Invent. math. 134, 59–99 (1998)

Inventiones mathematicae

Transformation de Fourier sur l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif

Jacques Carmona, Patrick Delorme

Institut de Mathématiques de Luminy, UPR 9016 du CNRS, Faculté des Sciences de Luminy, 163, Avenue de Luminy, Case 930, F-13288 Marseille Cedex 09, France

Oblatum 7-VI-1996 & 20-VI-1997

Introduction

Soit G un groupe de Lie réductif dans la classe de Harish-Chandra, σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant avec σ. Soit H un sous-groupe ouvert du groupe des points fixes de σ et K le groupe des points fixes de θ. On note $\mathbb{D}(G/H)$ l'algèbre des opérateurs différentiels sur G/H invariants par translation à gauche par G.

La décomposition de la représentation régulière gauche de G dans $L^2(G/H)$ en représentations irréductibles, et la théorie spectrale des éléments de $\mathbb{D}(G/H)$ font partie des problèmes majeurs de l'analyse harmonique sur l'espace symétrique G/H. La formule de Plancherel pour le cas des groupes, i.e. lorsque $G = G_1 \times G_1$ et H égal au sous-groupe diagonal, est due à Harish-Chandra [20], le cas riemannien symétrique ayant été traité auparavant (cf. e.g. [17]).

Au moment où cet article a été conçu, P. Harinck venait de traiter le cas où G est un groupe réductif complexe et H une forme réelle [18], seul autre cas de rang quelconque alors connu.

La preuve de Harish-Chandra dans le cas des groupes est un mélange d'une approche spectrale (intégrales d'Eisenstein) et d'analyse harmonique invariante (distributions invariantes, intégrales orbitales). Notre approche est purement spectrale. On introduit pour cela des familles de fonctions $\mathbb{D}(G/H)$-propres associées à des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables quelconques: les intégrales d'Eisenstein, généralisant ainsi la définition de E. van den Ban ([3], voir aussi l'article de E. van den Ban et H. Sclichtkrull [5]) pour le cas minimal. Le but est de désintégrer tout élément de $L^2(G/H)$ à l'aide de celles-ci, ou plutôt de leur version K-finie. Il résulte de [13] que les intégrales d'Eisenstein sont des fonctions tempérées lorsque le paramètre est imaginaire pur. Les fonctions C décrivant leur comportement asymptotique sont définies grâce à la théorie du terme constant des fonctions tempérées [10].

On trouve alors trois applications de la troncature [14].

D'abord on établit les relations de Maass-Selberg en rang quelconque pour les intégrales d'Eisenstein, puis on montre que les intégrales d'Eisenstein convenablement normalisées sont holomorphes au voisinage de l'axe imaginaire pur. La transformée de Fourier normalisée $\mathscr{F}^0$ est alors définie. De même le candidat à être son inverse $\mathscr{I}^0$ est défini grâce aux propriétés des paquets d'ondes [4]. La troisième application de la troncature montre que $\mathscr{F}^0\mathscr{I}^0$ est égal à l'identité et $\mathscr{I}^0\mathscr{F}^0$ est un projecteur orthogonal dans l'espace de Schwartz des fonctions K-finies ou τ-sphériques, muni du produit scalaire L^2.

Ceci permet de décrire une partie du spectre de $L^2(G/H)$, qui contient en particulier la partie la plus continue décrite par E. van den Ban et H. Sclichtkrull dans [6], nos méthodes étant toutefois différentes. On veut montrer que l'on a ainsi obtenu la totalité du spectre.

On sait que toute fonction de $L^2(G/H)$ se désintègre à l'aide de fonctions tempérées (cf. [11], Appendice C, qui se déduit du travail de Bernstein [7] sur la mesure de Plancherel). Dans le cas des groupes, l'ensemble de ces résultats implique facilement que $\mathscr{I}^0$ et $\mathscr{F}^0$ sont inverses l'un de l'autre, donnant ainsi une autre preuve de la Formule de Plancherel de Harish-Chandra, mis à part le calcul explicite des facteurs de Plancherel. Dans le cas général, toujours en utilisant la tempérance du spectre, on établit un critère pour que $\mathscr{I}^0$ et $\mathscr{F}^0$ soient inverses l'une de l'autre.

Dans [15] ce critère, joint à une nouvelle utilisation de la troncature, a permis au deuxième auteur d'achever la preuve de la formule de Plancherel. Enfin, notre Théorème sur l'holomorphie des intégrales d'Eisenstein normalisées, au voisinage de l'axe imaginaire pur, a permis à E. van den Ban et H. Sclichtkrull de déduire de leur preuve du Théorème de Paley-Wiener une autre preuve de la formule de Plancherel. Décrivons plus précisément le contenu de l'article.

Soit $\mathfrak{a}_\emptyset$ un sous-espace abélien maximal du sous-espace de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G formé des éléments anti-invariants par la différentielle de θ et celle de σ. Si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, on note $P = M_PA_PN_P$ sa σ-décomposition de Langlands où $L_P = M_PA_P$ est le sous-groupe de Levi θ-stable de P et A_P l'intersection de la composante déployée de L_P avec l'ensemble des éléments g de G tels que $\sigma(g) = g^{-1}$ (remarquer le changement de notation par rapport à [14]). Lorsque $A_P = A$ est fixé, on note (L, M) au lieu de (L_P, M_P).

On suppose maintenant que P contient $A_\emptyset := \exp(\mathfrak{a}_\emptyset)$. On note $W_\emptyset$ le quotient du normalisateur $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans K par son centralisateur. Soit $W_\emptyset^H$ (resp. $W_\emptyset^M$) l'ensemble des éléments de $W_\emptyset$ admettant un représentant dans l'intersection de H (resp. M) avec $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$. On fixe dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ un ensemble $\mathscr{W}_M$ de représentants des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^M)$ double-classes. C'est, pour tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable Q de G de sous-groupe de Levi L, un ensemble de représentants des (H, Q) double-classes ouvertes de G.

Soit (τ, V_τ) une représentation unitaire de dimension finie de K. On définit:

$$\mathscr{A}_2(M,\tau) := \bigoplus_{w \in \mathscr{W}_M} \mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)$$

où $\mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)$ est l'espace des fonction C^∞, $\tau_M (= \tau_{|M\cap K})$-sphériques sur $M/M \cap w^{-1}Hw$, qui sont de carré intégrables et $\mathbb{D}(M/M \cap w^{-1}Hw)$-finies. Ces espaces sont de dimension finie (cf. [14] Proposition 1).

On définit maintenant les intégrales d'Eisenstein. Soit λ un élément du dual complexe $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A, tel que $(Re\ \lambda - \rho_P)$ (où ρ_P est la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P$) soit strictement dominant (pour ces mêmes racines). A tout $\psi = (\psi_w)_{w \in \mathscr{W}_M} \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$ on associe la fonction Ψ_λ définie pour $x \in G/H$ par:

$$\Psi_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{w \in \mathscr{W}_M} Pw^{-1}H \\ a^{-\lambda+\rho_P}\psi_w(m) & \text{si } x \in namw^{-1}H,\ n \in N_P,\ a \in A,\ m \in M,\ w \in \mathscr{W}_M. \end{cases}$$

L'intégrale d'Eisenstein $E(P,\psi,\lambda)$ est définie pour $x \in G/H$ par:

$$E(P,\psi,\lambda)(x) := \int_K \tau(k^{-1})\Psi_\lambda(kx)\ dk\ .$$

Cette intégrale converge et définit une fonction de classe C^∞, τ-sphérique et $\mathbb{D}(G/H)$-finie. On déduit de la relation simple entre les intégrales d'Eisenstein et les vecteurs distributions H-invariants des séries principales généralisés, que $E(P,\psi,\lambda)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$. En outre, utilisant les résultats de [13] et [4], on montre (cf. Proposition 3) que, pour un produit convenable, b, de fonctions affines de type $\alpha + c$ où α est une racine de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P$ et $c \in \mathbb{C}$, l'application $\lambda \mapsto b(\lambda)E(P,\psi,-\lambda)$ est holomorphe dans un voisinage de $i\mathfrak{a}^*$ et, de plus, est un élément de $\widetilde{II}'_{\mathrm{hol}}(G,L,\tau)$ (cf. [14] fin du par. 1 pour la définition de cet espace). En particulier, lorsqu'elle est définie pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, la fonction $E(P,\psi,-\lambda)$ est tempérée. On introduit maintenant les fonctions C grâce à la théorie du terme constant (cf. [10]). On note $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ l'espace des fonctions C^∞, τ-sphériques, tempérées et $\mathbb{D}(G/H)$-finies. Le terme constant de $\varphi \in \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ le long de P est l'élément φ_P de $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(L/L \cap H, \tau_L)$ caractérisé par:

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\delta_P^{1/2}(l\exp(tX))\varphi(l\ \exp(tX)) - \varphi_P(l\ \exp(tX))\right) = 0$$

où $X \in A$ est strictement dominant pour les racines de $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{n}_P$ et:

$$\delta_P(l) = \left|\det Ad\ l_{|\mathfrak{n}_P}\right|, \quad l \in L\ .$$

Alors, si Q est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable tel que $L_Q = L$, on montre (Théorème 1) qu'il existe une fonction méromorphe $\lambda \mapsto C_{Q|P}(s,\lambda)$

sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, à valeurs dans End $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ telle que, pour $w \in \mathscr{W}_M$, $l \in L$, $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, $a \in A$ et λ dans un ouvert dense de $i\mathfrak{a}^*$:

$$\tau(w^{-1})E(P,\psi,\lambda)_{Q^w}(wlaw^{-1}) = \sum_{s\in W(\mathfrak{a})} (C_{Q|P}(s,\lambda)\psi)_w(l)a^{-s\lambda} \ .$$

Ici $Q^w := wQw^{-1}$ et $W(\mathfrak{a})$ désigne le groupe des automorphismes de $\mathfrak{a}$ induits par des éléments de G. Les fonctions C sont génériquement des opérateurs inversibles ce qui permet (par. 5) de définir les intégrales d'Eisenstein normalisées par:

$$E^0(P,\psi,\lambda) = E(P, C_{P|P}(1,\lambda)^{-1}\psi,\lambda) \ .$$

On dispose alors des fonctions C normalisées, notées C^0. En particulier $C^0_{P|P}(1,\lambda) \equiv Id_{\mathscr{A}_2(M,\tau)}$.

On démontre ensuite les relations de Maass-Selberg. Plus précisément, si Q, Q', P et P' sont des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de σ-sous-groupe de Levi L, on montre que pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, $s,t \in W(\mathfrak{a})$:

$$\|C_{Q|P}(s,\lambda)\psi\|^2 = \|C_{Q'|P'}(t,\lambda)\psi\|^2$$

lorsque $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ est tel que les deux membres aient un sens. Dans le cas où $\mathfrak{a}$ est de dimension un modulo son intersection avec le centre de $\mathfrak{g}$, cela résulte essentiellement de [14], Théorème 2. On passe au cas général en montrant que les relations cherchées équivalent à certaines propriétés des (petites) matrices B (Lemme 5). En effet, les propriétés de produit des matrices B permettent une réduction au cas précédent. Alors il résulte facilement du critère [4] Théorème 2, que $\lambda \mapsto E^0(P,\psi,-\lambda)$ est une fonction $\widetilde{\Pi}'_{\mathrm{hol}}(G,L,\tau)$ et en particulier holomorphe au voisinage de $i\mathfrak{a}^*$ (Théorème 3, appelé théorème de régularité des intégrales d'Eisenstein normalisées).

Soit f une fonction de l'espace de Schwartz des fonctions τ-sphériques. Si $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, il existe, par représentation de Riesz, un unique élément $(\mathscr{F}^0_P f)(\lambda)$ de $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ tel que, pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$:

$$(\mathscr{F}^0_P f(\lambda),\psi) = \int_{G/H} f(x), E^0(P,\psi,\lambda)(x))\ dx \ .$$

De plus, on montre (Théorème 4), que $\mathscr{F}^0_P f$ est un élément de $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$ où $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)$ est l'espace de Schwartz des fonctions C^∞ à décroissance rapide sur $i\mathfrak{a}^*$.

