nu)}$ (cf. [6] § 12) et de la généralisation à notre situation du théorème 9.2 (i) et première partie de (ii) de l.c. Cette généralisation repose sur une extension (facile et par les mêmes méthodes) du théorème 3.6 de l.c. au cas où le paramètre varie dans $\Lambda + \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. ∎

7.3. *Démonstration du théorème* 1

Comme tout série discrète de $M/M \cap H$ est contenue dans une somme finie de $V_{M,\Lambda}$ (cf. (5.1.2)), on peut se ramener à prouver le théorème lorsque $V_\delta = V_\Lambda \neq 0$, $\Lambda \in (\mathfrak{a}_d^M)^*$ et $\eta = \eta_\Lambda$ (on omet les indices M). On peut supposer de plus que Λ vérifie (6.1.3) i.e.: $\forall \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$, $\alpha_{|\mathfrak{a}} = 0 \Rightarrow (\Lambda, \alpha) > 0$ (cf. proposition 8 et (5.1.3)).

Avec les notations de la proposition 8 (iii) on pose $(\tilde{\delta}, V_{\tilde{\delta}}, \tilde{\eta}) = (\pi_{\tilde{\Lambda}}, V_{\tilde{\Lambda}}, \eta_{\tilde{\Lambda}})$ où l'on a pris soin de choisir n assez grand dans la définition de $\tilde{\Lambda}$ pour que $\tilde{\Lambda}$ soit "bon" (cf. lemme 6) (on rappelle que $\tilde{\Lambda} = (np_1 + 1)\Lambda$). On est alors dans le cadre de 4.2 et on peut appliquer les propositions 4 et 5. On se fixe $x \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ tel que $x\Lambda$ soit dominant par rapport à $\Delta^+(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$. Alors, il en est de même de $x\tilde{\Lambda}$.

Soit $\nu \in i\mathfrak{a}^*$ régulier par rapport aux racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{g}^d$ et tel que $\operatorname{Im} \nu \notin \mathscr{H}_{\mathrm{Im}, j, \tilde{\delta}}$. En particulier $\nu \notin \mathscr{H}_{j, \tilde{\delta}}$. On a $x(\tilde{\Lambda} - \nu) \in \mathscr{A}'$ (cf. proposition 10). Alors, comme $\tilde{\Lambda}$ est bon, on peut utiliser la conclusion du lemme 7. Ceci, joint au critère d'Oshima (7.1.2) et à sa variante (7.1.5), conduit à:

$$\forall \varphi \in (I_{\tilde{\delta}})_{(K)}, \qquad \operatorname{Supp}(\beta_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}((E(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta}, \varphi))^d)) \subset F_{x\Lambda} \qquad (7.3.1)$$

car $F_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)} = F_{\operatorname{Re} x(\tilde{\Lambda}-\nu)} = F_{x\tilde{\Lambda}} = F_{x\Lambda}$ d'après (7.1.6). Soit:

$$O := \{\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid \operatorname{Im} \nu \text{ est régulier, } \operatorname{Im} \nu \notin \mathscr{H}_{\mathrm{Im}, j, \tilde{\delta}} \cup \mathscr{H}_{\mathrm{Im}, ev, \delta} \cup \mathscr{H}_{\mathrm{Im}, j, \delta}\} \qquad (7.3.2)$$

C'est un ouvert de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et notant $O_1 = O \cap i\mathfrak{a}$ on a $O = O_1 + \mathfrak{a}$ et O_1 est un ouvert dense de $i\mathfrak{a}^*$. De plus avec les notations du lemme 13, $O = O'_x$ (cf. proposition 10 (ii)). L'application de ce lemme, rendue possible par la proposition 3 (ii), à la famille $E(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta}, \varphi)$, $\varphi \in (I_{\tilde{\delta}})_{(K)}$, montre que:

$$\forall \nu \in O, \qquad \forall \varphi \in (I_{\tilde{\delta}})_{(K)}, \qquad \operatorname{Supp} \beta_{x(\tilde{\Lambda}-\nu)}((E(P, \tilde{\delta}, \nu, \tilde{\eta}, \varphi))^d) \subset F_{x\Lambda}. \quad (7.3.3)$$

Pour $v \in F$ (que l'on regarde aussi bien comme une représentation de G que de $G^d \subset G_{\mathbb{C}}$) on notera $\tilde{v}$ (resp. $\tilde{v}^d$) la fonction sur G/H (resp. G^d/K^d) définie par:

$$\forall g \in G \text{ (resp. } G^d), \qquad \tilde{v}(g) \text{ (resp. } \tilde{v}^d(g)) = \langle \pi^*(g)\, e_H^*, v \rangle.$$

On peut appliquer la proposition 10 (iii) pour $v \in O$ en prenant pour f les "intégrales d'Eisenstein" et en remplaçant $\tilde{v}$ par $\tilde{v}^d$. Comme p_x restreint les supports (proposition 9 (iii)) en tenant compte de (7.3.3) on a:

$$\forall v \in O, \qquad \forall \varphi \in (I_{\tilde{\delta}})_{(K)},$$
$$\operatorname{Supp} \beta_{x(\Lambda - v - v_1)}(p_{-\Lambda_s + v + v_1}((E(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta}, \varphi))^d\, \tilde{v}^d)) \subset F_{x\Lambda}.$$

Mais il est aisé de voir que:

$$(E(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta}, \varphi))^d\, \tilde{v}^d = (E(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta}, \varphi)\, \tilde{v})^d.$$

Comme la correspondance de Flensted-Jensen est un morphisme de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$-modules, on a, avec les notations de la proposition 6:

$$\forall v \in O, \qquad \forall f \in p_{-\Lambda_s + v + v_1}(V(P, \tilde{\delta}, v, \tilde{\eta}) \cdot \tilde{F}),$$
$$\operatorname{Supp} \beta_{x(\Lambda - v - v_1)}(f^d) \subset F_{x\Lambda}. \tag{7.3.4}$$

Introduisons le polynôme q de la proposition 4, qui s'applique ici comme on l'a déjà remarqué, et notons $O_2 = \{v \in O \mid q(v) \neq 0\}$. On déduit de (7.3.4) et de la proposition 6:

$$\forall v \in O_2, \qquad \forall \varphi \in (I_\delta)_{(K)},$$
$$\operatorname{Supp} \beta_{x(\Lambda - v - v_1)}(E(P, \delta, v + v_1, \varphi))^d \subset F_{x\Lambda}. \tag{7.3.5}$$

D'après la définition de O et O_2 on voit que:

$$O_3 = \{v + v_1 \mid v \in O_2\} \cap i\mathfrak{a}^* = \{v \in O_1 \mid q(v - v_1) \neq 0\}.$$

Alors O_3 est dense dans $i\mathfrak{a}^*$ car O_1 est un ouvert dense de $i\mathfrak{a}^*$. D'autre part, d'après le critère d'Oshima et sa variante (7.1.5) comme $F_\lambda = F_{\operatorname{Re} \lambda}$ (cf. 7.1.6), on déduit de (7.3.5) que:

$$\forall v \in O_3, \qquad \forall \varphi (I_\delta)_{(K)}, \qquad E(P, \delta, v, \eta) \text{ est tempéré.}$$

La densité de O_3 dans $i\mathfrak{a}^*$ jointe au corollaire 2 du lemme 2 achève la démonstration du corollaire du théorème 1 et donc du théorème 1 (cf. remarque 6). ∎

8. Existence d'une petite matrice B

8.1. *Propriétés des fonctions tempérées*

On retourne aux hypothèses générales sur G et H (cf. 1.2 et 1.4).

Soit (π, V) un G-module dans un Fréchet, tel que V^∞ soit un G-module de Harish-Chandra (par exemple une représentation unitaire irréductible, ou bien un G-module de Harish-Chandra). Soit $\xi \in (V^{-\infty})^H$. On dit que ξ est H-tempéré si et seulement si pour tout $v \in V_{(K)}$ la fonction sur G/H (qui est $Z(\mathfrak{g})$-finie et K-finie) $gH \mapsto \langle \pi'(g)\, \xi, v \rangle$ est tempérée. On appelle exposant (resp. exposant asymptotique) le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ de ξ tout exposant (resp. exposant asymptotique) le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ de l'une des fonctions ci-dessus. On appelle exposant directeur (resp. exposant asymptotique directeur) le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ tout élément de $(\mathfrak{a}_\phi^*)_{\mathbb{C}}$ maximal pour $\preccurlyeq_{\mathscr{P}}$ parmi les exposants (resp. exposants asymptotiques) le long de $P_\phi(\mathscr{P})$) de ξ.

Rappelons qu'un sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de Harish-Chandra, V, de $C^\infty(G/H)$ est dit tempéré si et seulement si tout élément de ce module est une fonction tempérée sur G/H. On définit également comme ci-dessus la notion d'exposant (asymptotique) etc... de V.

Lemme 14. *Soit F fonction C^∞ sur G/H, K-finie, $\mathbb{D}(G/H)$-finie et tempérée.*
Alors:

(i) *Pour $D \in U(\mathfrak{g})$ et $k \in K$, $L_D F$ et $L_k F$ sont tempérées.*

(ii) *Le sous-$(\mathfrak{g}, K)$-module de $C^\infty(G/H)$ engendré par F est tempéré.*

Démonstration. D'après la définition de la tempérance, tout exposant directeur de F, λ, le long de $P_\phi(\mathscr{P})$, $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$, vérifie $\operatorname{Re} \lambda_{|\mathfrak{a}_\phi^+(\mathscr{P})} \leqslant 0$. D'après l'identité entre exposants asymptotiques et exposants directeurs (cf. la discussion qui suit (2.2.4)) on voit qu'il en est de même pour les exposants asymptotiques directeurs de F, donc aussi de tous les exposants asymptotiques de F.

Alors, en utilisant les propriétés de covariance des $p_\lambda(\mathscr{P}, F, \cdot, \cdot)$ (c.f. [5] théorème 12.8 (ii)) on voit qu'il en est de même pour les exposants asymptotiques de $L_D F$ et $L_k F$, donc en particulier de leurs exposants asymptotiques directeurs. Utilisant à nouveau l'identité entre exposants asymptotiques directeurs et exposants directeurs on en déduit que $L_D F$ et $L_k F$ sont tempérées. Ce qui prouve (i). Alors (ii) résulte des définitions et de (i). ∎

Lemme 15. *On suppose que G/H possède des séries discrètes. Soit F une fonction C^∞ sur G/H, K-finie et vecteur propre généralisé sous $\mathbb{D}(G/H)$ pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$.*

(i) *Si F est de carré intégrable, F est $\mathbb{D}(G/H)$-propre et Λ est réel sur $\mathfrak{a}^d$.*

(ii) *On suppose F tempérée. Si Λ est réel sur $\mathfrak{a}^d$ et régulier par rapport à $\Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$, i.e. $(\Lambda, \alpha) \neq 0$ pour $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$, alors elle est de carré intégrable.*

Démonstration. (i) D'après [3], théorème 1.5, on sait que l'action de $\mathbb{D}(G/H)$ sur la partie discrète de $L^2(G/H, d\dot{h})$ se diagonalise. Le fait que F soit $\mathbb{D}(G/H)$-propre en résulte. Le fait que Λ est réel sur $\mathfrak{a}^d$ a déjà été mentionné (cf. (5.2.6)).

Passons à (ii). Soit V le sous $(\mathfrak{g}, K)$-module de $C^\infty(G/H)$ engendré par F. D'après le lemme précédent celui-ci est tempéré. On note pour $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$, $\Sigma_{\mathscr{P}} = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ la base correspondante de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\phi)$ et $\{\beta_1, ..., \beta_l\}$ la base duale de $\Sigma_{\mathscr{P}}$ pour le produit scalaire B (i.e. $\beta_{i_{|\mathfrak{z} \cap \mathfrak{a}_\phi}} = 0$ et $(\beta_i, \alpha_j) = \delta_{ij}$). On choisit $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$ et λ_0 un exposant directeur de V le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ tels que l'ensemble formé des β_i orthogonaux à $\operatorname{Re} \lambda_0$ soit de cardinal maximal. On note $\Theta = \{\alpha_i \in \Sigma_{\mathscr{P}} \mid (\operatorname{Re} \lambda_0, \beta_i) \neq 0\}$ et $P = MAN$ le sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable contenant $P_\phi(\mathscr{P})$ associé à Θ (cf. 1.4). Il résulte de la démonstration du théorème 2 de [18] (voir aussi les corrections dans l'appendice) que:

$$\lambda_0 = \lambda_1 + \nu_0 \qquad \text{avec} \quad \nu_0 \in i\mathfrak{a}^* \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 \in (\mathfrak{a}_\phi \cap \mathfrak{m})^*_{\mathbb{C}}.$$

De plus $M/M \cap H$ possède des séries discrètes. Montrons qu'avec nos hypothèses on a nécessairement $P = G$. En effet, d'après le lemme 1 on a:

$$\exists w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d), \qquad w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} = \lambda_0.$$

On a alors: $w\Lambda = \Lambda_1 + \lambda_0$ pour un élément Λ_1 de $(\mathfrak{t}_{kq})^*_{\mathbb{C}}$. En séparant partie réelle et partie imaginaire par rapport à $(\mathfrak{a}^d)^*$ on en déduit:

$$w\Lambda = \operatorname{Re} \Lambda_1 + \operatorname{Re} \lambda_1.$$

Mais $\operatorname{Re} \Lambda_1 + \operatorname{Re} \lambda_1 \in (\mathfrak{a}^d_M)^*$. L'égalité ci-dessus jointe à la régularité de Λ montre qu'il existe un élément régulier dans $(\mathfrak{a}^d_M)^*$ (ou $(\mathfrak{a}^d_M)$) relativement à $\Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$. Par ailleurs, comme $M/M \cap H$ admet des séries discrètes, il existe $\mathfrak{t}_M \subset \mathfrak{k} \cap \mathfrak{q} \cap \mathfrak{m}$ qui est maximal abélien dans $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{m}$. Alors, par transport de structure, on en déduit l'existence d'un élément X_0 dans $i\mathfrak{t}_M$ régulier par rapport à $\Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d_1)$ où $\mathfrak{a}^d_1 = i\mathfrak{t}_M \oplus \mathfrak{a}$ (qui est conjugué, par un élément centralisant $\mathfrak{a}$ du groupe adjoint de $\mathfrak{g}^d$, à $\mathfrak{a}^d$). Mais alors le centralisateur dans $\mathfrak{g}^d$ de X_0 est égal à $\mathfrak{m}^d_1 \oplus \mathfrak{a}^d_1$, où $\mathfrak{m}^d_1$ est le centralisateur dans $\mathfrak{k}^d$ de $\mathfrak{a}^d_1$. On en déduit que $\mathfrak{t}_M$ est maximal abélien dans $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{q}$. Mais d'après l'hypothèse faite sur G/H (G/H a des séries discrètes), $\mathfrak{t}_M$ est alors maximal abélien dans $\mathfrak{q}$ (c.f. [33] § 1 théorème 1.5) et $\mathfrak{a} = 0$. Donc $P = G$.

Dans ce cas, la définition de λ_0 montre que tout exposant directeur, λ, de V le long de $P_\phi(\mathscr{Q})$, $\mathscr{Q} \in \mathscr{F}$, vérifie:

$$\operatorname{Re} \lambda_{|\mathfrak{a}_\phi^+(\mathscr{Q})} < 0.$$

Ceci montre que les éléments de V, et en particulier F, sont de carré intégrable sur G/H (cf. [2] théorème 6.4). ∎

8.2. *Une propriété asymptotique des "intégrales d'Eisenstein"*

On reprend les notations de 3.2. On suppose δ irréductible (et toujours unitaire). On note $\bar{N} = \theta(N)$, $\bar{P} = \theta(P)$. On rappelle (c.f. e.g. [41] lemme 10.1.2) qu'il existe une constante c_δ telle que, pour tout $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, vérifiant:

$$\forall \alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a}), \qquad (\operatorname{Re} \nu, \alpha) \geqslant c_\delta \tag{8.2.1}$$

on ait:

Pour tout $\varphi \in I^P_{\delta, \nu}$, et $g \in G$, l'intégrale $\int_{\bar{N}} \varphi(g\bar{n})\, d\bar{n}$ est convergente et l'application $g \mapsto \int_{\bar{N}} \varphi(g\bar{n})\, d\bar{n}$ définit un élément de $I^{\bar{P}}_{\delta, \nu}$ noté $A(\bar{P}, P, \delta, \nu)(\varphi)$. De plus $A(\bar{P}, P, \delta, \nu)$ est un opérateur d'entrelacement non nul entre $I^P_{\delta, \nu}$ et $I^{\bar{P}}_{\delta, \nu}$.

Le symbole $a \xrightarrow[P]{} +\infty$ (resp. $a \xrightarrow[\bar{P}]{} +\infty$) signifie que $a \in A$ et $a^\alpha \to +\infty$ pour tout $\alpha \in \Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$ (resp. $\Delta(\bar{\mathfrak{n}}, \mathfrak{a})$).

Le lemme suivant est une généralisation d'un théorème d'Olafsson (cf. [30], théorème 6.2). Il est dans l'esprit du lemme classique de Langlands.

Lemme 16. *Soit* $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ *vérifiant* (8.2.1) *et tel que* $\operatorname{Re}(\nu - \rho_P)$ *soit strictement* $\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})$ *dominant. Alors*:

$$\forall \varphi \in I^P_{\delta, \nu}, \qquad \forall g \in G, \qquad \forall \eta \in \mathscr{V}(\delta),$$

$$\lim_{a \xrightarrow[\bar{P}]{} +\infty} a^{\nu - \rho_P} E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi, gaH) = \langle (A(\bar{P}, P, \delta, \nu)(\varphi))(g), pr_e \eta \rangle$$

où $pr_e \eta$ *est la composante de* η *dans* $\mathscr{V}(\delta, e)$.

Démonstration. Par linéarité on peut supposer $\eta \in \mathscr{V}(\delta, w)$ pour un $w \in \mathscr{W}_M$ ce que l'on fera dans la suite. Avec nos hypothèses $j(P, \delta, \nu, \eta)$ est une fonction continue sur G à valeurs dans $V_\delta^{-\infty}$. Donc pour $g \in G$, $a \in A$ on a:

$$E(P, \delta, \nu, \varphi, gaH) = \int_{K/K \cap M} \langle \varphi(gak), (j(P, \delta, \nu, \eta))(k) \rangle\, d\dot{k}.$$

On pose $E = E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi)$ et $j = j(P, \delta, \nu, \eta)$. Alors, on a (cf. e.g. [41], lemme 2.4.5):

$$E(gaH) = \int_{\bar{N}} \langle \varphi(ga\bar{n}), j(\bar{n}) \rangle\, d\bar{n}.$$

En changeant $\bar{n}$ en $a\bar{n}a^{-1}$ et en utilisant les propriétés de covariance à droite de φ on a:

$$a^{\nu-\rho_P}E(gaH)=\int_{\bar{N}}\langle\varphi(g\bar{n}),j(a^{-1}\bar{n}a)\rangle\,d\bar{n}.$$

Si $a\xrightarrow[P]{}+\infty$, il est clair que $a^{-1}\bar{n}a$ converge vers e et l'expression sous le signe somme converge simplement vers $\langle\varphi(g\bar{n}),pr_e\eta\rangle$. Il suffit donc de vérifier que l'on peut appliquer le théorème de convergence dominée, car on a:

$$\int_{\bar{N}}\langle\varphi(g\bar{n}),pr_e\eta\rangle=\langle(A(\bar{P},P,\delta,\nu)\,\varphi)(g),pr_e\eta\rangle.$$

Passons à la majoration de $\langle\varphi(g\bar{n}),j(a^{-1}\bar{n}a)\rangle$.

Pour $x\in G$, on écrit $x=k(x)\,m(x)\,a(x)\,n(x)$ où $k(x)\in K$, $m(x)\in\exp(\mathfrak{m}\cap\mathfrak{s})$, $a(x)\in A$, $n(x)\in N$. Si $\bar{n}\in\bar{N}$ et $\log a$ est strictement $\Delta(\bar{\mathfrak{n}},\mathfrak{a})$ dominant, il résulte de [24], chapitre IV, cor. 6.6, page 439, et en utilisant une projection sur $\mathfrak{a}$, que:

$$\operatorname{Re}(\nu-\rho_P)(\log(a(a^{-1}\bar{n}a)))\leqslant\operatorname{Re}(\nu-\rho_P)(\log a(\bar{n})).\tag{8.2.2}$$

D'autre part, soit $\bar{n}\in\bar{N}\cap HwP$. Écrivons $\bar{n}=hwma'n$ où $h\in H$, $m\in M$, $a'\in A$, $n\in N$. Soit $h_w=w^{-1}hw$. Comme $w\in K$ on a:

$$\bar{n}=wk(h_w)\,m(h_w)\,a(h_w)\,n(h_w)\,ma'n$$

et:

$$\log a(\bar{n})=\log a(h_w)+\log a'.$$

Le théorème de convexité de van den Ban (cf. [1], théorème 1.1), appliqué à wHw^{-1} au lieu de H, montre, avec nos hypothèses sur ν et par projection sur $\mathfrak{a}$, que:

$$\operatorname{Re}(\nu-\rho_P)(\log a(h_w))\geqslant 0.$$

Donc:

$$\operatorname{Re}(\nu-\rho_P)(\log a')\leqslant\operatorname{Re}(\nu-\rho_P)(\log a(\bar{n})).\tag{8.2.3}$$

Soit $\bar{n}\in\bar{N}$. Si $a^{-1}\bar{n}a\notin HwP$, on a $j(a^{-1}\bar{n}a)=0$. Si $a^{-1}\bar{n}a\in HwP$, on écrit $a^{-1}\bar{n}a=h_0wm_0a_0n_0$ avec $h_0\in H$, $m_0\in M$, $a_0\in A$, $n_0\in N$, et l'on a:

$$j(a^{-1}\bar{n}a)=a_0^{\nu-\rho_P}\,\delta'(m_0^{-1})\,\eta.$$

De même on a:

$$\varphi(g\bar{n}) = \delta(m(\bar{n}))^{-1}\, a(\bar{n})^{-\nu-\rho_P}\, \varphi(gk(\bar{n})).$$

Alors on déduit successivement de (8.2.3) appliqué à $a^{-1}\bar{n}a$ et de (8.2.2) que:

$$|\langle \varphi(g\bar{n}), j(a^{-1}\bar{n}a)\rangle| \leqslant a(\bar{n})^{\mathrm{Re}-\nu-\rho_P}\, a(a^{-1}\bar{n}a)^{\mathrm{Re}\,\nu-\rho_P}$$
$$\times |\langle \delta(m(\bar{n}))^{-1}\, \varphi(gk(\bar{n})), \delta'(m_0^{-1})\,\eta\rangle|$$

et: $$|\langle \varphi(g\bar{n}), j(a^{-1}\bar{n}a\rangle| \leqslant a(\bar{n})^{-2\rho_P}\, |\langle \varphi(gk(\bar{n})), \delta'(m(\bar{n})m_0^{-1})\,\eta\rangle|. \quad (8.2.4)$$