Par ailleurs, on dispose des paquets d'ondes. Si Ψ est un élément de $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$, la relation:

$$\mathscr{I}^0_P\Psi(x) = \int_{i\mathfrak{a}^*} E^0(P,\Psi(\lambda),\lambda)(x)\ d\lambda, \quad x \in G/H \ ,$$

définit un élément $\mathscr{I}_P^0\Psi$ de $\mathscr{C}(G/H,\tau)$. Cela résulte du Théorème de régularité, grâce au Théorème 1 de [4].

On dit que deux sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables P et Q sont σ-associés si A_P et A_Q sont conjugués sous K. On se fixe un sous-groupe parabolique minimal P_0 du groupe $G^{\sigma\theta}$ des points fixes de $\sigma\theta$ et contenant $A_\emptyset$. On dit qu'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G est σ-standard s'il contient P_0. On note $\mathbb{F}$ un ensemble de représentants des classes de σ-association de sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables formé de sous-groupes paraboliques σ-standards. On définit la transformée de Fourier normalisée $\mathscr{F}^0$ de $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ dans $\bigoplus_{P\in\mathbb{F}} \mathscr{S}(i\mathfrak{a}_P^*)\otimes\mathscr{A}_2(M_P,\tau_{M_P})$ en posant:

$$\mathscr{F}^0=\sum_{P\in\mathbb{F}} \#W(\mathfrak{a}_P)^{-1/2}\mathscr{F}_P^0\ .$$

Le candidat $\mathscr{I}^0$ à la transformation de Fourier inverse est défini par la restriction à l'image de $\mathscr{F}^0$ de $\sum_{P\in\mathbb{F}} \#W(\mathfrak{a}_P)^{-1/2}\mathscr{I}_P^0$. On détermine l'image de $\mathscr{F}^0$ et on montre que $\mathscr{F}^0\circ\mathscr{I}^0$ est égal à l'identité (Théorèmes 5 et 6). On montre enfin que $\mathscr{I}^0\circ\mathscr{F}^0$ est un projecteur orthoganal dans l'espace de Schwartz.

Pour montrer que $\mathscr{I}^0$ est bien l'inverse de $\mathscr{F}^0$, il reste à prouver que $\mathscr{I}^0$ est surjective (ou $\mathscr{F}^0$ injective). Nous démontrons (Lemme 11) que $\mathscr{I}^0$ est surjective si et seulement si il existe une fonction tempérée $\mathbb{D}(G/H)$-finie orthogonale à l'image de $\mathscr{I}^0$. Ce Lemme est crucial dans la fin de la démonstration de la Formule de Plancherel (cf. [15]).

On montre aussi que si $G=G_1\times G_1$ et H est le groupe diagonal de G, $\mathscr{I}^0$ et $\mathscr{F}^0$ sont inverses l'un de l'autre (Théorème 8).

0 Notations. Choix des mesures

On utilise les conventions de [13] par. 1 (par exemple, si S est un groupe de Lie, S^0 désigne sa composante neutre, e ou e_S son élément neutre, etc..).

Soit G un groupe de Lie réductif dans la classe de Harish-Chandra, σ une involution de G, θ une involution de Cartan de G commutant avec σ, H un sous-groupe ouvert des points fixes de σ, K le sous-groupe des points fixes de θ. On note encore θ (resp. σ) la différentielle de θ (resp. σ) et $\mathfrak{s}$ (resp. $\mathfrak{q}$) le sous-espace propre de $\mathfrak{g}$ pour la valeur propre -1. Si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, on note L_P (ou L) le sous-groupe de Levi stable par σ et θ, i.e. $L_P=P\cap\theta(P)$, dite composante de Levi, N_P son radical unipotent et $P=M_PA_PN_P$ sa σ-décomposition de Langlands. En particulier, on note $G=L_GA_G$ la σ-décomposition de Langlands de G. Ici, A_G est le sous-groupe de la composante déployée de G formé des éléments a de celle-ci tels que $\sigma(a)=a^{-1}$. On l'appelle composante σ-déployée de G. Clairement, si P est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G, $(M_P,\sigma_{|M_P},\theta_{|M_P},H\cap M_P)$ vérifie les mêmes hypothèses que (G,σ,θ,H), et de même en remplaçant M_P par L_P.

On se fixe dans toute la suite de l'article un sous-espace abélien maximal $\mathfrak{a}_\emptyset$ de $\mathfrak{s} \cap \mathfrak{q}$. On note $L_\emptyset$ le centralisateur dans G de $\mathfrak{a}_\emptyset$. C'est la composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable minimal. Il admet pour σ-décomposition de Langlands $L_\emptyset = M_\emptyset A_\emptyset$ où $A_\emptyset = \exp \mathfrak{a}_\emptyset$. On note $W_\emptyset$ le quotient du normalisateur $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans K, par son centralisateur. On a $G = KA_\emptyset H$. Soit P un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable contenant $A_\emptyset$. Alors $L_\emptyset$ (resp. $M_\emptyset$) est contenu dans L_P (resp. M_P) et A_P est contenu dans $A_\emptyset$. On note Σ_P l'ensemble des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$. On appelle σ-sous-groupe de Levi de G, toute composante de Levi d'un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable contenant $A_\emptyset$. Si L est un σ-sous-groupe de Levi de G, on note $\mathscr{L}(L)$ l'ensemble des σ-sous-groupes de Levi de G contenant L, $\mathscr{P}(L)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G dont la composante de Levi est égale à L, $\mathscr{F}(L)$ l'ensemble des sous-groupes paraboliques $\sigma\theta$-stables de G dont la composante de Levi contient L. Si $L = L_\emptyset$, on notera $\mathscr{L}$ au lieu de $\mathscr{L}(L_\emptyset)$, etc..

Pour toute la suite de l'article, on fixe un système de racines positives $\Sigma_{\sigma\theta}$ de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}^{\sigma\theta}$ formée des points fixes de $\sigma\theta$. On note P_0 le sous-goupe parabolique minimal correspondant du sous-goupe $G^{\sigma\theta}$ des points fixes de $\sigma\theta$. On note $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ (*st* pour standard) le sous-ensemble de $\mathscr{P}$ formé des $P \in \mathscr{P}$ contenant P_0. Pour $L \in \mathscr{L}$, on note $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}(L)$ (resp. $\mathscr{F}_{\mathrm{st}}(L)$) l'ensemble des éléments de $\mathscr{P}(L)$ (resp. $\mathscr{F}(L)$) contenant un élément de $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$. Soit $\mathscr{L}_{\mathrm{st}}$ l'ensemble des éléments L de $\mathscr{L}$ tels que $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}(L)$ soit non vide. On ajoutera L' en indice supérieur dans tout ce qui précède si on remplace G par un élément L' de $\mathscr{L}$. Tous les ensembles précédents sont finis, mais contrairement au cas des groupes, $\mathscr{P}_{\mathrm{st}}$ n'est pas réduit à un élément.

On se fixe une forme bilinéaire B sur $\mathfrak{g}$, prolongeant la forme de Killing de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, invariante par $Ad\ G$, σ et θ, et telle que, de plus, la forme quadratique $X \mapsto \|X\|^2 := -B(X, \theta X)$ soit définie positive. Si $L \in \mathscr{L}$, on notera $\mathfrak{a}_L^G$ l'orthogonal pour B de $\mathfrak{a}_G$ dans $\mathfrak{a}_L$. Si $P \in \mathscr{P}(L)$, on notera δ_P la fonction sur $L/L \cap H$ définie par:

$$\delta_P(l) = e^{2\rho_P(H_L(l))}, \quad l \in L \ ,$$

où $\rho_P \in \mathfrak{a}_P^*$ est la demi-somme des racines de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{n}_P$, comptées avec leurs multiplicités.

La forme B détermine un produit scalaire sur $\mathfrak{a}_L$, $L \in \mathscr{L}$, ce qui détermine une mesure de Haar sur $\mathfrak{a}_L$. On munira $i\mathfrak{a}_L^*$ de la mesure duale (cf. [14] par. 1). La mesure invariante sur G/H est normalisée comme dans [14] par. 1. On procède de même pour les autres espaces symétriques rencontrés.

1 Vecteurs distributions H-invariants "de carré intégrable"

1.1 Soit (π, H_π) une représentation unitaire irréductible de G et $(H_\pi^{-\infty})^H$ l'espace des vecteurs distributions H-invariants de (π, H_π). D'après [1], cet espace est de dimension finie. L'action $(D, \xi) \mapsto \pi'(D)\xi$, $(D \in U(\mathfrak{g})^H$,

$\xi \in (H_\pi^{-\infty})^H$), de $U(\mathfrak{g})^H$ sur $(H_\pi^{-\infty})^H$ passe au quotient en une action de l'algèbre $\mathbb{D}(G/H)$ des opérateurs différentiels G-invariants sur G/H (qui s'identifie à $U(\mathfrak{g})^H/(U(\mathfrak{g})\mathfrak{h} \cap U(\mathfrak{g})^H)$), action que l'on notera également $(D, \xi) \mapsto \pi'(D)\xi$.

A tout $\xi \in (H_\pi^{-\infty})^H$ est associée une application linéaire T_ξ de H_π^∞ dans $C^\infty(G/H)$, $\mathfrak{g}$ et G-équivariante, définie par:

$$T_\xi(v)(gH) = \langle \pi'(g)\xi, v \rangle, \quad g \in G, \quad \xi \in (H_\pi^{-\infty})^H, \ v \in H_\pi^\infty \ . \tag{1.1}$$

Pour un tel couple (ξ, v), on a évidemment:

$$DT_\xi(v) = T_{\pi'(D)\xi}(v), \quad D \in \mathbb{D}(G/H) \ . \tag{1.2}$$

En particulier, l'espace

$$(H_\pi^{-\infty})^H_{\text{disc}} := \{\xi \in (H_\pi^{-\infty})^H \mid Im\ T_\xi \subseteq L^2(G/H)^\infty \} \tag{1.3}$$

est stable sous l'action de $\mathbb{D}(G/H)$ car $\mathbb{D}(G/H)$ opère continûment sur $L^2(G/H)^\infty$ [1]. Les éléments de cet espace sont appelés vecteurs distributions H-invariants "de carré intégrable."

1.2 Lemme 1. Si $\xi \in (H_\pi^{-\infty})^H_{\text{disc}}$, *l'application* T_ξ *se prolonge en un opérateur linéaire continu* $\bar{T}_\xi$ *de* H_π *dans* $L^2(G/H)$. *Cet opérateur est G-équivariant et applique donc continûment* H_π^∞ *dans* $L^2(G/H)^\infty$.