On introduit $\mathscr{A}_0(M/M\cap w^{-1}Hw)$ l'espace des fonctions C^∞ sur $M/M\cap w^{-1}Hw$ qui sont bornées ainsi que leurs dérivées par des éléments de $U(\mathfrak{m})$. Alors, comme δ est unitaire, l'application linéaire de V_δ^∞ dans $C^\infty(M/M\cap w^{-1}Hw)$, qui à $v\in V_\delta^\infty$ associe l'application $m(M\cap w^{-1}Hw)\mapsto \langle v, \delta'(m)\,\eta\rangle$, est à valeurs dans $\mathscr{A}_0(M/M\cap w^{-1}Mw)$ et est continue de V_δ^∞ dans $\mathscr{A}_0(M/M\cap w^{-1}Mw)$ muni de la topologie de la convergence uniforme des fonctions et de leurs dérivées par les éléments de $U(\mathfrak{m})$ (cf., dans [12], la proposition 1 et la remarque dans l'introduction, ainsi que la proposition 1 du présent article). L'ensemble $\{\varphi(gk)\mid k\in K\}$ est relativement compact dans V_δ^∞, d'après la continuité de φ, donc borné. Donc l'ensemble des applications $m\mapsto\langle\varphi(gk), \delta'(m)\,\eta\rangle$, $k\in K$, est borné dans $\mathscr{A}_0(M/M\cap w^{-1}Hw)$ d'après ce qui précède. Il en résulte que:

$$C := \sup_{\bar{n}\in\bar{N},\, m\in M} |\langle\varphi(gk(\bar{n})), \delta'(m)\,\eta\rangle| < +\infty.$$

On déduit alors de (8.2.4) que pour tout a tel que $\log a$ soit strictement $\Delta(\bar{\mathfrak{n}}, \mathfrak{a})$ dominant:

$$\forall\bar{n}\in\bar{N}, \qquad |\langle\varphi(g\bar{n}), j(a^{-1}\bar{n}a)\rangle| \leqslant Ca(\bar{n})^{-2\rho_P}.$$

Mais il est bien connu que: $\int_{\bar{N}} a(\bar{n})^{-2\rho_P}\, d\bar{n} < +\infty$. Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant réunies, le lemme est démontré. ∎

Si α est une racine de $\mathfrak{a}_{\phi,M} := \mathfrak{a}_\phi\cap\mathfrak{m}$ dans $\mathfrak{m}$, on note encore α son extension à $\mathfrak{a}_\phi$ par 0 à $\mathfrak{a}$, qui est un élément de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\phi)$. On note $\Delta_{\sigma\theta,M}^+$ l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_{\phi,M}$ dans $\mathfrak{m}$ qui sont dans $\Delta_{\sigma\theta}^+$. On note $\mathscr{F}_M$ la famille des ensembles de racines positives de $\Delta(\mathfrak{m}, \mathfrak{a}_{\phi,M})$ qui contiennent $\Delta_{\sigma\theta,M}^+$. Si $\mathscr{P}_M\in\mathscr{F}_M$ on notera $\mathscr{P} = \{\alpha\in\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\phi)\mid \alpha_{|\mathfrak{a}} = 0$ et $\alpha\in\mathscr{P}_M$, ou $\alpha_{|\mathfrak{a}}\in\Delta(\mathfrak{n}, \mathfrak{a})\}$.

D'après la construction de P, on a $\mathscr{P}\in\mathscr{F}$. On notera alors $P_{\phi,M}(\mathscr{P}_M) = P_\phi(\mathscr{P})\cap M$. C'est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal de M de σ-décomposition de Langlands $P_{\phi,M}(\mathscr{P}_M) = M_\phi A_{\phi,M} N_\phi(\mathscr{P}_M)$ où $N_\phi(\mathscr{P}_M) = N_\phi(\mathscr{P})\cap M$ et $A_{\phi,M} = A_\phi\cap M = \exp(\mathfrak{a}_{\phi,M})$.

LEMME 17. *On suppose toujours δ irréductible. Soient $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$ et $\eta_0 = pr_e \eta$. Soient $\mathscr{P}_M \in \mathscr{F}_M$, $\Lambda_0 \in (\mathfrak{a}_{\phi, M})^*_{\mathbb{C}}$ un exposant (asymptotique) directeur de η_0 le long de $P_{\phi, M}(\mathscr{P}_M)$. Soit $\nu \in (\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}})$ tel que* $\operatorname{Re} \nu + \rho_P$ $(= \operatorname{Re} \nu - \rho_{\bar{P}})$ *soit strictement dominant pour $\Delta(\bar{\mathfrak{n}}, \mathfrak{a})$ et vérifie* (8.2.1) *relativement* $\bar{\mathfrak{n}}$. *Alors $j(\bar{P}, \delta, \nu, \eta)$ admet $\Lambda_0 - \nu$ comme exposant asymptotique le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ (cf. le début de* 8.1 *pour la définition d'exposant asymptotique d'un vecteur distribution H-invariant).*

Démonstration. Soit $\varphi \in (I^{\bar{P}}_{\delta, \nu})_{(K)}$ et $E = E(\bar{P}, \delta, \nu, \eta, \varphi)$ où ν est comme dans l'énoncé. On applique le lemme précédent en échangeant P et $\bar{P}$. Alors on a:

$$\forall g \in G, \qquad \lim_{a \underset{P}{\longrightarrow} +\infty} a^{\nu + \rho_P} E(gaH) = \langle (A(P, \bar{P}, \delta, \nu)(\varphi))(g), \eta_0 \rangle \tag{8.2.5}$$

On dispose des développements asymptotiques le long des murs pour E, car E est $\mathbb{D}(G/H)$-finie (car $Z(\mathfrak{g})$-finie) et K-finie. Ici on utilise une généralisation aux fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-finies (au lieu de propres) du lemme 12.3 et du théorème 12.8 de [5] (cf. [13], théorème 1). Alors il résulte de la définition des développements asymptotiques (cf. [6], § 3), de la proposition A.2.1 de [16] et de (8.2.5), que le coefficient du développement asymptotique affectant $a^{-\nu - \rho_P}$, noté $(g, X) \mapsto p_{-\nu}(P \mid f, g, X)$ (où $g \in G$, $X \in \mathfrak{a}$) est constant en X. Ici on a adopté le décalage habituel par ρ_P. De plus, pour $g \in G$, $p_{-\nu}(P \mid E, g) = \langle (A(P, \bar{P}, \delta, \nu)(\varphi))(g), \eta_0 \rangle$. En particulier, en utilisant les propriétés de covariance des éléments de $I^P_{\delta, \nu}$, on a:

$$\forall m \in M, \qquad p_{-\nu}(P \mid E, m) = \langle (A(P, \bar{P}, \delta, \nu)(\varphi))(e), \delta'(m)\, \eta_0 \rangle. \tag{8.2.6}$$

Posons $\psi := (A(P, \bar{P}, \delta, \nu)(\varphi))(e)$. En utilisant une généralisation à notre situation du théorème 3.1 de [7] (cf. [13], théorème 2) on voit alors que, si Λ_0 est un exposant asymptotique le long de $P_{\phi, M}(\mathscr{P}_M)$ de la fonction $\mathbb{D}(M/M \cap H)$-finie et $M \cap K$-finie sur $M/M \cap H$, définie par $mM \cap H \mapsto \langle \psi, \delta'(m)\, \eta_0 \rangle$, $\Lambda_0 - \nu$ est un exposant asymptotique le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ de la fonction E. Pour achever la démonstration, il suffit de vérifier que $V_1 = \{ A(P, \bar{P}, \delta, \nu)(\varphi)(e) \mid \varphi \in (I^{\bar{P}}_{\delta, \nu})_{(K)} \}$ est égal à $(V_\delta)_{(M \cap K)}$. Mais V_1 est clairement un sous $(\mathfrak{m}, M \cap K)$-module de $(V_\delta)_{(M \cap K)}$. Si on avait $V_1 \neq (V_\delta)_{(M \cap K)}$ on aurait donc $V_1 = \{0\}$, puisque δ est irréductible. Alors de la densité de $(I^{\bar{P}}_{\delta, \nu})_{(K)}$ dans $I^{\bar{P}}_{\delta, \nu}$ et de la continuité de $A(P, \bar{P}, \delta, \nu)$ sur $I^{\bar{P}}_{\delta, \nu}$ on déduirait:

$$\forall \varphi \in I^{\bar{P}}_{\delta, \nu}, \qquad (A(P, \bar{P}, \delta, \nu)\, \varphi)(e) = 0.$$

Par équivariance, on conclurait que $A(P, \bar{P}, \delta, \nu) = 0$. Or ceci n'est pas (cf. e.g. [41], lemme 10.1.2). Donc $V_1 = (V_\delta)_{(M \cap K)}$ et le lemme est démontré. ∎

8.3. *Petite matrice B*

On conserve les notations précédentes. On rappelle que pour P_1, P_2 sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G de σ-décomposition de Langlands $P_i = MAN_i$, $i = 1, 2$, il existe une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathscr{V}(\delta))$, $\nu \mapsto B(P_2, P_1, \delta, \nu)$, telle que pour tout $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$ on ait l'identité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$j(P_1, \delta, \nu, \eta) \circ A(P_1, P_2, \delta, \nu) = j(P_2, \delta, \nu, B(P_2, P_1, \delta, \nu)\,\eta),$$

où A désigne le prolongement méromorphe des intégrales d'entrelacement (cf. [14], proposition 4).

On note pour $w \in \mathscr{W}$, $\mathscr{V}(\delta, w)_{\mathrm{disc}}$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{V}(\delta, w)$ de carré intégrable pour $M \cap w^{-1}Hw$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{V}(\delta, w)$. On note $\mathscr{V}(\delta)_{\mathrm{disc}} = \prod_{w \in \mathscr{W}} \mathscr{V}(\delta, w)_{\mathrm{disc}}$.

THÉORÈME 2. *Lorsqu'il est défini, $B(P_2, P_1, \delta, \nu)$ préserve le sous-espace vectoriel $\mathscr{V}(\delta)_{\mathrm{disc}}$ de $\mathscr{V}(\delta)$.*

Nous allons préparer la démonstration de ce théorème.

LEMME 18. *Il suffit de démontrer le théorème pour $P_1 = P$, $P_2 = \bar{P}$.*

Démonstration. Grâce à [14], proposition 5, on peut se ramener au cas où P_1 et P_2 sont σ-adjacents. On utilise alors la proposition 6 de [14] pour se ramener au cas où $P_1 = P$, $P_2 = \bar{P}$ (pour un autre groupe). ∎

On supposera donc dans la suite que $P_1 = P$, $P_2 = \bar{P}$ et on notera $B(\nu)$ au lieu de $B(\bar{P}, P, \delta, \nu)$.

Soit $w \in \mathscr{W}$. On note $\mathfrak{m}_w = Adw(\mathfrak{m})$, $M_w = wMw^{-1}$, $\mathfrak{m}_w^d = (\mathfrak{m}_w)_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}^d$, $\mathfrak{l}_w = Adw(\mathfrak{l})$, etc... On identifie $U(\mathfrak{m}_w)^{\mathfrak{m}_w \cap \mathfrak{h}} / (U(\mathfrak{m}_w)(\mathfrak{m}_w \cap \mathfrak{h})) \cap (U(\mathfrak{m}_w)^{(\mathfrak{m}_w \cap \mathfrak{h})})$ à $\mathbb{D}(M_w/M_w \cap H)$ (cf. 2.1). Comme w normalise $\mathfrak{a}_\phi$ et que $\mathfrak{l}_w$ est le centralisateur dans $\mathfrak{g}$ de $\mathfrak{a}_w$, $\mathfrak{a}^d$, qui est contenu dans le centralisateur de $\mathfrak{a}_\phi$ dans $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$, est contenu dans $(\mathfrak{l}_w)_{\mathbb{C}}$.

On note $\mathfrak{a}_{M,w}^d := \mathfrak{a}^d \cap (\mathfrak{m}_w)_{\mathbb{C}}$. Alors $\mathfrak{a}^d = \mathfrak{a}_{M,w}^d \oplus \mathfrak{a}_w$. A noter que $\mathfrak{a}_{M,w}^d$ n'est pas nécessairement égal à $Adw(\mathfrak{a}_M^d)$ car, a priori, w ne normalise pas $\mathfrak{a}^d$ et donc on ne sait pas si $Adw(\mathfrak{a}_M^d)$ est contenu dans $\mathfrak{a}^d$. On dispose de l'isomorphisme d'Harish-Chandra $\gamma_{\mathfrak{a}_{M,w}^d}$ entre $\mathbb{D}(M_w/M_w \cap H)$ et $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{m}_w^d, \mathfrak{a}_{M,w}^d)}$, où $W(\mathfrak{m}_w^d, \mathfrak{a}_{M,w}^d)$ est le groupe de Weyl de $\Delta(\mathfrak{m}_w^d, \mathfrak{a}_{M,w}^d)$. Celui-ci peut être naturellement regardé comme le sous-groupe de $W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ formé des éléments qui laissent fixes les éléments de $\mathfrak{a}_w$. De même, on dispose de l'isomorphisme d'Harish-Chandra $\gamma_{\mathfrak{l}_w, \mathfrak{a}^d}$ entre $\mathbb{D}(L_w/L_w \cap H)$ et $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{m}_w^d, \mathfrak{a}_{M,w}^d)}$ et de l'homomorphisme $\omega_{\mathfrak{g}, \mathfrak{l}_w}$ (cf. 2.1).

Si $\eta \in \mathscr{V}(\delta, w)$ on a aussi $\eta \in \mathscr{V}(w\delta, e)$, et, avec les identifications ci-dessus, cela a un sens de parler de l'action de $\mathbb{D}(M_w/M_w \cap H)$ sur η ou

$\mathscr{V}(\delta, w)$ (grâce à $w\delta$ qui est une représentation de M_w). Comme $\mathscr{V}(\delta, w)$ est de dimension finie (cf. [3]), il se décompose sous l'action de $\mathbb{D}(M_w/M_w \cap H)$ en une somme directe finie de sous-espaces propres généralisés. On note $\mathscr{E}_w$ l'ensemble (fini) des valeurs propres généralisées, que l'on regarde comme des éléments de $(\mathfrak{a}^d_{M,w})^*_{\mathbb{C}}$. En fait, il s'agit de $W(\mathfrak{m}^d_w, \mathfrak{a}^d_{M,w})$-orbites dans $(\mathfrak{a}^d_{M,w})^*_{\mathbb{C}}$.

Lemme 19. *Soit $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Soit $\xi \in ((I^P_{\delta,\nu})^{-\infty})^H$ qui est $\mathbb{D}(G/H)$-propre pour la valeur propre $\lambda \in (\mathfrak{a}^d)^*_{\mathbb{C}}$. On suppose que λ est régulier par rapport à $\Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$. Alors pour tout $w \in \mathscr{W}$, $ev_w\xi$ est somme d'éléments de $\mathscr{V}(\delta, w)$ qui sont $\mathbb{D}(M_w/M_w \cap H)$-propres pour des valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathscr{E}_w$ telles que*:

$$\forall i = 1, ..., n, \qquad \exists x_i \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d), \qquad \lambda_i - w\nu = x_i\lambda.$$

Démonstration. On montre de manière analogue à la démonstration de la proposition 3 que: $\forall D \in \mathbb{D}(G/H)$, $ev_w((\pi^P_{\delta,\nu})'(D)\,\xi) = ((\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}_w}(D))(-w\nu))(ev_w\xi)$.

D'où:

$$\forall D \in \mathbb{D}(G/H),$$
$$((\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D))(\lambda))(ev_w\xi) = ((\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}_w}(D))(-w\nu))(ev_w\xi). \tag{8.3.1}$$

Donc $ev_w(\xi)$ est propre sous l'image de $\omega_{\mathfrak{g},\mathfrak{l}_w}$ dans $\mathbb{D}(L_w/L_w \cap H)$.

En transportant le problème grâce à $\gamma_{\mathfrak{a}^d}$ et $\gamma_{\mathfrak{m}_w, \mathfrak{a}^d_{M,w}}$ on dispose du $S(\mathfrak{a}^d_{M,w})^{W(\mathfrak{m}^d_w, \mathfrak{a}^d_{M,w})}$-module de dimension finie, $\mathscr{V}(\delta, w)$, qui se décompose en somme directe finie de modules primaires de type $\mathbb{C}_{\lambda_i}$, $\mathscr{V}_i$, $i = 1, ..., n$ où $\lambda_i \in \mathscr{E}_w$. On écrit $ev_w\xi = \sum_{i=1}^n \eta_i$, où $\eta_i \in \mathscr{V}_i$. On étend l'action de $S(\mathfrak{a}^d_{M,w})^{W(\mathfrak{m}^d_w, \mathfrak{a}^d_{M,w})}$ sur $\mathscr{V}(\delta, w)$ à $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{m}^d_w, \mathfrak{a}^d_{M,w})}$ en faisant agir $\mathfrak{a}_w$ par $-w\nu \in (\mathfrak{a}_w)^*_{\mathbb{C}}$. Alors, d'après (8.3.1), $\mathbb{C}_{\eta_i}$ est un $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)}$-sous-module de dimension 1 de $\mathscr{V}(\delta, w)$, isomorphe à $\mathbb{C}_\lambda$. Alors, si η_i est différent de 0, comme $\mathscr{V}_i$ est un sous-espace propre généralisé de $S(\mathfrak{a}^d)^{W(\mathfrak{m}^d_w, \mathfrak{a}^d_{M,w})}$ pour la valeur propre $\lambda_i - w\nu$, il existe $x_i \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ tel que $\lambda_i - w\nu = x_i\lambda$. Il reste à prouver que η_i est propre sous $\mathbb{D}(M_w/M_w \cap H) \simeq S(\mathfrak{a}^d_{M,w})^{W(\mathfrak{m}^d_w, \mathfrak{a}^d_{M,w})}$. Mais $\lambda_i - w\nu$ est régulier par rapport à $\Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$. De plus $W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ (resp. $W(\mathfrak{m}^d_w, \mathfrak{a}^d_{M,w})$) est un groupe engendré par des réflexions correspondant à $\alpha \in \Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$) (resp. $\alpha \in \Delta(\mathfrak{m}^d_w, \mathfrak{a}^d)$). Comme $\lambda_i - w\nu$ est régulier, on voit que le stabilisateur de $\lambda_i - w\nu$ dans $W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ est trivial. La proposition A.2 de [17] s'applique et achève de prouver le lemme. ∎

Lemme 20. *Soit η un élément de $\mathscr{V}(\delta, w)$ qui est $\mathbb{D}(M_w/M_w \cap H)$-propre pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_{M,w})^*_{\mathbb{C}}$. On suppose Λ régulier par rapport à $\Delta(\mathfrak{m}^d_w, \mathfrak{a}^d_{M,w})$. On suppose que l'application méromorphe sur*

$\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $v \mapsto pr_e B(v)\,\eta$, n'est pas identiquement nulle. Alors, il existe $x \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ tel que l'on ait $xw_{|\mathfrak{a}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}}$ (auquel cas $x\mathfrak{a}^d_{M,w} = \mathfrak{a}^d_M$) et tel que, lorsque $B(v)\,\eta$ est défini, l'on ait: $pr_e(B(v)\,\eta)$ est $\mathbb{D}(M/M \cap H)$-propre pour la valeur propre $x\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_M)^*_{\mathbb{C}}$.

A noter que x est unique modulo l'action à gauche de $W(\mathfrak{m}^d_s, \mathfrak{a}^d_M)$ sur $W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$, où $\mathfrak{m}^d_1 = \mathfrak{m}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{g}^d$.

Démonstration. On remarque que, pour des raisons d'entrelacement, $\xi_v := j(\bar{P}, \delta, v, B(v)\,\eta)$ est $\mathbb{D}(G/H)$-propre pour la valeur propre $\Lambda - wv$, car il en est ainsi de $j(P, \delta, v, \eta)$ (appliquer (3.4.1) à $P_w = wP_{w^{-1}}$ et $w\delta$).

Soit O l'ensemble des $v \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ vérifiant les conditions suivantes:

$$B(v) \text{ est défini et } pr_e(B(v)\,\eta) \neq 0 \tag{8.3.2}$$

et si $x \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$, et $(v - xwv) \in \mathscr{E}_e - x\Lambda$ alors:

$$xw_{|\mathfrak{a}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}} \tag{8.3.3}$$

$$\Lambda - wv \text{ est régulier par rapport à } \Delta(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d). \tag{8.3.4}$$

Si $x \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ et $xw_{|\mathfrak{a}} \neq \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}}$, l'ensemble des $v \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tels que $v - xwv \in \mathscr{E}_e - x\Lambda$ est une réunion finie de sous-espaces affines de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Son complémentaire est un ouvert dense de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. De même, la régularité de Λ implique que l'ensemble des v vérifiant (8.3.4) est un ouvert dense de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Donc O est un ouvert dense de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Soit $v \in O$ et $\eta_v := ev_e \xi_v$. Écrivons, grâce au lemme précédent (appliqué à $\bar{P}$), $\eta_v = \sum_{i=1}^n \eta_i$ où $\eta_i \in \mathscr{V}(\delta, e)$ est $\mathbb{D}(M/M \cap H)$-propre pour la valeur propre $\lambda_i \in \mathscr{E}_e \subset (\mathfrak{a}^d_M)^*_{\mathbb{C}}$.

Si $\eta_i \neq 0$, toujours d'après le lemme précédent, il existe $x_i \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ tel que: $\lambda_i - v = x_i(\Lambda - wv)$. C'est-à-dire: $v - x_i wv = \lambda_i - x_i\Lambda$. Comme $\lambda_i \in \mathscr{E}_e$ et $v \in O$, d'après (8.3.3) on a $x_i w_{|\mathfrak{a}} = \mathrm{Id}_{|\mathfrak{a}}$. Pour w fixé il existe au plus un seul $x_i \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ vérifiant cette propriété, modulo la multiplication à gauche par un élément de $W(\mathfrak{m}^d_1, \mathfrak{a}^d_M)$. De plus, on a $\lambda_i = x_i\Lambda$. D'où l'existence et l'unicité de x.

L'unicité de x décrite ci-dessus montre que la décomposition de η_v comporte au plus un terme. Donc η_v est propre sous $\mathbb{D}(M/M \cap H)$ pour la valeur propre $x\Lambda$. On achève la démonstration du lemme grâce à la densité de O et la méromorphie de B. ∎

LEMME 21. *Soit $\eta \in \mathscr{V}(\delta, w)_{\mathrm{disc}}$ qui est $\mathbb{D}(M_w/M_w \cap H)$-propre pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_{M,w})^*$. Alors, dès que $B(v)\,\eta$ est défini, $pr_e(B(v)\,\eta)$ $(\in (V_\delta^{-\infty})^{M \cap H})$ est $M \cap H$-tempéré (cf. le début de* 8.1 *pour la définition de cette notion).*

Démonstration. Le théorème 1 montre que $j(P, \delta, v, \eta)$ est tempéré dès qu'il est défini et que $v \in i\mathfrak{a}^*$. Par transport de structure on en déduit qu'il en est ainsi de $j(\bar{P}, \delta, \nu, B(\nu)\,\eta)$ dès que $A(P, \bar{P}, \delta, \nu)$, $j(P, \delta, \nu, \eta)$ et $B(\nu)\,\eta$ sont définis.