Démonstration. Pour $g \in G$ fixé, les formes linéaires $f \mapsto f(gH)$ et $v \mapsto \langle \pi'(g)\xi, v \rangle$ sont continues sur les espaces $C^\infty(G/H)$ et H_π^∞ respectivement lorsqu'on les munit de leurs structures canoniques d'espaces de Fréchet. Le graphe de T_ξ est donc fermé et T_ξ définit une application linéaire continue de H_π^∞ dans $C^\infty(G/H)$. Montrons que l'opérateur T_ξ, défini comme un opérateur non borné sur H_π, de domaine de définition H_π^∞, à valeurs dans $L^2(G/H)$, est fermable. Soit (v_n) une suite de H_π^∞ convergeant vers 0 dans H_π et telle que $(T_\xi v_n)$ converge vers f dans $L^2(G/H)$. Il faut montrer que $f = 0$. Pour tout $\varphi \in C_c^\infty(G)$, la suite $(\pi(\varphi)v_n)$ converge vers 0 dans H_π^∞. L'application T_ξ étant continue, la suite $T_\xi(\pi(\varphi)v_n)$ converge vers 0 dans $C^\infty(G/H)$. L'opérateur T_ξ étant G-équivariant et continu, $T_\xi(\pi(\varphi)v_n) = \varphi * T_\xi(v_n)$. D'après nos hypothèses sur (v_n), la suite $(\varphi * T_\xi(v_n))$ converge vers $\varphi * f$. On en déduit que , pour tout $\varphi \in C_c^\infty(G)$, $\varphi * f = 0$. Cela signifie que $f = 0$ comme désiré. L'opérateur T_ξ est donc fermable. Sa fermeture $\bar{T}_\xi$ est évidemment G-équivariante. Le résultat cherché résulte alors du Lemme de Schur pour les opérateurs fermés non bornés. □

1.3 Tout élément $D \in \mathbb{D}(G/H)$ peut être considéré comme un opérateur linéaire non borné dans $L^2(G/H)$, de domaine de définition $C_c^\infty(G/H)$. D'après [1] Lemmes 1.2 et 1.3, le domaine de définition de son adjoint (resp. de sa fermeture) contient $L^2(G/H)^\infty$ et cet adjoint coincide sur $C_c^\infty(G/H)$

avec un élément D^* de $\mathbb{D}(G/H)$. Si on note encore D l'opérateur fermé correspondant on a donc, par densité:

$$(Df,g) = (f,D^*g), \quad f,g \in L^2(G/H)^\infty, \ D \in \mathbb{D}(G/H) \ . \tag{1.4}$$

Si ξ et ξ' sont dans $(H_\pi^{-\infty})^H_{\text{disc}}$, $\bar{T}^*_{\xi'}\bar{T}_\xi$ est un opérateur borné dans H_π, qui commute avec l'action de G. C'est donc un multiple de l'identité de H_π. Si on définit le complexe (ξ,ξ') de telle sorte que $\bar{T}^*_{\xi'}\bar{T}_\xi = (\xi,\xi')\ Id_{H_\pi}$, on a:

$$\int_{G/H} (\bar{T}_\xi(v)(x), \bar{T}_{\xi'}(v')(x))\, dx = (\xi,\xi')\ (v,v'), \quad v,v' \in H_\pi^\infty \tag{1.5}$$

et on vérifie immédiatement que:

$$\textit{On a ainsi défini un produit scalaire sur } (H_\pi^{-\infty})^H_{\text{disc}}. \tag{1.6}$$

Enfin, on obtient facilement, à l'aide de (1.2), (1.4) et (1.5) que:

Pour $D \in \mathbb{D}(G/H)$, l'adjoint de $\pi'(D)$ agissant sur $(H_\pi^{-\infty})^H_{\text{disc}}$, muni du produit scalaire ci-dessus, est égal à $\pi'(D^*)$ (1.7)

L'algèbre commutative $\mathbb{D}(G/H)$ étant engendrée par ses éléments autoadjoints, on déduit de (1.6) que l'action de $\mathbb{D}(G/H)$ sur $(H_\pi^{-\infty})^H_{\text{disc}}$ se diagonalise. Notons, pour tout caractère χ de $\mathbb{D}(G/H)$:

$$(H_\pi^{-\infty})^H_{\text{disc},\chi} = \{\xi \in (H_\pi^{-\infty})^H_{\text{disc}} \mid \pi'(D)\xi = \chi(D)\xi, \quad D \in \mathbb{D}(G/H)\} \ .$$

On a donc:

$$(H_\pi^{-\infty})^H_{\text{disc}} = \oplus_\chi \ (H_\pi^{-\infty})^H_{\text{disc},\chi} \tag{1.8}$$

2 Application aux sous-groupes de Levi

2.1 Soit $L \in \mathscr{L}$ et $L = MA$ sa σ-décomposition de Langlands. On fixe une représentation unitaire de dimension finie (τ, V_τ) de K, et on note τ_M sa restriction à $K \cap M$ (noté aussi K_M). Soit (δ, V_δ) une représentation unitaire irréductible de M. On applique les résultats précédents à M et δ au lieu de G et π. On notera $\mathscr{A}_2(M/M\cap H)^\delta$ la somme des images des opérateurs T_η lorsque η varie dans $(V_\delta^{-\infty})^{M\cap H}_{\text{disc}}$. Soit $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)^\delta$ l'espace des fonctions τ_M-sphériques correspondant, défini par:

$$\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)^\delta := (\mathscr{A}_2(M/M\cap H)^\delta \otimes V_\tau)^{K_M} \ , \tag{2.1}$$

où l'indice supérieur K_M indique que l'on considère les éléments K_M-invariants de ce produit tensoriel de représentations de K_M. Les éléments de $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)^\delta$ sont des fonctions de classe C^∞ sur $M/M\cap H$, τ_M-sphériques, $\mathbb{D}(M/M\cap H)$-finies (grâce à (1.2) et au fait que $(V_\delta^{-\infty})_{\mathrm{disc}}^{M\cap H}$ est de dimension finie). Elles appartiennent à l'espace $(L^2(M/M\cap H)^\infty\otimes V_\tau)^{K_M}$. Ce sont (en utilisant les notations de [14], équation (5.3)) des éléments de $\mathscr{C}(M/M\cap H,\tau_M)$ (voir [2] Th. 6.4). On en déduit que $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)^\delta$ est contenu dans $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)$, donc de dimension finie (cf [14] Prop. 1). De plus, on a:

$$\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)=\bigoplus_{\delta\in\hat{M}}\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)^\delta\ . \tag{2.2}$$

Cette somme est une somme directe orthogonale lorsque l'on munit ces espaces du produit scalaire L^2.

2.2 On fait agir K_M sur $C^\infty(K)$ par représentation régulière droite et naturellement sur V_δ^∞. Dans ce cas, l'espace des invariants sous l'action de K_M:

$$C^\infty(K,\delta):=(C^\infty(K)\otimes V_\delta^\infty)^{K_M} \tag{2.3}$$

est l'espace de la réalisation compacte des séries principales généralisées associées à δ et $P\in\mathscr{P}(L)$.

On fait agir K sur $C^\infty(K,\delta)$ et sur $C^\infty(K)$ par représentation régulière gauche. L'espace:

$$C^\infty(K,\delta,\tau):=(C^\infty(K,\delta)\otimes V_\tau)^K\ , \tag{2.4}$$

s'écrit également:

$$C^\infty(K,\delta,\tau)=(C^\infty(K)\otimes V_\delta^\infty\otimes V_\tau)^{K_M\times K}\ . \tag{2.5}$$

On introduit l'application de $C^\infty(K,\delta,\tau)\otimes(V_\delta^{-\infty})_{\mathrm{disc}}^{M\cap H}$ dans $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)^\delta$ qui associe à $f\otimes\eta$ l'élément $\psi_{f\otimes\eta}$ de $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)$ défini par:

$$\psi_{f\otimes\eta}(mM\cap H)=\langle\delta'(m)\eta,f(e)\rangle\in V_\tau,\quad m\in M\ . \tag{2.6}$$

Ici, si $f=\sum_{i=1}^n\varphi_i\otimes v_i$, où $\varphi_i\in C^\infty(K,\delta)$ et $v_i\in V_\tau$, et $\xi\in V_\delta^{-\infty}$, on a noté: $\langle\xi,f(e)\rangle=\sum_{i=1}^n\langle\xi,\varphi_i(e)\rangle v_i$.

On démontre comme dans [3] par. 4, que cette appplication est un isomorphisme. En outre:

Si les espaces sont munis des produits scalaires L^2, cette application est une isométrie d'image $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)^\delta$. (2.7)

2.3 Pour tout sous-groupe S de G, on note $W_\emptyset^S$ l'ensemble des éléments de $W_\emptyset$ induits par des éléments du normalisateur de $\mathfrak{a}_\emptyset$ dans $K\cap S$. On fixe un ensemble $\mathscr{W}_M$ (noté aussi $\mathscr{W}$) de représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^M)$-doubles classes de $W_\emptyset$. Pour $P \in \mathscr{P}(L)$, $\mathscr{W}$ est un ensemble de représentants des (H, P)-doubles classes ouvertes de G ([11] Lemme 3). On suppose en outre que $\mathscr{W}$ contient l'élément neutre de G.

Si $w \in N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$, on dispose d'une involution σ_w de G définie par:

$$\sigma_w(g) = w^{-1}\sigma(wgw^{-1})w, \quad g \in G \ , \tag{2.8}$$

pour laquelle $w^{-1}Hw$ est un sous-groupe ouvert du groupe de ses points fixes. De plus σ_w commute à θ, $\mathfrak{a}_\emptyset$ est contenu dans $\mathfrak{q}_w := Ad\, w^{-1}(\mathfrak{q})$ et est σ_w invariant. Enfin, si $P \in \mathscr{F}$, P est également $\sigma_w\theta$-stable. On peut appliquer au quadruplet $(G, w^{-1}Hw, \sigma_w, \theta)$ les résultats établis pour (G, H, σ, θ).

On définit:

$$\mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}} := \prod_{w \in \mathscr{W}} \mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M) \ , \tag{2.9}$$

et, pour $\delta \in \hat{M}$:

$$\mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}}^{\delta} := \prod_{w \in \mathscr{W}} \mathscr{A}_2(M/M \cap w^{-1}Hw, \tau_M)^{\delta} \ . \tag{2.10}$$

Chacun des facteurs figurant dans le membre de droite de (2.9) et (2.10) est muni d'un produit scalaire L^2 naturel. On munit le membre de gauche du produit scalaire naturel correspondant. Si $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}}$, on notera ψ_w, $w \in \mathscr{W}$ ses composantes. La définition des espaces ci-dessus dépend du choix de $\mathscr{W}$. Toutefois, s'il n'y a pas ambiguité, on pourra omettre l'indice $\mathscr{W}$.

De façon analogue à [11], on note, pour $(\delta, V_\delta) \in \hat{M}$:

$$\mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}} := \prod_{w \in \mathscr{W}} \mathscr{V}(\delta, w), \text{ où } \mathscr{V}(\delta, w) = (\mathscr{V}_{\bar{\delta}}^{-\infty})_{\text{disc}}^{M \cap w^{-1}Hw} \ , \tag{2.11}$$

qui est muni d'une structure d'espace de Hilbert (de dimension finie) déduite de celle introduite sur les espaces $(\mathscr{V}_{\bar{\delta}}^{-\infty})_{\text{disc}}^{M \cap w^{-1}Hw}$ (cf. (1.6)). Noter que, par rapport à [11], on a omis l'indice disc.

On utilise la notation (2.6). Si $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$ et $\eta = (\eta_w)_{w \in \mathscr{W}} \in \mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}}$, on définit l'élément $\psi_{f \otimes \eta}^{\mathscr{W}}$ ($\psi_{f \otimes \eta}$ en abrégé) de $\mathscr{A}_2(M, \tau)$ par:

$$(\psi_{f \otimes \eta}^{\mathscr{W}})_w = \psi_{f \otimes \eta_w}, \quad w \in \mathscr{W} \ . \tag{2.12}$$

Alors, grâce à (2.7), on voit que:

La correspondance $f \otimes \eta \mapsto \psi_{f \otimes \eta}^{\mathscr{W}}$ se prolonge en une application linéaire bijective isométrique entre $C^\infty(K, \delta, \tau) \otimes \mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}}$ et $\mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}}^{\delta}$.

(2.13)

3 Intégrales d'Eisenstein

3.1 Soient $P \in \mathscr{P}(L)$, et $(\delta, V_\delta) \in \hat{M}$. On omet les indices $\mathscr{W}$. On dispose de la série principale généralisée C^∞, $(\pi^P_{\delta,\lambda}, I^P_{\delta,\lambda})$ (cf. [11] par. 2) et de sa réalisation compacte $\bar{\pi}^P_{\delta,\lambda}$ dans $C^\infty(K, \delta)$. On suppose que $\mathrm{Re}(\lambda - \rho_P)$ est strictement Σ_P-dominant et $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$. On dispose d'une fonction $j(P, \delta, \lambda, \eta)$, continue sur G, à valeurs dans $V_\delta^{-\infty}$, qui détermine un vecteur distribution H-invariant de $\pi^P_{\delta,\lambda}$ (cf. [11], (2.4.6)). On notera $\bar{j}(P, \delta, \lambda, \eta)$ la forme linéaire correspondante sur $C^\infty(K, \delta)$.