En interprétant les intégrales d'entrelacement comme des fonctions j pour $G \times G/Diag(G)$ (cf. [12], § 4), on déduit des propriétés de j (cf. (3.2.7), (3.2.9), (3.2.10)) l'existence de $H'_1, ..., H'_m \in \mathfrak{a}\backslash\{0\}$, $\mu'_1, ..., \mu'_m \in \mathbb{R}$ tels que, notant:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{Im},\,A} := \bigcup_{i=1}^{m} \{\nu \in \mathfrak{a}^* \mid \nu(H'_i) = \mu'_i\} \tag{8.3.5}$$

on ait:

$$\forall \nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}, \qquad (\mathrm{Im}\,\nu \notin \mathscr{H}_{\mathrm{Im},\,A}) \Rightarrow (A(P, \bar{P}, \delta, \nu) \text{ est holomorphe en } \nu). \tag{8.3.6}$$

D'après la définition de $B(\nu)$ on a:

$$\forall \nu \in \mathscr{V}(\delta, w), \qquad B(\nu)\,\eta = ev(j(P, \delta, \nu, \eta) \circ A(P, \bar{P}, \delta, \nu)).$$

En conséquence $B(\nu)$ est holomorphe en ν dès que $j(P, \delta, \nu)$ et $A(P, \bar{P}, \delta, \nu)$ le sont, grâce à [14], proposition 3. On introduit l'analogue pour $\bar{P}$ de $\mathscr{H}_{\mathrm{Im},\,j,\,\delta}$ que l'on notera $\mathscr{H}_{\mathrm{Im},\,\bar{j},\,\delta}$. Cette notation est un peu abusive car $\bar{j}$ a déjà un autre sens (cf. (3.2.9)).

Soit

$$O_{\mathrm{Im}} = \{\nu \in \mathfrak{a}^* \mid \nu \notin \mathscr{H}_{\mathrm{Im},\,A} \cup \mathscr{H}_{\mathrm{Im},\,j,\,\delta} \cup \mathscr{H}_{\mathrm{Im},\,\bar{j},\,\delta}\} \tag{8.3.7}$$

et

$$O = \{\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \mid \mathrm{Im}\,\nu \in O_{\mathrm{Im}}\}. \tag{8.3.8}$$

Clairement, O est dense dans $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ et toute composante connexe de O rencontre $i\mathfrak{a}^*$. Supposons le lemme faux. Comme l'ensemble $\mathscr{V}(\delta, e)_{\mathrm{temp}} := \{\xi \in \mathscr{V}(\delta, e) \mid \xi$ est $M \cap H$-tempérée$\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{V}(\delta, w)$ et que B est un méromorphe, l'ensemble O_1 des $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ tel que $B(\nu)\,\eta$ soit défini et non tempéré est un ouvert non vide et dense de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Comme Λ est régulier et que $pr_e(B(\nu)\,\eta)$ est supposé non identiquement nul, il existe, grâce au lemme précédent, $x \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ tel que $xw_{|\mathfrak{a}} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}}$ et $(B(\nu)\,\eta)$ est $\mathbb{D}(M/M \cap H)$-propre pour la valeur propre $x\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_M)^*$. On pose $\Lambda_w := x\Lambda$. On note $A(\nu)$ le transporté sur I_δ de $A(P, \bar{P}, \delta, \nu)$ par les isomorphismes naturels entre $I^P_{\delta,\,\nu}$, $I^{\bar{P}}_{\delta,\,\nu}$ et I_δ.

Soit $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}$. La famille $\nu \mapsto E(P, \delta, \nu, \eta, A(\nu)\,\varphi)$, $\nu \in O$, est un élément de $\mathscr{A}_*(G/H, \Lambda_w, O)$ d'après la proposition 3(ii) et l'holomorphie sur O des intégrales d'entrelacements. Il en va donc de même de $E_\nu(\varphi) := E(\bar{P}, \delta, \nu, B(\nu)\,\eta, \varphi)$ puisque l'on a:

$$\forall \nu \in O, \qquad E(\bar{P}, \delta, \nu, B(\nu)\,\eta, \varphi) = E(P, \delta, \nu, \eta, A(\nu)\varphi). \tag{8.3.9}$$

Soit $\mathscr{E}'$ l'ensemble des exposants directeurs le long des différents sous-groupes paraboliques de M, $P_{\phi, M}(\mathscr{P}_M)$, $\mathscr{P}_M \in \mathscr{F}_M$, des éléments de $\mathscr{V}(\delta, e) = (V_\delta^{-\infty})^{M \cap H}$. $\mathscr{E}'$ est un sous-ensemble de $(\mathfrak{a}^*_{\phi, M})_{\mathbb{C}}$ où $\mathfrak{a}_{\phi, M} := \mathfrak{a}_\phi \cap \mathfrak{m}$. Comme δ est irréductible, les éléments de $\mathscr{V}(\delta, e)$ se transforment tous sous $Z(\mathfrak{m})$ par un même caractère de $Z(\mathfrak{m})$. Alors il résulte de [2], théorème 2.4, que $\mathscr{E}'$ est un ensemble fini. On note l'opérateur de restriction à $\mathfrak{a}_\phi$ des formes linéaires sur $\mathfrak{a}^d$, $res_{\mathfrak{a}_\phi}$. Soit $O_{2, \mathrm{Im}}$ l'ensemble des $v \in O_{\mathrm{Im}} \setminus \{0\}$ tels que, pour tout $y \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$, vérifiant $res_{\mathfrak{a}_\phi} \circ y_{|\mathfrak{a}^*} \neq \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}^*}$, on ait $v - yv_{|\mathfrak{a}_\phi} \notin \{\mathrm{Im}\, \lambda \mid \lambda \in \mathscr{E}'\}$, où la partie imaginaire est relative à $\mathfrak{a}^*_\phi$. On note $O_2 = \{v \in O \mid \mathrm{Im}\, v \in O_{2, \mathrm{Im}}\}$. Clairement $O_2 \subset O$ et O_2 est un ouvert dense de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ dont toute composante connexe rencontre $i\mathfrak{a}^*$. Soient $\Lambda_0 \in \mathscr{E}'$, $\mathscr{P}_M \in \mathscr{F}_M$. On note $\mathscr{P}$ l'élément de $\mathscr{F}$ associé naturellement à $\mathscr{P}_M$ (voir ce qui précède le lemme 17). On va voir que, pour tout $g \in G$ et $X \in \mathfrak{a}_\phi$, l'application $v \mapsto p_{\Lambda_0 - v}(\mathscr{P}, E_v(\varphi), g, X)$ est holomorphe sur O_2.

Soit $v_0 \in O_2$. On pose $\lambda_0 = \Lambda_0 - v_0$. Il suffit de voir, d'après le lemme 2(ii), que $\Xi(v, \lambda_0) = \{\Lambda_0 - v\}$ pour $v \in O_2$. D'abord $v_0 \neq 0$ implique $\lambda_0 \neq 0$. Alors tout élément λ de $\Xi(v, \lambda_0)$ s'écrit sous la forme $\lambda = y(\Lambda_w - v_0)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu$ où $y \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ et $\mu \in \mathscr{L}^-(\mathscr{P})$ sont tels que: $y(\Lambda_w - v_0)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu = \Lambda_0 - v_0$.

En prenant la partie imaginaire relativement à $\mathfrak{a}^*_\phi$ de cette égalité, en tenant compte du fait que Λ, donc Λ_w, est réel sur $\mathfrak{a}^d$ et que μ est réel sur $\mathfrak{a}_\phi$ on a: $\mathrm{Im}(v_0 - yv_0)_{|\mathfrak{a}\phi} = \mathrm{Im}\, \Lambda_0$. Comme $v_0 \in O_2$ et $\Lambda_0 \in \mathscr{E}'$, on a alors $res_{\mathfrak{a}_\phi} \circ y_{|\mathfrak{a}^*} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}^*}$. Donc $y\Lambda_{w|\mathfrak{a}_\phi} + \mu = \Lambda_0$ et $y(\Lambda_w - v)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu = \Lambda_0 - v$. Donc $\lambda = \Lambda_0 - v$ et $\Xi(v, \lambda_0) = \{\Lambda_0 - v\}$ comme désiré. D'où l'holomorphie cherchée.

Soit v_0 un élément de $O_1 \cap O_2$ tel que $\mathrm{Re}\, v_0 + \rho_P$ soit strictement dominant pour $\Delta(\bar{\mathfrak{n}}, \mathfrak{a})$. Un tel élément existe car $O_1 \cap O_2$ est un ouvert dense de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$. Comme $pr_e(B(v_0)\,\eta)$ n'est pas tempéré, il existe $\mathscr{P}_M \in \mathscr{F}_M$ et Λ_0 un exposant directeur de $pr_e(B(v_0)\,\eta)$ le long de $P_\phi(\mathscr{P}_M)$ tel que:

$$\mathrm{Re}\, \Lambda_{0|\mathfrak{a}^+_{\phi, M}(\mathscr{P}_M)} \nleq 0.$$

Mais pour tout élément X de $\mathfrak{a}^+_{\phi, M}(\mathscr{P}_M)$, il existe $Y \in \mathfrak{a}$ tel que $X + Y$ soit élément de $\mathfrak{a}^+_\phi(\mathscr{P})$. Donc $\mathrm{Re}\, \Lambda_0$, regardé comme un élément de $\mathfrak{a}^*_\phi$ nul sur $\mathfrak{a}$ vérifie:

$$\mathrm{Re}\, \Lambda_{0|\mathfrak{a}^+_\phi(\mathscr{P})} \nleq 0. \tag{8.3.10}$$

Par ailleurs, d'après le lemme 17, $\Lambda_0 - v_0$ est un exposant asymptotique de $j(\bar{P}, \delta, B(v)\,\eta)$ le long de $P_\phi(\mathscr{P})$. Donc il existe $\varphi_0 \in (I_\delta)_{(K)}$, $X_0 \in \mathfrak{a}_\phi$ et $g_0 \in G$ tels que $p_{\Lambda_0 - v_0}(\mathscr{P}, E_{v_0}(\varphi), g_0, X_0)$ soit non nul. Comme $\Lambda_0 \in \mathscr{E}'$, l'application, définie sur O_2, $v \mapsto p_{\Lambda_0 - v}(\mathscr{P}, E_{v_0}(\varphi_0), g_0, X_0)$ est holomorphe d'après ce que l'on a vue plus haut.

Toute composante connexe de O_2 rencontrant $i\mathfrak{a}^*$ on en déduit qu'il existe $v_1 \in i\mathfrak{a}^* \cap O_2$ tel que $\Lambda_0 - v_1$ soit un exposant le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ de

$E(P, \delta, \nu_1, \eta, \psi)$, où $\psi_1 = A(\nu_1)\varphi_0 \in (I_\delta)_{(K)}$. Mais d'après la définition de j (cf. [14], (2.4.5)) et le théorème 1, appliqué à wPw^{-1} au lieu de P, $E(P, \delta, \nu_1, \eta, \psi_1)$ est une fonction tempérée. Comme $\mathrm{Re}(\Lambda_0 - \nu_1) = \mathrm{Re}\,\Lambda_0$ ceci contredit (8.3.10). Donc O_1 est vide et le lemme en résulte. ∎

Démonstration du théorème 2. Soit $w \in \mathscr{W}$ et montrons que pour tout $\eta \in \mathscr{V}(\delta, w)_{\mathrm{disc}}$ on a $pr_e(B(\nu)\eta) \in \mathscr{V}(\delta, e)_{\mathrm{disc}}$ lorsque $B(\nu)\eta$ est défini.

Comme toute série discrète pour $M_w/M_w \cap H$ est contenue dans une somme finie de $V_{M_w, \Lambda}$, $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_{M,w})^*$, on voit que tout élément de $\mathscr{V}(\delta, w)_{\mathrm{disc}}$ est somme finie d'éléments de $\mathscr{V}(\delta, w)_{\mathrm{disc}}$ qui sont $\mathbb{D}(M_w/M_w \cap H)$-propres. Alors par linéarité, on peut se ramener au cas où η est $\mathbb{D}(M_w/M_w \cap H)$-propre pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_{M,w})^*$, ce que l'on fera dans la suite. Le lemme précédent montre que $pr_e(B(\nu)\eta) \in \mathscr{V}(\delta, e)_{\mathrm{temp}}$. Montrons que Λ est réel sur $\mathfrak{a}^d_{M,w}$. D'abord avec les notations de (5.1), comme $V_{M_w, \Lambda} \neq \{0\}$, Λ est réel sur $i\mathfrak{z}(\mathfrak{m}_w) \cap \mathfrak{a}^d_{M,w}$. De plus, $V_{M_w, \Lambda} \neq \{0\}$ implique $V_{M^0_w, \Lambda} \neq \{0\}$ puis $V_{M^1_w, \Lambda_1} \neq \{0\}$ où $\Lambda_1 = \Lambda_{|\mathfrak{a}^d_{M,w} \cap \mathfrak{m}^1_w}$. Alors Λ_1 est réel sur $\mathfrak{a}^d_{M,w} \cap \mathfrak{m}^1_w$, d'après (5.2.6) appliqué à $M^1_w/M^1_w \cap H$. Donc Λ est réel sur $\mathfrak{a}^d_{M,w}$. Toujours grâce à (5.2.6) appliqué à Λ_1, on voit que Λ possède la propriété de régularité requise pour appliquer le lemme 20. On en déduit que $pr_e(B(\nu)\eta)$, s'il est non nul, est $\mathbb{D}(M/M \cap H)$-propre pour la valeur propre $x\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_M)^*$ où x est comme dans le lemme 10. De plus $x\Lambda$ est régulier pour $\Delta(\mathfrak{m}^d_1, \mathfrak{a}^d_M)$, par transport de structure à l'aide de x. Mais d'après le lemme précédent $pr_e(B(\nu)\eta)$ est tempéré. Le lemme 14 permet alors de conclure que $pr_e(B(\nu)\eta) \in \mathscr{V}(\delta, e)_{\mathrm{disc}}$. Par linéarité, on a donc démontré $pr_e(B(\nu)\mathscr{V}(\delta)_{\mathrm{disc}}) \subset \mathscr{V}(\delta, e)_{\mathrm{disc}}$. En changeant de sous-groupe parabolique et en tenant compte de la définition de j (cf. [14], (2.4.5)), on voit également que:

$$\forall w \in \mathscr{W}, \qquad pr_w(B(\nu)\mathscr{V}(\delta)_{\mathrm{disc}}) \subset \mathscr{V}(\delta, w)_{\mathrm{disc}}.$$

D'où le théorème. ∎

9. Majorations uniformes des "intégrales d'Eisenstein"

9.1. *Familles de fonctions uniformément modérées, uniformément tempérées*

On reprend les notations du § 2.3. On définit pour $x \in G/H$, $\tau(x) := \|X\|$ si $x = k(\exp X)H$ avec $k \in K$, $X \in \mathfrak{a}_\phi$. Si $x \in G/H$ et $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, on note: $|(\nu, x)| := (1 + \|\nu\|)(1 + \tau(x))$. Si $\varepsilon > 0$, on note $\mathfrak{a}^*_\varepsilon = \{\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \mid \|\mathrm{Re}\,\nu\| < \varepsilon\}$. Soient $\Lambda \in (\mathfrak{a}^d_M)^*$, $r \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On note $\mathscr{A}_{um}(G/H, \Lambda, \varepsilon, r)$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}(G/H, \Lambda, \mathfrak{a}^*_\varepsilon)$ formé des éléments F tels que:

$$\forall D \in U(\mathfrak{g}), \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \qquad \forall x \in G/H, \qquad \forall \nu \in \mathfrak{a}^*_\varepsilon,$$
$$|L_D F_\nu(x)| \leqslant C(1 + \|\nu\|)^n e^{r\tau(x)}. \tag{9.1.1}$$

Un élément de $\mathscr{A}_{um}(G/H, \Lambda, \varepsilon, r)$ est dit uniformément modéré de croissance exponentielle r. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $R \in \mathbb{R}$ tel que $-R$ soit assez grand, $\mathfrak{a}^*(R)$ (cf. définition au § 3.3) contient $\mathfrak{a}_\varepsilon^*$. On fixe un tel R. On se fixe $\eta \in \mathscr{V}(\delta, e)$ tel que η soit $\mathbb{D}(M/M \cap H)$-propre pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_\mathbb{C}^*$. Alors il résulte de la proposition 3 (i) et de la proposition 2 que:

$$\exists r_\delta > 0, \qquad \forall \varphi \in I_\delta, \qquad \nu \mapsto b_R(\nu)\, E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi) \text{ définit un élément de } \mathscr{A}_{um}(G/H, \Lambda, \varepsilon, r_\delta). \tag{9.1.2}$$

De plus, r_δ ne dépend pas de Λ et η.

Lemme 22. *Soient $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ avec $\varepsilon' < \varepsilon$. On note $\rho = \varepsilon - \varepsilon'$. Soit b un polynôme non nul sur $\mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$. Il existe des constantes $C_\rho > 0$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ telles que pour toute fonction holomorphe f sur $\mathfrak{a}_\varepsilon^*$, tout $m > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ vérifiant:*

$$\forall \nu \in \mathfrak{a}_\varepsilon^*, \qquad |b(\nu) f(\nu)| \leqslant m(1 + \|\nu\|)^n$$

on ait:

$$\forall \nu \in \mathfrak{a}_{\varepsilon'}^*, \qquad |f(\nu)| \leqslant \alpha C_\rho \rho^{-\beta} m(1 + \|\nu\| + \rho)^n.$$

Démonstration. Si $\nu_0 \in \mathfrak{a}_{\varepsilon'}^*$ la boule ouverte de centre ν_0 et de rayon ρ est contenue dans $\mathfrak{a}_{\varepsilon'}^*$. Par application du théorème 1.4 page 8 de [19], en tenant compte de l'inégalité évidente $(1 + \|\nu\|)^n \leqslant (1 + \|\nu_0\| + \rho)^n$ si $\|\nu - \nu_0\| < \rho$, on obtient le résultat voulu. ∎

Corollaire du lemme 22. *On fixe r_δ comme dans* (9.1.2). *Soit $\eta \in \mathscr{V}(\delta, e)$ qui est $\mathbb{D}(M/M \cap H)$-propre pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_\mathbb{C}^*$. Soient $\varphi \in I_\delta$, $\varepsilon > 0$ et γ une fonction holomorphe sur $\mathfrak{a}_\varepsilon^*$ satisfaisant:*

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \exists C > 0, \qquad \forall \nu \in \mathfrak{a}_\varepsilon^*, \qquad |\gamma(\nu)| \leqslant C(1 + \|\nu\|)^n \tag{9.1.3}$$

et

$$\text{Pour tout } x \in G/H, \text{ la fonction sur } \mathfrak{a}_\varepsilon^*, \quad \nu \mapsto \gamma(\nu)\, E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi, x) \text{ est holomorphe} \tag{9.1.4}$$

Alors: pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$, l'application $\nu \mapsto \gamma(\nu)\, E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi) = F_\nu$ est un élément de $\mathscr{A}_{um}(G/H, \Lambda, \varepsilon', r_\delta)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme précédent avec $f(\nu) = \gamma(\nu)\, E(P, \delta, \nu, \eta, \varphi, x)$, $x \in G/H$, et $b = b_R$ pour R assez grand, tout en remarquant que les constantes C_ρ, α, β ne dépendent pas de f (donc de x). On déduit les majorations voulues de (9.1.2), (9.1.3). Il suffit alors d'appliquer la remarque 4. ∎

On introduit, comme dans [5], § 18, la fonction Θ sur G/H définie par:

$$\forall g \in G, \qquad \Theta(gH) = \sqrt{\Xi(g\sigma(g)^{-1})}$$

où Ξ est la fonction d'Harish-Chandra.

Soient $\varepsilon > 0$ et $s \in \mathbb{R}$. On note $\mathcal{T}(G/H, \Lambda, \varepsilon, s)$ le sous-espace de $\mathcal{A}_*(G/H, \Lambda, \mathfrak{a}_\varepsilon^*)$ formé des éléments F tels que:

$$\forall D \in U(\mathfrak{g}), \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \qquad \exists C > 0, \qquad \forall x \in G/H, \qquad \forall \nu \in \mathfrak{a}_\varepsilon^*,$$

$$|L_D F_\nu(x)| \leqslant C\,|(\nu, x)|^n\, \Theta(x)\, e^{s\,\|\mathrm{Re}\,\nu\|\,\tau(x)}. \tag{9.1.5}$$

Un élément de $\mathcal{T}(G/H, \Lambda, \varepsilon, s)$ sera dit uniformément tempéré d'échelle s. Noter toutefois que (9.1.5) n'implique pas que F_ν est tempéré (sauf si $\nu \in i\mathfrak{a}^*$).

Théorème 3. *Soient $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}}^*$ et $r_0 > 0$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $s_0 \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $F \in \mathcal{A}_{um}(G/H, \Lambda, \varepsilon, r_0)$ on ait: $F \in \mathcal{T}(G/H, \Lambda, \varepsilon, s_0)$, dès que F_ν est tempérée pour tout $\nu \in i\mathfrak{a}^*$.*

Etablissons d'abord un lemme.

Lemme 23. *Soient $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)_{\mathbb{C}}^*$. Il existe ε_1 tel que pour tout $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \varepsilon_1$, tout $r > 0$, tout $F \in \mathcal{A}_{um}(G/H, \Lambda, \varepsilon, r)$ tel que F_ν soit tempérée pour $\nu \in i\mathfrak{a}^*$, tout $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$ et tout $\nu \in \mathfrak{a}_\varepsilon^*$, on ait:*

Tout exposant asymptotique directeur de F_ν le long de $P_\phi(\mathscr{P})$ est de la forme $w(\Lambda - \nu)_{|\mathfrak{a}_\phi}$, où w est un élément de $W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ tel que $\mathrm{Re}\, w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi^+(\mathscr{P})} \leqslant 0$.

Démonstration. Soit $\mathscr{L}$ le réseau des racines de $\Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_\phi)$. On définit:

$$\varepsilon_1 = 1/2\ \mathrm{Inf}\{\, \|\mathrm{Re}(x\Lambda - x'\Lambda)_{|\mathfrak{a}\phi} + \mu\|, \mid x, x' \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d), \mu \in \mathscr{L}$$
$$\text{et} \qquad \mathrm{Re}(x\Lambda - x'\Lambda)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu \neq 0\}.$$

Comme le réseau des racines est un ensemble discret, on a $\varepsilon_1 > 0$. On va voir que ε_1 répond à la question. On se donne alors ε, r et F comme dans l'énoncé. On choisit $\mathscr{P} \in \mathscr{F}$. On va commencer par étudier les exposants asymptotiques de F_ν le long de $P_\phi(\mathscr{P})$, pour ν dans un sous-ensemble dense. Pour $w_0 \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$, on note O_{w_0} l'ensemble des éléments ν de $\mathfrak{a}_\varepsilon^*$ tels que:

$$\forall w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d),\ res_{\mathfrak{a}_\phi} \circ w_{|\mathfrak{a}^*} \neq res_{\mathfrak{a}_\phi} \circ w_{0|\mathfrak{a}^*}$$
$$\Rightarrow (\mathrm{Im}\, w_0\nu - \mathrm{Im}\, w\nu)_{|\mathfrak{a}_\phi} \neq \mathrm{Im}(w_0\Lambda - w\Lambda)_{|\mathfrak{a}_\phi} \tag{9.1.6}$$

où Im est la partie imaginaire par rapport à $(\mathfrak{a}^d)^*$ et $res_{\mathfrak{a}_\phi}$ est la restriction des formes linéaires sur $\mathfrak{a}^d$ à $\mathfrak{a}_\phi$. On définit:

$$O'_{w_0} := O_{w_0} \qquad \text{si} \quad res_{\mathfrak{a}_\phi} \circ w_{0|\mathfrak{a}^*} = 0 \tag{9.1.7}$$

et

$$O'_{w_0} = \{ \nu \in O_{w_0} \mid \operatorname{Im} w_0(\Lambda - \nu)_{|\mathfrak{a}_\phi} \neq 0 \} \qquad \text{si} \quad res_{\mathfrak{a}_\phi} \circ w_{0|\mathfrak{a}^*} \neq 0. \tag{9.1.8}$$

Il est clair que O'_{w_0} est un ouvert dense de $\mathfrak{a}^*_\varepsilon$ dont toute composante connexe rencontre $i\mathfrak{a}^*$.