Si $\psi = (\psi_w)_{w\in\mathscr{W}} \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$, on définit une fonction Ψ_λ de G/H dans V_τ par:

$$\Psi_\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \bigcup_{w\in\mathscr{W}} Pw^{-1}H \\ a^{-\lambda+\rho_P}\psi_w(m) & \text{si } x = namw^{-1}h, n \in N_P,\ a \in A,\ m \in M,\ h \in H. \end{cases} \tag{3.1}$$

Si, avec les notations de (2.12), $\psi = \psi_{f\otimes\eta}$ avec $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$, on a:

$$\Psi_\lambda(x) = \langle j(P, \delta, \lambda, \eta)(x^{-1}), f(e)\rangle \ , \tag{3.2}$$

où $\langle\ ,\rangle$ désigne l'application bilinéaire naturelle de $V_\delta^{-\infty} \times (V_\delta^\infty \otimes V_\tau)$ dans V_τ. Grâce aux propriétés de j, à la décomposition (2.2) et à l'isomorphisme (2.7), il résulte de (3.2), par linéarité, que Ψ_λ est continue sur G/H. On définit alors l'intégrale d'Eisenstein sur G/H par:

$$E(P, \psi, \lambda)(x) = \int_K \tau(k^{-1})\Psi_\lambda(kx)\, dk, \quad x \in G/H,\ \psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)\ , \tag{3.3}$$

ceci pour $\mathrm{Re}(\lambda - \rho_P)$ strictement Σ_P-dominant. Pour $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$, on sait que:

$$E(P, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)(gH) = \langle(\bar{\pi}^P_{\delta,\lambda})'(g)\bar{j}(P, \delta, \lambda, \eta), f\rangle, \quad g \in G\ , \tag{3.4}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne ici l'application bilinéaire naturelle de $C^\infty(K, \delta)' \times (C^\infty(K, \delta) \otimes V_\tau)$ dans V_τ. De plus, si $f = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes v_i$, avec $\varphi_i \in C^\infty(K, \delta)$ et $v_i \in V_\tau$, on a, avec les notations de [13] par. 3.4, Définition 3, et toujours sous les mêmes hypothèses:

$$E(P, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)(x) = \sum_{i=1}^n E(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi_i)(x)v_i, \quad x \in G/H\ . \tag{3.5}$$

Utilisant toujours (2.2), (2.7) et (3.2), il résulte de [11] Théorèmes 2 et 3 (voir aussi [13] par. 3.4) que l'application $\lambda \mapsto E(P, \psi, \lambda)$ se prolonge en une application méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$, à valeurs dans l'espace $C^\infty(G/H, \tau)$. Alors, (3.4) et (3.5) donnent des identités de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*_\mathbb{C}$.

3.2 Soient $\delta \in \hat{M}$, P, $Q \in \mathscr{P}(L)$. On note $\lambda \mapsto A(P,Q,\delta,\lambda)$ le prolongement méromorphe des intégrales d'entrelacement qui envoie $I^Q_{\delta,\lambda}$ dans $I^P_{\delta,\lambda}$ (cf. e.g. [11] Proposition 1, par. 2.2). On note $\bar{A}(P,Q,\delta,\lambda)$ les opérateurs correspondants dans la réalisation compacte. On note $\lambda \mapsto B(Q,P,\delta,\lambda)$ l'application méromorphe de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ dans l'espace des endomorphismes de $\mathscr{V}(\delta)$ telle que l'on ait l'identité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$A'(P,Q,\delta,\lambda)\ j(P,\delta,\lambda,\eta) = j(Q,\delta,\lambda,B(Q,P,\delta,\lambda)\eta), \quad \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ . \tag{3.6}$$

L'existence de B résulte de [11] Proposition 4 et de [13] Théorème 2. Par ailleurs, on sait (cf. [21] Prop. 7.3), qu'il existe une fonction méromorphe sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, non identiquement nulle, à valeurs complexes, $\lambda \mapsto \eta(P,Q,\delta,\lambda)$ telle que:

$$\bar{A}(P,Q,\delta,\lambda)\bar{A}(Q,P,\delta,\lambda) = \eta(P,Q,\delta,\lambda)\ Id_{C^\infty(K,\delta)} \ . \tag{3.7}$$

On a, en outre, l'identité de fonctions méromorphes:

$$\eta(P,Q,\delta,\lambda) = \eta(Q,P,\delta,\lambda) \ . \tag{3.8}$$

Notons $\bar{P}$ le sous-groupe parabolique opposé à P. D'après [23] Théorème 10.5.8, il existe $\varepsilon > 0$, tel que la fonction $\mu_P(\delta,\lambda) := \eta(P,\bar{P},\delta,\lambda)^{-1}$ soit holomorphe sur $\mathfrak{a}^*_\varepsilon := \{\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}} \mid \|Re\ \lambda\| < \varepsilon\}$. De plus, il existe $C > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tels que:

$$|\mu_P(\delta,\lambda)| \leq C(1 + \|\lambda\|)^N, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*_\varepsilon \ . \tag{3.9}$$

Enfin:

$$\mu_P(\delta,\lambda) \geq 0, \quad \lambda \in i\mathfrak{a}^* \ . \tag{3.10}$$

Dans [23] Théorème 10.5.8, le résultat n'est pas vraiment démontré pour les groupes dans la classe de Harish-Chandra. L'ingrédient essentiel est l'équation fonctionnelle pour les intégrales d'entrelacement. Celle-ci est établie dans [11] Théorème 2 (voir aussi [9] par. 4 pour l'interprétation de ces intégrales d'entrelacement comme des vecteurs distributions invariants par la diagonale de $G \times G$). Les résultats de [11] sont établis modulo la propriété de continuité automatique pour G (cf. [11] par. 1.2). Celle-ci est établie pour les groupes dans la classe de Harish-Chandra dans [13] Proposition 1 par. 1.3. Le reste de la démonstration du Théorème 10.5.8 de Wallach s'adapte alors aisément.

On déduit de (3.6)–(3.8) et des propriétés caractéristiques des fonctions j, que l'on a l'identité de fonctions méromorphes:

$$B(P,Q,\delta,\lambda) \circ B(Q,P,\delta,\lambda) = \eta(P,Q,\delta,\lambda)\ Id_{\mathscr{V}(\delta)} \ . \tag{3.11}$$

Il résulte de (3.7) et (3.11) que $A(P,Q,\delta,\lambda)$ et $B(P,Q,\delta,\lambda)$ ont des inverses méromorphes en λ.

Si $Q \in \mathscr{P}(L)$, on a l'identité:

$$A(\bar{P}, P, \delta, \lambda) = A(\bar{P}, Q, \delta, \lambda) A(Q, P, \delta, \lambda) \ , \tag{3.12}$$

et une identité similaire pour B.

On définit les vecteurs distributions H-invariants "normalisés":

$$j^0(P, \delta, \lambda, \eta) := (A(P, \bar{P}, \delta, \lambda)^{-1})' j(\bar{P}, \delta, \lambda, \eta), \quad \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ . \tag{3.13}$$

D'après (3.6) on a aussi:

$$j^0(P, \delta, \lambda, \eta) := j(P, \delta, \lambda, B(\bar{P}, P, \delta, \lambda)^{-1} \eta), \quad \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ . \tag{3.14}$$

En utilisant les identités précédentes, on en déduit les identités de fonctions méromorphes:

$$j^0(P, \delta, \lambda, \eta) := (A(P, Q, \delta, \lambda)^{-1})' j(Q, \delta, \lambda, B(\bar{P}, Q, \delta, \lambda)^{-1} \eta) \ , \qquad \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ . \tag{3.15}$$

On déduit de (3.4) et (3.6) l'identité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$E(Q, \psi_{f \otimes B(Q,P,\delta,\lambda)\eta}, \lambda) = E(P, \psi_{(\bar{A}(P,Q,\delta,\lambda) \otimes Id) f \otimes \eta}, \lambda) \ , \qquad f \in C^\infty(K, \delta), \ \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ . \tag{3.16}$$

En introduisant l'inverse de $\bar{A}$ on a aussitôt:

$$E(P, \psi_{f \otimes \eta}, \lambda) = E(Q, \psi_{(\bar{A}(P,Q,\delta,\lambda)^{-1} \otimes Id) f \otimes B(Q,P,\delta,\lambda)\eta}, \lambda) \qquad f \in C^\infty(K, \delta), \ \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ . \tag{3.17}$$

3.3 Il nous faut rappeler et préciser certaines propriétés établies dans [13]. On note, pour $R \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{a}^*(P, R) := \{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid \mathrm{Re}(\lambda, \alpha) > R, \alpha \in \Sigma_P \}$. On note $\Pi(\Sigma_P)$ l'ensemble des fonctions polynomiales qui sont produits de fonctions affines de la forme $\lambda \mapsto (\alpha, \lambda) - r, \ \alpha \in \Sigma_P, \ r \in \mathbb{C}$.

Lemme 2. *Soit* $R \in \mathbb{R}$. *Il existe un polyn*ôme $b_R \in \Pi(\Sigma_P)$ *vérifiant*:

(i) *L'application* $\lambda \mapsto b_R(\lambda) j(P, \delta, \lambda, \eta)$ *est holomorphe sur* $\mathfrak{a}^*(P, R)$ pour $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$.

(ii) *Si* $R < 0$ *et* $\varepsilon > 0$ *sont tels que* $\mathfrak{a}_\varepsilon^*$ *est contenu dans* $\mathfrak{a}^*(P, R)$, *il existe, pour tout* $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$, *une semi-norme* $p_{R,\eta}$, *continue sur* $C^\infty(K, \delta)$ *et un entier* N *tel que*:

$$|\langle b_R(\lambda) \bar{j}(P, \delta, \lambda, \eta), \varphi \rangle| \leq (1 + \|\lambda\|)^N p_{R,\eta}(\varphi), \ \ \lambda \in \mathfrak{a}_\varepsilon^*, \quad \varphi \in C^\infty(K, \delta) \ .$$

Démonstration. On sait que la variété polaire de $\lambda \mapsto j(P, \delta, \lambda, \eta)$ est contenue dans une famille localement finie d'hyperplans dont les équations sont dans $\Pi(\Sigma_P)$ (cf. [11] Prop. 7). Comme cette application est holomorphe sur

$\mathfrak{a}^*(P, R')$ pour R' positif et assez grand, seulement un nombre fini de ces hyperplans rencontre $\mathfrak{a}^*(P, R)$. On obtient alors b_R satisfaisant (i) par application du Lemme 3 (i) de [13] et grâce au Lemme 12 de l'appendice (par. 10). La majoration de (ii) résulte immédiatement des Lemmes 3 et 22 de [13]. $\square$

Nous pouvons appliquer ce Lemme aux intégrales d'entrelacement (cf. [9] par. 4). On en déduit:

Lemme 3. *Soient $P \in \mathscr{P}(L)$, $\delta \in \hat{M}$ et $R \in \mathbb{R}$. Il existe dans $\Pi(\Sigma_P)$ un polynôme a_R vérifiant*:

(i) *On utilise le crochet naturel de dualité entre $C^\infty(K, \delta)$ et $C^\infty(K, \delta')$. Pour tout $\varphi \in C^\infty(K, \delta)$ et tout $\varphi' \in C^\infty(K, \delta')$, l'application $\lambda \mapsto a_R(\lambda)$ $\langle \bar{A}(\bar{P}, P, \delta, \lambda)\varphi, \varphi' \rangle$ est holomorphe sur $\mathfrak{a}^*(P, R)$.*

(ii) *Soient $R < 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\mathfrak{a}^*_\varepsilon$ soit contenu dans $\mathfrak{a}^*(P, R)$. Il existe un entier N, une semi-norme continue q_R (resp. q'_R), continue sur $C^\infty(K, \delta)$ (resp. $C^\infty(K, \delta')$) tels que*:

$$|\langle a_R(\lambda)\bar{A}(\bar{P}, P, \delta, \lambda)\varphi, \varphi' \rangle| \leq (1 + \|\lambda\|)^N \, q_R(\varphi) \, q'_R(\varphi'),$$

$$\lambda \in \mathfrak{a}^*_\varepsilon, \quad \varphi \in C^\infty(K, \delta), \quad \varphi' \in C^\infty(K, \delta') \ .$$