Montrons que pour $x \in G/H$, $X \in \mathfrak{a}_\phi$, $\nu \mapsto p_{w_0(\Lambda-\nu)}(\mathscr{P}, F_\nu, x, X)$ est holomorphe sur O'_{w_0}.

Soit $\nu_0 \in O'_{w_0}$. On pose $\lambda_0 = w_0(\Lambda - \nu_0)_{|\mathfrak{a}_\phi}$. Alors , avec les notations du lemme 2, il suffit de voir, que pour $\nu \in O'_{w_0}$, $\Xi(\nu, \lambda_0)$ est réduit à $\{w_0(\Lambda - \nu)_{|\mathfrak{a}_\phi}\}$.

Soit $\lambda \in \Xi(\nu, \lambda_0)$, avec $\lambda \notin \{0\} \cap \{\lambda_0\}$. Alors il existe $w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ et $\mu \in \mathscr{L}^-(\mathscr{P})$ tels que $\lambda = w(\Lambda - \nu)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu$ et $\lambda_0 = w(\Lambda - \nu_0)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu$.

On a donc: $w_0(\Lambda - \nu_0)_{|\mathfrak{a}_\phi} = w(\Lambda - \nu_0)_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu$.

En prenant la partie imaginaire et utilisant $\nu_0 \in O'_{w_0}$, il résulte de la définition que: $res_{\mathfrak{a}_\phi} \circ w_{|\mathfrak{a}^*} = res_{\mathfrak{a}_\phi} \circ w_{0|\mathfrak{a}^*}$. D'où il suit que: $w_0 \Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} = w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu$ puis: $\lambda = w_0(\Lambda - \nu)_{|\mathfrak{a}_\phi}$. Il reste à traiter le cas $\lambda \in \{0\} \cap \{\lambda_0\}$. Cela ne peut se produire que dans le cas (9.1.7).

Mais alors $res_{\mathfrak{a}_\phi} \circ w_{0|\mathfrak{a}^*} = 0$ et $w_0 \Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} = 0$. Donc $res_{\mathfrak{a}_\phi} w_0(\Lambda - \nu) = 0$ et l'on a bien aussi $\lambda = res_{\mathfrak{a}_\phi} w_0(\Lambda - \nu) = 0$ comme désiré. Il en résulte l'holomorphie cherchée.

Finalement, soit $O = \bigcap_{w \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)} O'_w$, qui est aussi un ouvert dense de $\mathfrak{a}^*_\varepsilon$ dont toute composante connexe rencontre $i\mathfrak{a}^*$.

Soit $\nu_0 \in O$ et soit λ_0 un exposant asymptotique directeur de F_{ν_0} le long de $P_\phi(\mathscr{P})$. Alors il existe $w_0 \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ tel que $\lambda_0 = w_0(\Lambda - \nu_0)$ (cf. lemme 1). Grâce à l'holomorphie pour $x \in G/H$, $X \in \mathfrak{a}_\phi$ de $\nu \mapsto p_{w_0(\Lambda-\nu)}$ $(\mathscr{P}, F_\nu, x, X)$ sur O (voir ce qui précède) et aux propriétés de O, il existe $\nu_1 \in i\mathfrak{a}^*$ tel que $w_0(\Lambda - \nu_1)$ soit un exposant de F_{ν_1} le long de $P_\phi(\mathscr{P})$. Utilisant la tempérance de F_{ν_1}, on en déduit le résultat cherché:

$$\operatorname{Re} w_0 \Lambda_{|\mathfrak{a}^+_\phi(\mathscr{P})} \leqslant 0.$$

Maintenant, soit $\nu \in \mathfrak{a}^*_\varepsilon$ et (ν_n) suite dans O convergeant vers ν. Soit λ un exposant asymptotique directeur de F_ν le long de $P_\phi(\mathscr{P})$. Alors d'après le corollaire 1 du lemme 2, il existe une suite (λ_n) de $(\mathfrak{a}^*_\phi)_\mathbb{C}$ qui converge vers λ et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, λ_n est un exposant asymptotique de F_{ν_n} le long de $P_\phi(\mathscr{P})$.

D'après ce que l'on vient de voir, on a: $\lambda_n = w_n(\Lambda - \nu_n) + \mu_n$, où $\mu_n \in \mathscr{L}^-(\mathscr{P})$ et $w_n \in W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ vérifie $\operatorname{Re} w_n \Lambda_{|\mathfrak{a}^+_\phi(\mathscr{P})} \leqslant 0$.

Par extraction d'une sous-suite on peut supposer que (w_n) est constante et égale à w. D'autre part, (ν_n) étant bornée, $(w(\Lambda-\nu_n)_{|\mathfrak{a}_\phi})$ est bornée. Alors par différence avec (λ_n) qui est bornée, on voit que (μ_n) est bornée. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (μ_n) est convergente, puis constante ($\mathscr{L}^-(\mathscr{P})$ est discret). Alors $\lambda_n = w(\Lambda-\nu_n)_{|\mathfrak{a}_\phi}+\mu$. D'où $\lambda = w(\Lambda-\nu)_{|\mathfrak{a}_\phi}+\mu$. Par ailleurs, $\lambda = w'(\Lambda-\nu)_{|\mathfrak{a}_\phi}$ pour un élément w' de $W(\mathfrak{g}^d, \mathfrak{a}^d)$ (cf. lemme 1). D'où par différence et en prenant la partie réelle:

$$\operatorname{Re}(w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} - w'\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi}) + \mu = \operatorname{Re}(w'\nu - w\nu_{|\mathfrak{a}_\phi}).$$

Comme $\nu \in \mathfrak{a}_\varepsilon^*$, le deuxième membre est de norme plus petite que 2ε. D'après la définition de ε_1, on a alors:

$$\operatorname{Re} w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi} + \mu = \operatorname{Re} w'\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi}.$$

Comme $\operatorname{Re} w\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi(\mathscr{P})} \leqslant 0$ et $\mu \in \mathscr{L}^-(\mathscr{P})$ on a aussi:

$$\operatorname{Re} w'\Lambda_{|\mathfrak{a}_\phi^+(\mathscr{P})} \leqslant 0.$$

D'où le lemme. ∎

Démonstration du théorème 3. La démonstration est la même que celle du théorème 18.3 de [5], où l'on remplace $\mathfrak{a}_q^*(\varepsilon)$, par $\mathfrak{a}_\varepsilon^*$ lorsqu'il s'agit de la définition de F. Le seul changement est l'utilisation du lemme 23 pour limiter les exposants asymptotiques de F_ν dans la démonstration de l'analogue de la proposition 18.4 de [5]. ∎

THÉORÈME 4. *Avec les notations du § 3.2, soit* $\eta \in \mathscr{V}(\delta, e)_{\mathrm{disc}}$ *qui est* $\mathbb{D}(M/M\cap H)$*-propre pour la valeur propre* $\Lambda \in (\mathfrak{a}_M^d)^*$. *Il existe* $\varepsilon_0 > 0$, $s_0 > 0$ *tels que pour tout* $\varepsilon > 0$ *avec* $\varepsilon < \varepsilon_0$ *tout* $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}$ *et toute fonction holomorphe* γ *sur* $\mathfrak{a}_\varepsilon^*$ *satisfaisant* (9.1.3) *et* (9.1.4), *on ait pour* $\varepsilon' < \varepsilon$, $\nu \mapsto F_\nu := \gamma(\nu)\, E(P, \delta, \nu, \eta)$ *élément de* $\mathscr{T}(G/H, \Lambda, \varepsilon', s_0)$. *En particulier*:

$$\forall D \in U(\mathfrak{g}), \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \qquad \exists C_D > 0, \qquad \forall x \in G/H, \qquad \forall \nu \in \mathfrak{a}_{\varepsilon'}^*,$$

$$|\gamma(\nu)\, L_D F_\nu(x)| \leqslant C_D\, |(\nu, x)|^n\, \Theta(x)\, e^{s_0 \|\operatorname{Re} \nu\|\, \tau(x)}.$$

Démonstration. On va appliquer le théorème 3 avec $r_0 = r_\delta$ (cf. (9.1.2)) et l'on choisit ε_0 comme dans celui-ci. Soit F_ν comme dans l'énoncé. Cette famille a les propriétés voulues pour utiliser les conclusions du théorème 3, ceci d'après le lemme 21 d'une part et d'autre part le corollaire 1 du théorème 1 joint au corollaire 2 du lemme 2. ∎

Appendice

Il s'agit de corriger les erreurs ou incorrections qui émaillent [18], cette référence étant utilisée dans le corps de l'article. Sauf exception dûment mentionnée les références de paragraphes ou pages renvoient à [18]. Les notations sont celles de [18].

Précisons d'abord une définition:

Dans 1.2 (ii) et dans la suite de l'article, on dit qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel (réel ou complexe) est stable par dilatation, s'il est stable par les homothéties de centre d'origine et de rapport réel supérieur ou égal à 1.

La convergence des développements asymptotiques le long des murs est énoncée de manière incorrecte en 2.2 (i) page 115. A la place il faut lire:

2.2 (i). Les fonctions $Q_{\mu, \mathscr{P}, \Theta}$ sont polynomiales sur $\mathfrak{a}_\Theta$ pour k et a fixés, et analytiques en $a \in A^\Theta$ pour k et X fixés. Le degré des polynômes en X, $X \mapsto Q_{\mu, \mathscr{P}, \Theta}(k, a, X)$ est borné indépendamment de $k \in K$ et $a \in A^\Theta$. En outre pour $R > 0$, il existe $C = C_{R, \mathscr{P}, \Theta, F}$ tel que, notant $\mathfrak{a}_\Theta^-(\mathscr{P}, C)$ l'ensemble

$$\{X \in \mathfrak{a}_\Theta \mid \forall \alpha \in \mathscr{P}, \alpha_{|\mathfrak{a}_\Theta} \neq 0 \Rightarrow \alpha(X) < -C\},$$

on ait:

$$\begin{aligned} &\forall X \in \mathfrak{a}_\Theta^-(\mathscr{P}, C), \qquad \forall a \in A^\Theta, \qquad \|\log a\| \leqslant R \\ &\qquad \Rightarrow F(ka \exp X) = \sum_\mu Q_{\mu, \mathscr{P}, \Theta}(k, a, X, F)\, e^{(\mu + \rho_{P, \Theta})(X)}. \end{aligned} \tag{A.1}$$

Le reste de 2.2 (i) est inchangé. Pour démontrer ce point, il faut utiliser la preuve de [2], théorème 5.2, qui est analogue à celle du théorème 6.2 de [16]. Dans la preuve de ce dernier, on doit inverser l'ordre du choix de δ et ε.