3.4 Si S est une partie de G et x un élément de G, on note $S^x = xSx^{-1}$. Si $v \in \mathscr{W}$, on a $L^v \in \mathscr{L}$ et $M^v A^v$ est sa σ-décomposition de Langlands. L'ensemble $\mathscr{W} v^{-1}$ est un ensemble de représentants, contenant l'élément neutre de G, des $(W_\emptyset^H, W_\emptyset^{M^v})$-doubles classes de $W_\emptyset$. Si $(\delta, V_\delta) \in \hat{M}$. On notera (δ^v, V_δ) l'élément de $\hat{M}^v$ défini par:

$$\delta^v(m) := \delta(v^{-1} m v), \quad m \in M^v \ .$$

Alors, pour $w \in \mathscr{W}$, $\mathscr{V}(\delta, w)$ et $\mathscr{V}(\delta^v, wv^{-1})$ sont deux copies de $(V_\delta^{-\infty})^{M \cap w^{-1}Hw}_{\mathrm{disc}}$. On note $R(v, \delta)$ l'isomorphisme entre $\mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}}$ et $\mathscr{V}(\delta^v)_{\mathscr{W}v^{-1}}$ qui se réduit à l'identité sur ces composantes. Si $P \in \mathscr{P}(L)$, on a $P^v \in \mathscr{P}(L^v)$. Pour λ élément de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$,* on note $v\lambda$ l'élément de $(\mathfrak{a}^v)^*_{\mathbb{C}}$ défini par:

$$v\lambda := \lambda \circ Ad \ v^{-1}_{|\mathfrak{a}^v} \ .$$

Soit L (resp. R) la représentation régulière gauche (resp. droite) de G sur les fonctions ou distributions (éventuellement à valeurs vectorielles) sur G. On indique à nouveau les indices $\mathscr{W}$ ou $\mathscr{W} v^{-1}$ lorsque les objets en dépendent. On a l'égalité de fonctions méromorphes sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$j_{\mathscr{W}v^{-1}}(P^v, \delta^v, v\lambda, R(\delta, v)\eta) = R(v) j_{\mathscr{W}}(P, \delta, \lambda, \eta), \quad \eta \in \mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}} \ . \tag{3.18}$$

On définit aussi une application $\tilde{R}(v)$ de $\mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}}$ dans $\mathscr{A}_2(M^v, \tau)_{\mathscr{W}v^{-1}}$ telle que, pour $\psi = (\psi_w)_{w \in \mathscr{W}} \in \mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}}$, on ait:

$$(\tilde{R}(v)\psi)_{wv^{-1}}(m) = \tau(v)\psi_w(v^{-1} m v), \quad w \in \mathscr{W}, \ m \in M^v \ . \tag{3.19}$$

C'est un opérateur unitaire. En outre, pour $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}}$, on a:

$$\tilde{R}(v)\psi^{\mathscr{W}}_{f\otimes\eta} = \psi^{\mathscr{W}v^{-1}}_{R(v)f\otimes R(\delta,v)\eta} \ . \tag{3.20}$$

Enfin, pour $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)_{\mathscr{W}}$, on a l'identité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$E(P^v, \tilde{R}(v)\psi, v\lambda)_{\mathscr{W}v^{-1}} = E(P, \psi, \lambda)_{\mathscr{W}} \ . \tag{3.21}$$

Ces relations permettent, quitte à changer de L et de sous-groupe parabolique, à ramener la démonstration de certaines propriétés dépendant de v au cas où $v = 1$. On peut, par exemple, reformuler le Lemme 16 de [13] comme suit:

Soient $x \in G$, $P \in \mathscr{P}(L)$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ (resp. $X \in \mathfrak{a}$) avec $\mathrm{Re}(\lambda - \rho_P)$ (resp. $-X$) strictement Δ_P-dominant, et $v \in \mathscr{W}$. Pour $\eta \in \mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}}$ et $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$, on a:

$$\lim_{t\to+\infty} e^{t(\lambda-\rho_P)(X)} E(P, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)(x\exp(tX)v^{-1}) = \langle \eta_v, (A(\bar{P}, P, \delta, \lambda) \otimes Id_{V_\tau})f)(x)\rangle,$$

où $\bar{P} := \theta(P)$ est le sous-groupe parabolique opposé à P . (3.22)

3.5 On note $W(\mathfrak{a})$ le groupe des automorphismes de $\mathfrak{a}$ induits par un élément de G (cf. [14] Lemme 2). On se donne un élément s de $W(\mathfrak{a})$. On choisit un représentant $\bar{s}$ de s dans $W_\emptyset$. Pour $w \in W_\emptyset$, la $(W^H_\emptyset, W^M_\emptyset)$-double classe contenant $w\bar{s}^{-1}$ ne dépend que de s et de la $(W^H_\emptyset, W^M_\emptyset)$-double classe de w s et de. On la note $w \cdot s^{-1}$. L'identification naturelle de $\mathscr{W}$ à $W^H_\emptyset \backslash W_\emptyset / W^M_\emptyset$ permet d'en déduire une permutation de $\mathscr{W}$ notée encore $w \mapsto w \cdot s^{-1}$. Soit $\tilde{s}$ un représentant de s dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$. Il existe alors des éléments $w_H(w, \tilde{s})$ et $w_M(w, \tilde{s})$ dans $N_{K\cap H}(\mathfrak{a}_\emptyset)$ et $N_{K\cap M}(\mathfrak{a}_\emptyset)$ respectivement, tels que:

$$w \cdot s^{-1} = w_H(w, \tilde{s}) w \tilde{s}^{-1} w_M(w, \tilde{s}) \ . \tag{3.23}$$

Comme $\tilde{s}$ normalise $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_\emptyset$, il normalise M. On définit une représentation $\delta^{\tilde{s}}$ de M dans V_δ par:

$$\delta^{\tilde{s}}(m) := \delta(\tilde{s}^{-1} m \tilde{s}), \quad m \in M \ .$$

Pour $w \in \mathscr{W}$, l'application $\delta'(\tilde{s}^{-1} w_M(w, \tilde{s})^{-1} \tilde{s})$ induit un isomorphisme entre $\mathscr{V}(\delta, w)$ et $\mathscr{V}(\delta^{\tilde{s}}, w \cdot s^{-1})$. On note $\bar{R}(\delta, \tilde{s})$ l'isomorphisme entre $\mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}}$ et $\mathscr{V}(\delta^{\tilde{s}})_{\mathscr{W}}$ qui induit cet isomorphisme sur chacune des composantes $\mathscr{V}(\delta, w)$ de $\mathscr{V}(\delta)$. On a alors l'égalité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$R(\tilde{s})\, j(P, \delta, \lambda, \eta) = j(P^s, \delta^{\tilde{s}}, s\lambda, \bar{R}(\delta, \tilde{s})\eta), \quad \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ . \tag{3.24}$$

Ici P^s désigne le groupe $\tilde{s}P\tilde{s}^{-1}$, qui ne dépend que de s, et $s\lambda$ désigne $\lambda \circ s^{-1}$.

On définit un opérateur $\bar{R}(\tilde{s})$ de $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ dans lui-même comme suit. Si $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$ et $w \in \mathscr{W}$, on pose:

$$(\bar{R}(\tilde{s})\psi)_{w \cdot s^{-1}}(m) = \tau(\tilde{s})\psi_w(\tilde{s}^{-1}mw_M(w,\tilde{s})^{-1}\tilde{s}) \ . \tag{3.25}$$

On vérifie facilement que $\bar{R}(\tilde{s})$ ne dépend que de s. On le note désormais $\bar{R}(s)$. On a:

$$\bar{R}(s)\psi_{f\otimes\eta} = \psi_{R(\tilde{s})f\otimes\bar{R}(\delta,\tilde{s})\eta}, \quad \delta \in \hat{M}, \ f \in C^\infty(K,\delta,\tau), \ \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ . \tag{3.26}$$

Dans le membre de droite, on a $R(\tilde{s})f \in C^\infty(K,\delta^{\tilde{s}},\tau)$. Par ailleurs il résulte facilement de (3.25) que:

$$\bar{R}(s) \ \textit{est unitaire.} \tag{3.27}$$

Montrons l'égalité de fonctions méromorphes en λ:

$$E(P^s,\bar{R}(s)\psi,s\lambda) = E(P,\psi,\lambda), \quad \psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau) \ . \tag{3.28}$$

Par linéarité, on se ramène au cas où ψ est de la forme $\psi_{f\otimes\eta}$ avec $f \in C^\infty(K,\delta,\tau)$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$. Dans ce cas, l'identité résulte de (3.4), (3.24) et (3.26).

3.6 Proposition 1. *Soit $P \in \mathscr{P}(L)$. Il existe un polynôme $b \in \Pi(\Sigma_P)$ tel que, pour tout $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, l'application $\lambda \mapsto b(\lambda)E(P,\psi,-\lambda)$ soit un élément de $\widetilde{II}'_{\mathrm{hol}}(G,L,\tau)$ (voir* [14], *fin du paragraphe 7 pour la définition de cet espace).*

Démonstration. On identifie $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)$ à un sous-espace de $\mathscr{A}_2(M,\tau) := \Pi_{w\in\mathscr{W}}\ \mathscr{A}_2(L/L\cap w^{-1}Hw,\tau_M)$. Comme $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ est de dimension finie, on se réduit à démontrer la proposition lorsque ψ appartient à $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)$ grâce à (3.21), puis lorsque ψ appartient à $\mathscr{A}_2(M/M\cap H,\tau_M)^\delta$ pour $\delta \in \hat{M}$, grâce à (2.2). Enfin on se ramène au cas où ψ est de la forme $\psi_{f\otimes\eta}$, avec $\eta \in (V_\delta^{-\infty})_{\mathrm{disc}}^{M\cap H}$, $f \in C^\infty(K,\delta,\tau)$ (voir (2.6)). On remarque que si $R>0$, $\mathfrak{a}^*(P,R)$ contient $\mathfrak{a}^*_\varepsilon$ si $\varepsilon > 0$ est assez petit. On conclut alors grâce à (3.5), au Théorème 4 de [13] et à la Proposition 2 de [4]. □

3.7 Pour tout $v \in \mathscr{W}$, les résultats établis pour (G,H,σ,θ) s'appliquent à $(G,v^{-1}Hv,\sigma_v,\theta)$ (cf. par. 2.3). On notera les objets correspondants avec un indice supérieur $v^{-1}Hv$. Alors $v^{-1}\mathscr{W}$ est un ensemble de représentants dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ des $(W_\emptyset^{v^{-1}Hv},W_\emptyset^M)$-doubles classes de $W_\emptyset$ contenant l'élément neutre de G. Pour $(\delta,V_\delta) \in \hat{M}$, et tout $w \in \mathscr{W}$, $\mathscr{V}(\delta,w)$ et $\mathscr{V}^{v^{-1}Hv}(\delta,v^{-1}w)$ sont deux copies de $(V_\delta^{-\infty})_{\mathrm{disc}}^{M\cap w^{-1}Hw}$. Soit $L(\delta,v)$ l'isomorphisme unitaire entre $\mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}}$ et $\mathscr{V}(\delta)_{v^{-1}\mathscr{W}}^{v^{-1}Hv}$ qui induit l'identité sur ces composantes. On rappelle que L désigne la représentation régulière gauche de G. On a alors l'identité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$L(v^{-1})j^H_{\mathscr{W}}(P,\delta,\lambda,\eta) = j^{v^{-1}Hv}_{v^{-1}\mathscr{W}}(P,\delta,\lambda,L(\delta,v)\eta), \quad \eta \in \mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}} \ . \tag{3.29}$$

Ceci est obtenu par transport de structure.

Soit $\tilde{L}(v)$ l'isomorphisme unitaire entre $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ et $\mathscr{A}_2^{v^{-1}Hv}(M,\tau)$ caractérisé par:

$$\tilde{L}(v)\psi_{f\otimes\eta} = \psi^{v^{-1}Hv}_{f\otimes L(\delta,v)\eta}, \quad \delta \in \hat{M}, \ f \in C^\infty(K,\delta,\tau), \ \eta \in \mathscr{V}(\delta)_{\mathscr{W}} \ . \tag{3.30}$$

On a l'égalité de fonctions méromorphes en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$R(v^{-1})E^H_{\mathscr{W}}(P,\psi,\lambda) = E^{v^{-1}Hv}_{v^{-1}\mathscr{W}}(P,\tilde{L}(v)\psi,\lambda), \ \psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)_{\mathscr{W}} \ . \tag{3.31}$$

Ces remarques permettent de ramener la démonstration de certains résultats dépendant de v au cas $v=1$, quitte à changer d'involution σ.

4 Fonctions C

4.1 On conserve les notations des paragraphes précédents. On note $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G/H,\tau)$ l'espace des fonctions τ-sphériques, tempérées et $\mathbb{D}(G/H)$-finies (cf. e.g. [14], par. 5). Si Φ est une fonction tempérée $\mathbb{D}(G/H)$-finie et $P \in \mathscr{P}(L)$, on définit son terme constant généralisé $\tilde{\Phi}_P$ (ou $(\tilde{\Phi}_P)_{\mathscr{W}}$ si l'on veut garder la trace de la dépendance par rapport à $\mathscr{W}$) le long de P. C'est un élément de $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(L,\tau) := \prod_{w\in\mathscr{W}} \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(L/L\cap w^{-1}Hw,\tau_L)$.

On peut regarder cet espace comme un espace de fonctions sur L à valeurs dans le produit cartésien $V_\tau^{\mathscr{W}}$. Alors $\tilde{\Phi}_P$ est caractérisé par:

$$(\tilde{\Phi}_P)_w(l) = \tau(w^{-1})\Phi_{P^w}(wlw^{-1}), \quad w \in \mathscr{W}, \ l \in L \ , \tag{4.1}$$

où Φ_{P^w} est le terme constant ordinaire de Φ le long de P^w (cf. [10]).

Etablissons quelques propriétés du terme constant généralisé. Pour $v \in \mathscr{W}$, on définit un opérateur linéaire bijectif $\tilde{R}(v)$ entre $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(L,\tau)_{\mathscr{W}}$ et $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(L^v,\tau)_{\mathscr{W}v^{-1}}$ par une formule identique à (3.19). Alors, revenant aux définitions (en particulier celle du terme constant [10]), on montre que, pour toute fonction Φ comme ci-dessus, on a:

$$\tilde{R}(v)(\tilde{\Phi}_P)_{\mathscr{W}} = (\tilde{\Phi}_{P^v})_{\mathscr{W}v^{-1}} \ . \tag{4.2}$$

Pour $s \in W(\mathfrak{a})$ et $\tilde{s}$ un représentant de s dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$, on peut, en utilisant des relations identiques à (3.25), définir une extension de $\bar{R}(s)$ à $\mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(L,\tau)$, notée encore $\bar{R}(s)$. On obtient comme ci-dessus:

$$\bar{R}(s)(\tilde{\Phi}_P)_{\mathscr{W}} = (\tilde{\Phi}_{P^s})_{\mathscr{W}} \ . \tag{4.3}$$

Théorème 1. *Soient L, M, A, $\mathscr{W}$ comme ci-dessus. Soient P, $Q \in \mathscr{P}(L)$. Il existe, pour tout $s \in W(\mathfrak{a})$, une fonction $\lambda \mapsto C_{Q|P}(s,\lambda)$, méromorphe en $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$,* *à valeurs dans l'espace des endomorphismes de* $\mathscr{A}_2(M,\tau)_{\mathscr{W}}$, *telle que,* pour tout λ *élément d'un ouvert dense de* $i\mathfrak{a}^*$ *on ait*:

$$\tilde{E}(P,\psi,\lambda)_{Q,\mathscr{W}}(ma) = \sum_{s\in W(\mathfrak{a})} (C_{Q|P}(s,\lambda)\psi)(m)a^{-s\lambda}$$

pour $m \in M$, $a \in A$, $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)_{\mathscr{W}}$. *De plus, si b est comme dans la Proposition* 1, *les fonctions* $\lambda \mapsto b(\lambda)C_{Q|P}(s,\lambda)$ *sont holomorphes dans un voisinage de* $i\mathfrak{a}^*$.

Démonstration. Avec les notations de la Proposition 1, on pose $F(\lambda) = b(\lambda)E(P,\psi,-\lambda)$. Alors, F est élément de $\widetilde{\Pi}'_{\mathrm{hol}}(G,M,\tau)$. Si $w \in \mathscr{W}$, on a $w^{-1} \in W(\mathfrak{a}^w,\mathfrak{a})$ et $W(\mathfrak{a}^w,\mathfrak{a}) = \{sw^{-1} \mid s \in W(\mathfrak{a})\}$. On définit $C_{Q|P}(s,\lambda)\psi \in \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(M,\tau)$ comme fonction sur M à valeurs dans $V_\tau^{\mathscr{W}}$ par (avec les notations de [14] (7.28)):

$$(C_{Q|P}(s,\lambda)\psi)_w(m) = b(-\lambda)^{-1}(F_{Q^w,sw^{-1}}(-\lambda))(wmw^{-1}), \quad m \in M \;.$$

Alors, d'après la Proposition 1 et grâce à [14] Lemme 6 et fin du par. 7, on a $C_{Q|P}(s,\lambda)\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$ (lorsque il est défini). De plus, $C_{Q|P}(s,\lambda)$ a les propriétés voulues. A noter toutefois que, pour montrer la méromorphie sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, on est amené à changer de polynôme b (c'est à dire de R et de ε dans la démonstration de la Proposition 1) et de F. Mais il y a unicité de la décomposition du Théorème pour λ dans un ouvert dense de $i\mathfrak{a}^*$ (d'après l'indépendance linéaire des caractères de A) . Ceci permet de conclure. □

4.2 Le résultat suivant généralise la Proposition 1 de [5].

Proposition 2. *Soient* $\delta \in \hat{M}$ *et* $P,\ Q \in \mathscr{P}(L)$.

(i) *On a l'égalité suivante de fonctions méromorphes en* $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

$$C_{Q|P}(1,\lambda)\psi_{f\otimes\eta} = \psi_{(\bar{A}(Q,P,\delta,\lambda)\otimes Id_{V_\tau})f\otimes B(\bar{Q},P,\delta,\lambda)\eta}, \quad f \in C^\infty(K,\delta,\tau),\ \eta \in \mathscr{V}(\delta) \;.$$

(ii) *L'endomorphisme* $C_{Q|P}(1,\lambda)$ *de* $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ *admet un inverse méromorphe en* $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$.

Démonstration. La démonstration de (i) est similaire à celle de la Proposition 1 de l.c.. On la rappelle brièvement. On traite d'abord le cas où $P = \bar{Q}$. On interprète, pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, les composantes des fonctions C appliquées à ψ comme des coefficients de développements asymptotiques des intégrales d'Eisenstein. Ces coefficients ont des propriétés d'holomorphie rappelées en [13] par. 2.2. Jointes à la méromorphie des fonctions C, celles-ci permettent de comparer les fonctions C et ces coefficients des développements asymptotiques sur un ouvert de $\mathscr{O}$ de $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, dont toute composante connexe rencontre $i\mathfrak{a}^*$ et qui rencontre $\mathfrak{a}^*(P,R)$ pour tout $R > 0$ (cf. [13] démonstration du Lemme 2.3). Mais (3.22) permet de calculer certains de ces coefficients pour $\lambda \in \mathfrak{a}^*(P, R)$ avec R assez grand. Cela conduit à la Proposition pour $P = \bar{Q}$. Par ailleurs (3.17) permet de comparer les intégrales d'Eisenstein pour P et $\bar{Q}$. Grâce à l'unicité des développements asymptotiques, cela permet de comparer $C_{Q|\bar{Q}}$ et $C_{Q|P}$. Alors (i) en résulte, en utilisant les propriétés des intégrales d'entrelacement et des matrices B (cf. (3.7), (3.11) et (3.12)).

Enfin (ii) résulte de (i) et des propriétés de $\bar{A}$ et B (voir après (3.11)). □

Proposition 3. *Soient* $s,\ t \in W(\mathfrak{a})$ *et* $P,\ Q \in \mathscr{L}(M)$. Soit $\tilde{s}$ *un représentant de* s *dans* $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$. *Alors on a*:

(i) $C_{Q|P}(t, \lambda) = \bar{R}(s) \circ C_{Q^{s^{-1}}|P}(s^{-1}t, \lambda)$.

(ii) $C_{Q|P^s}(ts^{-1}, s\lambda) \circ \bar{R}(s) = C_{Q|P}(t, \lambda)$.

Démonstration. (i) résulte immédiatement de (4.3) et de la définition des fonctions C. (ii) résulte de (3.28) et de la définition des fonctions C. □

5 Intégrales d'Eisenstein normalisées

5.1 Pour $P \in \mathscr{P}(L)$, $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$, on définit sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ une fonction $\lambda \mapsto E^0(P, \psi, \lambda)$, à valeurs dans $C^\infty(G/H, V_\tau)$, par:

$$E^0(P, \psi, \lambda) := E(P, C_{P|P}(1, \lambda)^{-1}\psi, \lambda) \ . \tag{5.1}$$

La méromorphie est assurée par le Théorème 1, la Proposition 2 (ii) et la méromorphie des intégrales d'Eisenstein. On définit également:

$$C^0_{Q|P}(s, \lambda) := C_{Q|P}(s, \lambda) \circ C_{P|P}(1, \lambda)^{-1}, \quad s \in W(\mathfrak{a}) \ . \tag{5.2}$$

On déduit du Théorème 1 que, pour λ élément d'un ouvert dense de $i\mathfrak{a}^*$, on a:

$$\tilde{E}^0(P, \psi, \lambda)_{Q,\mathscr{W}}(ma) = \sum_{s \in W(\mathfrak{a})} (C^0_{Q|P}(s, \lambda)\psi)(m)a^{-s\lambda},\ m \in M,$$
$$a \in A,\ \psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau) \ . \tag{5.3}$$

Les deux propositions suivantes rassemblent un certain nombre de propriétés de E^0 et C^0.

Proposition 4. *Soient* $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$, $P,\ Q \in \mathscr{P}(L)$ *et* $s \in W(\mathfrak{a})$. *On a les identités suivantes de fonctions méromorphes en* $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

(i) *Si* $\delta \in \hat{M}$, $f \in C^\infty(K, \delta, \tau)$, $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$ et $g \in G$:
$E^0(P, \psi_{f\otimes\eta}, \lambda)(gH) = \langle (\bar{\pi}^P_{\delta,\lambda}(g))' j^0(P, \delta, \lambda, \eta), f \rangle$.

(ii) *Si* $\psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau)$:
$$E^0(P, \psi, \lambda) = E(Q, C_{P|Q}(1, \lambda)^{-1}\psi, \lambda)$$

(iii) $C^0_{Q|P}(s, \lambda) = C_{Q|P'}(s, \lambda) C_{P|P'}(1, \lambda)^{-1}$.

(iv) *Avec les notations de* (i):

$$C^0_{Q|P}(1,\lambda)\psi_{f\otimes\eta} = \psi_{(A(Q,P,\delta,\lambda)\otimes Id_{V_\tau})f\otimes B(\bar{P},\bar{Q},\delta,\lambda)^{-1}\eta}.$$

(v) $E^0(P,\psi,\lambda) = E^0(Q, C^0_{P|Q}(1,\lambda)^{-1}\psi,\lambda)$.