Remarquons que l'on pourrait avantageusement utiliser la technique développée par A. Knapp dans [26], proposition 8.44 et théorème 8.45, convenablement généralisée à notre cas. On pourrait alors remplacer $a \in A^\Theta$ par $m \in M_\Theta$ et la norme de a par celle de mH dans (A.1). Ici, avec les notations du corps de l'article (cf. (1.2.3)) $\|mH\| = \|m\sigma(m^{-1})\|^{1/2}$. Une utilisation judicieuse de ce développement permet vraisemblablement d'éviter l'utilisation de l'appendice avec E. P. van den Ban dans la suite de l'article. La modification de 2.2 (i) conduit à une modification de 2.2 (iii):

On doit remplacer les lignes 2 et 3 de la page 116 par:

Soit $(\mathfrak{a}^\Theta)^-(\mathscr{P}'_1) = \{X \in \mathfrak{a}^\Theta \mid \forall \alpha \in \mathscr{P}'_1, \alpha(X) < 0\}$. Soit $R > 0$. On note $C_1 = \sup_{\mathscr{P}'_1}(C_{R, \mathscr{P}', \Theta', F})$ et $O_R = \{(X, Y) \in (\mathfrak{a}^\Theta)^-(\mathscr{P}'_1) \times \mathfrak{a}_\Theta^-(\mathscr{P}', C_1) \mid \|X\| < R, X + Y \in \mathfrak{a}^-(\mathscr{P}')\}$ qui est clairement non vide. Alors si $(X, Y) \in O_R$ on a les relations: etc...

Le reste de l'énoncé de 2.2 (iii) est inchangé, ainsi que 2.2 (iv).

Dans la démonstration de 2.2 (iii) page 116, ligne -8, on prend $(X, Y) \in O_R$ et page 116 ligne -5 on prend $(\log a, X) \in O_R$. On remarque alors que pour $X \in \mathfrak{a}_\Theta$ avec $\|X\| < R$, l'ensemble des $\{ Y \in \mathfrak{a}_\Theta \mid (X, Y) \in O_R \}$ est un ouvert non vide stable par dilatation. De même pour 2.2 (iv).

Dans le lemme 2 (ii): page 118 ligne -4, il faut lire $Pol(\mathfrak{a}_\Theta)$ au lieu de $S(\mathfrak{a}_\Theta)$, où $Pol(\mathfrak{a}_\Theta)$ est l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $\mathfrak{a}_\Theta$.

Puis page 118 ligne -1, il faut remplacer $\mathfrak{n}_\Theta(\mathscr{P})$ par $\bar{\mathfrak{n}}_\Theta(\mathscr{P}) = \theta(\mathfrak{n}_\Theta(\mathscr{P}))$ ainsi que dans toute démonstration du lemme 2.

Enfin, page 119, ligne 1, il faut lire:

Soit L la représentation de $\mathfrak{a}_\Theta$ sur $Pol(\mathfrak{a}_\Theta)$, donnée par la différenciation de la représentation régulière gauche du groupe additif $\mathfrak{a}_\Theta$ sur $Pol(\mathfrak{a}_\Theta)$. A chaque fois qu'intervient *ad* dans la suite il faut le remplacer par L.

Et: page 119, ligne 3, il faut remplacer $\lambda_0 + \rho_{\mathscr{P}, \Theta}$ par $-\lambda_0 - \rho_{\mathscr{P}, \Theta}$.

La démonstration du lemme 2 (i) doit être corrigée comme suit:

page 119, ligne -8, remplacer "$D \in \mathfrak{g}_+^\alpha$ ou $\mathfrak{g}_-^\alpha$" par "$D \in \mathfrak{g}_+^{-\alpha}$ ou $D \in \mathfrak{g}_-^{-\alpha}$" et page 119, ligne -5, lire:

$$D = f_1(a)(D + \theta D) + f_2(a)\, Ada(D + \sigma D).$$

Le reste de la démonstration de (i) est inchangée.

Dans la démonstration du lemme 2 (ii): page 121, ligne 5 remplacer "$a \in A^\Theta$, $X \in \mathfrak{a}_\Theta^-(\mathscr{P})$" par "$a = \exp Y \in A^\Theta$, $X \in \mathfrak{a}_\Theta^-(\mathscr{P})$ et $(Y, X) \in O_R$ pour un $R > 0$ (avec les notations de 2.2 (iii))".

page 122, ligne 2, remplacer les conditions sur X, Y par: $(X, Y) \in O_R$ pour un $R > 0$.

page 122, ajouter avant la ligne -6: On vérifie aisément que $i_{\lambda_0}(F)(m)$ est bien défini grâce au lemme 1 (ii).

Dans le théorème 1, (page 126, ligne 9), il faut remplacer $P_\phi(\mathscr{P})$ par $\bar{P}_\phi(\mathscr{P}) = \theta(P_\phi(\mathscr{P}))$ et λ_0 par $-\lambda_0$. La démonstration est essentiellement inchangée.

L'énoncé des théorèmes 2 et 3 (pages 127 et 129) est correct tel que. Mais, pour que la démonstration soit inchangée, il faut remplacer, $P_\Theta(\mathscr{P})$ par $\bar{P}_\Theta(\mathscr{P}) = \theta(P_\Theta(\mathscr{P}))$, $N_\Theta(\mathscr{P})$ par $\bar{N}_\Theta(\mathscr{P}) = \theta(N_\Theta(\mathscr{P}))$ et ν_0 par $-\nu_0$. En outre, page 129, dernière ligne il faut remplacer ν par $-\nu_0$. Le corollaire du théorème est inchangé.

Remerciements

Je remercie David Vogan pour ses explications précieuses sur son travail. Je remercie également Jacques Carmona pour les multiples conversations éclairantes que j'ai eues avec lui lors de l'élaboration de cet article. Je remercie enfin Henrik Schlichtkrull pour des discussions

utiles autour de la dualité de Flentsed-Jensen au moment de mes tatonnements pour élaborer les bonnes hypothèses sur G (finalement dans la classe d'Harish-Chandra). Je remercie le referee pour de nombreuses et pertinentes remarques.

Références

1. E. P. van den Ban, A convexity theorem for semisimple symmetric spaces, *Pacific J. Math.* **124** (1986), 21–55.
2. E. P. van den Ban, Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to reductive symmetric spaces, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch.* **90** (1987), 225–249.
3. E. P. van den Ban, Invariant differential operators on a semisimple symmetric space and finite multiplicities in a Plancherel Formula, *Ark. Mat.* **25** (1987), 175–187.
4. E. P. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space. I. H-fixed distribution vectors, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **21** (1988), 359–412.
5. E. P. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space. II. Eisenstein integrals, *J. Funct. Anal.* **109** (1992), 331–441.
6. E. P. van den Ban et H. Schlichtkrull, Asymptotic expansions and boundary values of eigenfunctions on a Riemannian symmetric space, *J. Reine Angew. Math.* **380** (1987), 108–165.
7. E. P. van den Ban et H. Schlichtkrull, Local boundary data of eigenfunctions on a Riemannian symmetric space, *Invent. Math.* **98** (1989), 639–657.
8. E. P. van den Ban et H. Schlichtkrull, The most continuous part of the Plancherel decomposition for a reductive symmetric space, en préparation.
9. A. Borel et N. Wallach, "Continuous Cohomology, Discrete Subgroups and Representations of Reductive Groups," Annals of Mathematics Studies, Vol. 94, Princeton Univ. Press, Princeton, 1980.
10. N. Bourbaki, "Espaces vectoriels topologiques," Ch. 3 à 5, Eléments de Mathématiques, Vol. XVIII, Hermann, Paris, 1967.
11. N. Bourbaki, "Variétés différentiables et analytiques," Fascicule de résultats, 1 à 7, Eléments de Mathématiques, Vol. XXXIII, Hermann, Paris, 1967.
12. J. L. Brylinski et P. Delorme, Vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs et prolongement méromorphe d'intégrales d'Eisenstein, *Invent. Math.* **109** (1992), 619–664.
13. J. Carmona, Terme constant des fonctions tempérées sur un espace symétrique réductif, preprint.
14. J. Carmona et P. Delorme, Base méromorphe de vecteurs distribution H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs. Equation fonctionnelle, *J. Funct. Anal.* **122** (1994), 152–221.
15. W. Casselman, Canonical extensions of Harish-Chandra modules to representations of G, *Canad. J. Math.* **41** (1989), 385–438.
16. W. Casselman et Miličić, Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations, *Duke Math. J.* **49** (1982), 869–930.
17. P. Delorme, Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées des groupes de Lie réductifs connexes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (4) **17** (1984), 117–156.
18. P. Delorme, "Injection de modules spériques pour les espaces symétriques réductifs dans certaines représentations induites," pp. 108–144, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1243, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1987.
19. I. Ehrenpreis, Fourier analysis in several complex variables, Wiley-Interscience, New York, 1970.

20. M. Flensted-Jensen, Discrete series for semisimple symmetric spaces, *Ann. of Math.* **111** (1980), 253–311.
21. M. Flensted-Jensen, T. Oshima, et H. Schlichtkrull, Boundedness of certain unitarizable Harish-Chandra modules, *dans* "Advanced Studies in Pure Mathematics," Vol. 14, Academic Press, Boston, 1980.
22. Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups, I. The theory of the constant term, *J. Funct. Anal.* **19** (1975), 103–204.
23. Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups, II, Wave packets in the Schwartz space, *Invent. Math.* **36** (1976), 1–55.
24. S. Helgason, "Groups and Geometric Analysis," Academic Press, New York, 1984.
25. M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima, et M. Tanaka, Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space, *Ann. of Math.* **107** (1978), 1–39.
26. A. W. Knapp, "Representation Theory of Semisimple Groups," Princeton Mathematical Series, Vol. 36, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.
27. B. Kostant, On the tensor product of a finite and an infinite dimensional representation, *J. Funct. Anal.* **20** (1975), 257–285.
28. O. Loos, "Symmetric Spaces, I," Benjamin, New York/Amsterdam, 1969
29. T. Matsuki, The orbits of affine symmetric spaces under the action of minimal parabolic subgroups, *J. Math. Soc. Japan* **31** (1979), 331–387.
30. G. Olafsson, Fourier and Poisson transformation associated to a semisimple symmetric space, *Invent. Math.* **90** (1987), 605–629.
31. T. Oshima, Asymptotic behaviour of spherical functions on semisimple symmetric space, *dans* "Advanced Studies in Pure Mathematics," Vol. 14, pp. 561–601, Academic Press, Boston, 1988.
32. T. Oshima et T. Matsuki, Orbits on affine symmetric spaces under the action of the isotropy subgroups, *J. Math. Soc. Japan* **32** (1980), 399–414.
33. T. Oshima et T. Matsuki, A description of discrete series for semisimple symmetric spaces, *dans* "Advanced Studies in Pure Mathematics," Vol. 4, pp. 331–390, Academic Press, Boston, 1984.
34. T. Oshima et J. Sekiguchi, The restricted root system of a semisimple symmetric pair, *dans* "Advanced Studies in Pure Mathematics," Vol. 4, pp. 433–497, Academic Press, Boston, 1984.
35. N. S. Poulsen, On C^∞ vectors and intertwining bilinear forms for representation of Lie groups, *J. Func. Anal.* **9** (1972), 87–120.
36. H. Schlichtkrull, "Hyperfunctions and Harmonic Analysis on Symmetric Spaces," Progress in Mathematics, Vol. 49, Birkhäuser, Boston, 1984.
37. F. Treves "Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels," Academic Press, New York/London, 1967.
38. V. S. Varadarajan, "Harmonic Analysis on Real Reductive Groups," Lecture Notes in Mathematics, Vol. 576, Springer-Verlag, New York/Berlin, 1977.
39. D. Vogan, "Representations of Reductive Lie Groups," Progress in Mathematics, Vol. 15, Birkhäuser, Boston, 1981.
40. D. Vogan, Irreductibility of discrete series representations for semisimple symmetric spaces, *dans* "Advanced Studies in Pure Mathematics," Vol. 14, pp. 191–221, Academic Press, Boston, 1988.
41. N. R. Wallach, "Real Reductive Groups, I, II," Academic Press, New York, 1988, 1992.
42. F. Warner, "Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups," Foresman, Glenview, IL, 1970.
43. G. Warner, "Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.