Démonstration. Prouvons (i) et (ii). Dans (ii), on se ramène au cas où ψ est de la forme $\psi_{f\otimes\eta}$. Les membres de droite de (i) et (ii) sont alors égaux, grâce à (3.4), (3.15) joints à la Proposition 2 (i). Prenant $Q = P$ on en déduit (i) et (ii). (iii) se déduit du Théorème 1, de (5.3) et de (ii), après remplacement de Q par P', en utilisant l'unicité de la décomposition du terme constant généralisé le long de Q. Alors (iv) résulte de la Proposition 2 et de la définition de C^0, en utilisant (3.12) et son analogue pour B. On obtient un analogue de (3.6) pour j grâce à (3.15), en utilisant (3.12) et son analogue pour B:

$$A'(P,Q,\delta,\lambda)\ j^0(P,\delta,\lambda,\eta) = j^0(Q,\delta,\lambda,B(\bar{Q},\bar{P},\delta,\lambda)\eta)\ . \tag{5.4}$$

Alors, de (i) et (iv), on déduit (v) pour ψ de la forme $\psi_{f\otimes\eta}$. D'où (v) par linéarité. □

Proposition 5. *Avec les notations de la Proposition précédente, et* $s,\ t \in W(\mathfrak{a})$, $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, *on a les égalités de fonctions méromorphes en* $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$:

(i) $E^0(P^s, \bar{R}(s)\psi, s\lambda) = E^0(P,\psi,\lambda)$.
(ii) $C^0_{Q|P}(t,\lambda) = \bar{R}(s)\circ C^0_{Q^{s^{-1}}|P}(s^{-1}t,\lambda)$.
(iii) $C^0_{Q|P^s}(ts^{-1},\lambda)\circ\bar{R}(s) = C^0_{Q|P}(t,\lambda)$.
(iv) (*Equation fonctionnelle*)

$$E^0(Q, C^0_{Q|P}(s,\lambda)\psi, s\lambda) = E^0(P,\psi,\lambda).$$

(v) $C^0_{P'|Q}(t,s\lambda)\circ C^0_{Q|P}(s,\lambda) = C^0_{P'|P}(ts,\lambda)$.
(vi) $C^0_{Q|P}(s^{-1},s\lambda)\circ C^0_{P|Q}(s,\lambda) = Id$.

Démonstration. L'analogue de (3.24) est vrai pour j^0, comme on le vérifie facilement. On en déduit l'analogue de (3.28) pour E^0 grâce à la Proposition 4 (i). C'est (i).

Alors on démontre (ii) et (iii) comme leurs analogues pour E (cf. Proposition 3).

Combinant (i), (ii) avec la Proposition 4 (iii) et (v), on est conduit à l'équation fonctionnelle (iv).

Le point (v) est une conséquence immédiate de l'équation fonctionnnelle et de l'unicité de la décomposition du terme constant généralisé le long de P'. Enfin (vi) résulte de (v) et du fait que, par définition, $C^0_{P|P}(1,\lambda) = Id$. □

5.2 Lemme 4. (i) *Soient* $\delta \in \hat{M}$ et $P \in \mathscr{P}(L)$. *Il existe* $p \in \Pi(\Sigma_P)$ *et* $\varepsilon > 0$ *tels que, pour tout* $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$, *l'application* $\lambda \mapsto p(\lambda)j^0(P,\delta,\lambda,\eta)$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\mathfrak{a}^*_\varepsilon$.

(ii) *Il existe un polynôme* $p_\tau \in \Pi(\Sigma_P)$ *tel que, pour tout* $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, *la fonction* $\lambda \mapsto p_\tau(\lambda)E^0(P,\psi,-\lambda)$ *appartienne à* $\widetilde{II}'_{\mathrm{hol}}(G,L,\tau)$.

Démonstration. (i) D'après (3.7), on a:

$$A(P,\bar{P},\delta,\lambda)^{-1} = \mu_P(\delta,\lambda)A(\bar{P},P,\delta,\lambda) \ . \tag{5.5}$$

On choisit $R \leq 0$ et $\varepsilon > 0$ de telle sorte que $\mathfrak{a}^*_\varepsilon \subseteq \mathfrak{a}^*(P,R)$. On fixe le polynôme a_R comme dans le Lemme 3 (resp. b_R comme dans le Lemme 2). Alors, compte tenu de (3.13), on voit que si ε a été choisi assez petit pour que $\mu_P(\delta,\lambda)$ soit holomorphe sur $\mathfrak{a}^*_\varepsilon$, le polynôme $p = a_R b_R$ convient.
Pour (ii), on se ramène, par le procédé déjà utilisé dans la preuve de la Proposition 1, à démontrer (ii) losque ψ est égal à $\psi_{f\otimes\eta}$, avec $f \in C^\infty(K,\delta,\tau)$, $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$ et $\delta \in \hat{M}$. D'après la Proposition 4 (ii) (avec $Q = \bar{P}$) et la Proposition 2 (i) (avec Q changé en P et P en $\bar{P}$), on a:

$$E^0(P,\psi_{f\otimes\eta},\lambda) = E(\bar{P},\psi_{(\bar{A}(P,\bar{P},\delta,\lambda)^{-1}\otimes Id_{V_\tau})f\otimes\eta},\lambda) \ .$$

En effet, $B(P,P,\delta,\lambda)$ est égal à l'identité. On choisit $R < 0$ et $\varepsilon > 0$ comme en (i), en supposant en outre que ε est assez petit pour satisfaire (3.9). On choisit a_R comme dans le Lemme 3 et $b \in \Pi(\Sigma_{\bar{P}})$ comme dans la Proposition 1 (avec P changé en $\bar{P}$). On remarque que, au signe près, on a $b \in \Pi(\Sigma_P)$. On utilise l'expression de $A(P,\bar{P},\delta,\lambda)^{-1}$ (avec P changé en $\bar{P}$) obtenue en (5.5), On écrit $a_R(\lambda)(A(P,\bar{P},\delta,\lambda)^{-1} \otimes Id_{V_\tau})f$ dans une base orthonormée de $C^\infty(K,\delta,\tau)$. D'après les propriétés de a_R et de $\mu_P(\delta,\lambda)$, les coordonnées sont holomorphes en λ. De plus, elles sont majorées sur $\mathfrak{a}^*_\varepsilon$ par une fonction du type $C(1+\|\lambda\|)^N$, d'après (3.9) et le Lemme 3 (ii). On voit alors que $p_\tau = ba_R$ convient grâce à la Proposition 1. □

6 Relations de Maass Selberg et fonctions C

6.1 Théorème 2. (i) *Pour tout* $P,\ Q,\ Q' \in \mathscr{P}(L),\ s,\ t \in W(\mathfrak{a}),\ \psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, *on a*:

$$\|C_{Q|P}(s,\lambda)\psi\|^2 = \|C_{Q'|P}(t,\lambda)\psi\|^2 \ ,$$

pour les valeurs de $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ *telles que les deux nombres soient définis.*

(ii) *Pour* $P,\ Q \in \mathscr{P}(L),\ s \in W(\mathfrak{a})$ *et les valeurs de* $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ *pour lesquelles il est défini, l'opérateur* $C^0_{Q|P}(s,\lambda)$ *est unitaire.*

(iii) *On a l'égalité de fonctions méromorphes en* $\bar{\lambda} \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ (*où* $\bar{\lambda}$ *est le conjugué de* $\lambda \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ *par rapport à* $\mathfrak{a}^*$):

$$C^0_{Q|P}(s,\lambda)^* = C^0_{P|Q}(s^{-1},-s\bar{\lambda}) \ ,$$

pour $P,\ Q \in \mathscr{P}(L),\ s \in W(\mathfrak{a})$.

(iv) *On a, pour* $P,\ Q \in \mathscr{P}(L)$ *et* $\delta \in \hat{M}$, *l'égalité de fonctions méromorphes en* $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$:

$$B(P, Q, \delta, \lambda)^* = B(Q, P, \delta, -\bar{\lambda}) \enspace .$$

On commence par démontrer un Lemme.

Lemme 5. *Les propriétés* (i) *à* (iv) *du théorème sont des propriétés équivalentes.*

Démonstration. Montrons que (i) implique (ii). Soit λ comme en (ii). L'espace $\mathscr{A}_2(M, \tau)$ étant de dimension finie, il suffit de voir que:

$$\|C^0_{Q|P}(s, \lambda)\psi\|^2 = \|\psi\|^2 \enspace . \tag{6.1}$$

Mais:

$$C^0_{Q|P}(s, \lambda) = C_{Q|P}(s, \lambda) C_{P|P}(1, \lambda)^{-1} \enspace .$$

Utilisant (i) avec $t = 1$ et $Q' = P$, on obtient le résultat voulu.

Montrons que (ii) implique (i). On écrit cette fois (6.1) avec P remplacé par Q' et ψ égal à $C_{Q'|P}(1, \lambda)\psi$. Tenant compte de la Proposition 4 (iii), on en déduit:

$$\|C_{Q|P}(s, \lambda)\psi\|^2 = \|C_{Q'|P}(1, \lambda)\psi\|^2 \enspace ,$$

ce qui montre que le premier membre ne dépend ni de s ni de Q. D'où le résultat voulu.

Montrons que (ii) est équivalent à (iii). Si (ii) est vrai, l'identité de (iii) est vraie sur un ouvert dense de $i\mathfrak{a}^*$ d'après la Proposition 5 (vi). D'où (iii) par prolongement méromorphe. La réciproque résulte également de la Proposition 5 (vi).

Montrons que (iii) est équivalent à (iv). On va montrer d'abord que (iv) est équivalent à (iii) lorsque $s = 1$. En effet $C^0_{Q|P}(1, \lambda)^* = C^0_{P|Q}(1, -\bar{\lambda})$ équivaut à:

$$(C^0_{Q|P}(1, \lambda)\psi_{f\otimes\eta}, \psi_{g\otimes\xi}) = (\psi_{f\otimes\eta}, C^0_{P|Q}(1, -\bar{\lambda})\psi_{g\otimes\xi}) \enspace , \tag{6.2}$$

ceci pour tout $\delta \in \hat{M},\ f,\ g \in C^\infty(K, \delta, \tau),\ \eta,\ \xi \in \mathscr{V}(\delta)$. En effet, il est clair que les fonctions C^0 considérées conservent la décomposition orthogonale (2.2), d'après la Proposition 4 (iv). En outre cette dernière montre que (6.2) équivaut à:

$$\begin{aligned}(A(Q, P, \delta, \lambda)f, g)\ (B(\bar{P}, \bar{Q}, \delta, \lambda)^{-1}\eta, \xi) \\ = (f, A(P, Q, \delta, -\bar{\lambda})g)\ (\eta, B(\bar{Q}, \bar{P}, \delta, -\bar{\lambda})^{-1}\xi).\end{aligned}$$

On a l'identité de fonctions méromorphes en $\bar{\lambda}$ (voir ([21] Prop. 7.1):

$$A(Q,P,\delta,\lambda)^* = A(P,Q,\delta,-\bar{\lambda}) \ .$$

La relation (6.2) équivaut donc à:

$$(B(\bar{P},\bar{Q},\delta,\lambda)^{-1}\eta,\xi) = (\eta, B(\bar{Q},\bar{P},\delta,-\bar{\lambda})^{-1}\xi) \ ,$$

pour tout $\eta,\ \xi \in \mathscr{V}(\delta)$. D'où l'équivalence de (iii) dans le cas $s=1$ avec (iv). Mais (iii) dans le cas $s=1$ équivaut à (iii) avec s quelconque d'après la Proposition 5 (ii), car $\bar{R}(s)$ est unitaire. Ceci achève de prouver le Lemme. □

Lemme 6. *Le Théorème est vrai si dim* $\mathfrak{a}^G = 1$.

Démonstration. On utilise les notations de la Proposition 1. On va appliquer le Théorème 2 de [14] à l'élément $\lambda \mapsto b(\lambda)E(P,\psi,-\lambda)$ de $\widetilde{\Pi}'_{\mathrm{hol}}(G,M,\tau)$ (où $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$). Quitte à changer de sous-groupe parabolique standard, on se ramène au cas où $M \in \mathscr{L}_{\mathrm{st}}$. Si $W(\mathfrak{a}_M)$ possède deux éléments, en tenant compte des définitions des fonctions C, on déduit immédiatement de ce théorème que si s est l'élément non trivial de $W(\mathfrak{a})$, on a:

$$\|C_{Q|P}(1,\lambda)\psi\|^2 = \|C_{Q|P}(s,\lambda)\psi\|^2, \quad \psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau), \quad Q \in \mathscr{P}(L) \ ,$$

pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ tel que les deux membres soient définis. Mais $\mathscr{P}(L)$ est réduit à deux éléments P et $\bar{P} = P^s$. Appliquant la Proposition 3 (i) et utilisant l'unitarité de $\bar{R}(s)$, on voit que le point (i) du Théorème 2 est vrai. Tenant compte du Lemme précédent, on en conclut que le Théorème est vrai dans ce cas.

Si $W(\mathfrak{a}_M)$ ne possède qu'un seul élément, on voit comme ci-dessus que:

$$\|C_{\bar{P}|P}(1,\lambda)\psi\|^2 = \|C_{P|P}(1,\lambda)\psi\|^2, \quad \psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau) \ ,$$

lorsque les deux membres sont définis. C'est le point (i) du Théorème 2. Donc celui-ci est encore vrai dans ce cas, grâce au Lemme précédent. □

Démonstration du Théorème 2. Il suffit, d'après le Lemme 5, de prouver le point (iv) du Théorème. Utilisant les formules de produit pour les matrices B (cf. [11] Proposition 5), on se ramène au cas où Q et P sont adjacents. Grâce à la Proposition 6 de l.c., on est ramené au cas où dim $\mathfrak{a}^G = 1$. Mais le Théorème est vrai dans ce cas, d'après le Lemme précédent. Ceci achève de prouver le Théorème 2. □

6.2 Théorème 3. *Soient* $P,\ Q \in \mathscr{P}(L),\ s \in W(\mathfrak{a})$.

(i) *Il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que, pour tout* $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$, *la fonction méromorphe sur* $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$, $\lambda \mapsto E^0(P,\psi,-\lambda)$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\mathfrak{a}^*_{\varepsilon}$, *définissant un élément de* $\widetilde{\Pi}'_{\mathrm{hol}}(G,M,\tau)$, *notée encore* $\lambda \mapsto E^0(P,\psi,-\lambda)$.

(ii) *Si* ε *vérifie les hypothèses de (i), la fonction* $\lambda \mapsto C^0_{Q|P}(s,\lambda)$ *se prolonge en une fonction holomorphe sur* $\mathfrak{a}^*_\varepsilon$ *notée de la même façon. Pour* $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, *l'opérateur* $C^0_{Q|P}(s,\lambda)$ *est unitaire. De plus, il existe* $N \in \mathbb{N}$ *et* $C > 0$ *tels que*:

$$\|C^0_{Q|P}(s,\lambda)\psi\| \leq C(1+\|\lambda\|)^N \|\psi\|, \quad \psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau), \ \lambda \in \mathfrak{a}^*_\varepsilon \ .$$

Démonstration. Comme dans la démonstration de la Proposition 1, on se ramène au cas où $\psi \in \mathscr{A}_2(M/M\cap H, \tau_M)$. Dans ce cas, on va voir que $\lambda \mapsto E^0(P,\psi,-\lambda)$ se prolonge, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, en une fonction $II'_{\mathrm{hol}}(G,M,\tau)$. Par linéarité (cf. (1.8)), on se ramène au cas où ψ est de la forme $\psi_{f\otimes\eta}$ pour $\delta \in \hat{M}$, $f \in C^\infty(K,\delta,\tau)$ et $\eta \in (V_{\bar{\delta}}^{-\infty})^{M\cap H}_{\mathrm{disc}}$, avec η propre sous $\mathbb{D}(M/M\cap H)$ pour la valeur propre Λ. Utilisant la Définition 3 de [4], ou plutôt sa variante pour les fonctions τ-sphériques, on voit, grâce au Lemme 4 (ii) et à nos hypothèses sur ψ, que $\lambda \mapsto E^0(P,\psi,-\lambda)$ est $II'_{\mathrm{mer}}(\Lambda)$.

Si Φ est une fonction τ-sphérique sur G/H, on a pour tout $k \in K\cap H$ et tout $g \in G$:

$$\Phi(kgk^{-1}H) = \tau(k)\Phi(gH) \ . \tag{6.3}$$

Mais, pour tout $x \in N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$, le sous-goupe parabolique P^x est conjugué par un élément de $N_{K\cap H}(\mathfrak{a}_\emptyset)$ à P^w pour un élément w de $\mathscr{W}$ d'après la définition de $\mathscr{W}$. De (6.3) on déduit que, dans la variante pour les fonctions τ-sphériques du Théorème 2 de [4], on peut prendre les sous-groupes paraboliques Q de la forme P^w avec $w \in \mathscr{W}$. En outre les translations par $k \in K$ sont inutiles car les fonctions sont τ-sphériques. Le Théorème 2 (ii) montre que les fonctions $\lambda \mapsto C^0_{Q|P}(s,\lambda)\psi$ sont localement bornées au voisinage de tout élément λ de $i\mathfrak{a}^*$. La variante du Théorème 2 de l.c. s'applique et montre que la fonction considérée est $II'_{\mathrm{hol}}(\Lambda)$. L'holomorphie des fonctions $C^0_{Q|P}(s,\lambda)$ résulte alors des propriétés des fonctions $II'_{\mathrm{hol}}(\Lambda)$. L'unitarité est conséquence du Théorème 2 (ii), par prolongement analytique. Enfin, la majoration est une conséquence des propriétés des fonctions $II'_{\mathrm{hol}}(\Lambda)$ et de l'équivalence des normes sur l'espace de dimension finie $\mathscr{A}_2(M,\tau)$. □

Corollaire du Théorème 3. *Avec les notations du Théorème, pour* $\delta \in \hat{M}$, *il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que, pour tout* $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$, *la fonction* $\lambda \mapsto j^0(P,\delta,\lambda,\eta)$ *soit holomorphe sur* $\mathfrak{a}^*_\varepsilon$.

Démonstration. La démonstration est identique à celle du Théorème 1 de [5], en tenant compte du Théorème 3 et du Lemme 4 (i). □

7 Transformation de Fourier et paquets d'ondes

7.1 Théorème 4. *Soient* $L \in \mathscr{L}$, $P \in \mathscr{P}(L)$ *et* $\mathscr{W}$ *comme dans les paragraphes précédents. Pour* $f \in \mathscr{C}(G/H,\tau)$, *il existe un unique élément* $\mathscr{F}^0_P f \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$ *tel que*:

$$(\mathscr{F}_P^0 f(\lambda), \psi) = \int_{G/H} (f(x), E^0(P, \psi, \lambda)(x))\, dx, \quad \psi \in \mathscr{A}_2(M, \tau), \ \lambda \in i\mathfrak{a}^* \ .$$

Le produit scalaire figurant dans le membre de gauche est celui de $\mathscr{A}_2(M,\tau)$. Les mesures sont normalisées comme dans [14].

De plus, l'application $f \mapsto \mathscr{F}_P^0 f$ est une application linéaire continue de $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ dans $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$.

Démonstration. Le membre de droite de l'égalité est clairement antilinéaire en ψ pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$ fixé. Il est bien défini car $E^0(P,\psi,\lambda)$ est tempérée pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$. La continuité en ψ est immédiate puisque $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ est de dimension finie. Le théorème de représentation de Riesz permet de définir, pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, l'élément $\mathscr{F}_P^0 f(\lambda)$ de $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ qui vérifie l'égalité du Théorème. En utilisant les propriétés des fonctions $\widetilde{\Pi}'_{\mathrm{hol}}$ et [14] (5.1), (5.3) et (5.5), on voit que, pour $\psi \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$ fixé, il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que:

$$|(\mathscr{F}_P^0 f(\lambda), \psi)| \leq C(1 + \|\lambda\|)^m \nu(f) \ , \tag{7.1}$$

où ν est une semi-norme continue sur $\mathscr{C}(G/H,\tau)$. En utilisant le Lemme 2 de [4] et la dérivation sous le signe somme dans le second membre de l'égalité du Théorème, on voit que la fonction $\lambda \mapsto \mathscr{F}_P^0 f(\lambda)$ est C^∞ sur $i\mathfrak{a}^*$ et que l'on a une généralisation de (7.1) en remplaçant $\mathscr{F}_P^0 f(\lambda)$ par $(L_p(\mathscr{F}_P^0 f))(\lambda)$ où $p \in S(\mathfrak{a}^*)$ et L_p est l'opérateur différentiel sur $i\mathfrak{a}^*$ correspondant à p.

Montrons que $\mathscr{F}_P^0$ est continue de $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ dans $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$. On prend alors $\psi = \psi_{f\otimes\eta}$ avec $\delta \in \hat{M}$, $f \in C^\infty(K,\delta,\tau)$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta,1) = (V_\delta^{-\infty})_{\mathrm{disc}}^{M\cap H}$, $\mathbb{D}(M/M\cap H)$-propre pour la valeur propre $\Lambda \in (\mathfrak{a}_k^d)^*$. Ici, on suppose que η est différent de zéro et que $\mathfrak{a}^d$ est un sous-espace de Cartan standard de $\mathfrak{s}^d$ vérifiant $\mathfrak{a}_M^d = \mathfrak{a}$ (cf. [14] par. 3). On applique alors la forme généralisée de (7.1) à Df, où $D \in \mathbb{D}(G/H)$, en tenant compte du Lemme 5 (ii) de [14]. Utilisant l'égalité du Théorème, on en déduit que, pour tout $p \in S(\mathfrak{a}^*)$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une semi-norme continue ν' sur $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ tels que, pour tout $D \in \mathbb{D}(G/H)$:

$$|(L_p(\overline{\gamma_{\mathfrak{a}^d}(D^*)(\Lambda - .)}\mathscr{F}_P^0 f)(\lambda), \psi)| \leq C(1 + \|\lambda\|)^m \nu'(Df), \quad \lambda \in i\mathfrak{a}^* \tag{7.2}$$

pour ψ fixé comme ci-dessus. On rappelle que $\mathbb{D}(G/H)$ opère continument sur $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ (cf. e.g. [14], (5.4)). En faisant agir une puissance convenable du Casimir de G, regardé comme élément de $\mathbb{D}(G/H)$, on montre, par récurrence sur le degré de p et en utilisant le crochet de L_p et de la multiplication par un polynôme, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in S(\mathfrak{a}^*)$, il existe une semi-norme continue $\nu_{n,p}$ sur $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ telle que:

$$|(L_p(\mathscr{F}_P^0 f)(\lambda), \psi)| \leq (1 + \|\lambda\|)^{-n} \nu_{n,p}(f) \ , \tag{7.3}$$

où ψ est fixé comme ci-dessus. On raisonne de même lorsque $\psi = \psi_{f\otimes\eta}$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta,w)$ est $\mathbb{D}(M/M\cap w^{-1}Hw)$-propre, où $w \in \mathscr{W}$ (voir (3.31)). On obtient l'analogue de (7.3). Utilisant le fait que $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ est de dimension finie et la décomposition (2.2), on en déduit que $\mathscr{F}^0_P$ est bien continue de $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ dans $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)\otimes\mathscr{A}_2(M,\tau)$. □

Proposition 6. *Soient* $P,\ Q\in\mathscr{P}(L),\ s\in W(\mathfrak{a})$. *Alors, on a*:

$$(\mathscr{F}^0_P f)(s\lambda) = C^0_{P|Q}(s,\lambda)(\mathscr{F}^0_Q f)(\lambda), \quad f\in\mathscr{C}(G/H,\tau),\ \lambda\in i\mathfrak{a}^* \ .$$

Démonstration. Elle est immédiate en utilisant la définition de $\mathscr{F}^0_P f,\ \mathscr{F}^0_Q f$, la Proposition 5 (iv) et le Théorème 2 (ii). □

7.2 Proposition 7. (i) *Quels que soient* $P\in\mathscr{P}(L),\ \Psi\in\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)\otimes\mathscr{A}_2(M,\tau)$ *et* $x\in G/H$, *l'intégrale*:

$$(\mathscr{I}^0_P\Psi)(x) := \int_{i\mathfrak{a}^*} E^0(P,\Psi(\lambda),\lambda)(x)\, d\lambda$$

est convergente et la fonction $\mathscr{I}^0_P\Psi$ *ainsi définie sur* G/H, *appelée paquet d'ondes de* Ψ *relativement à* P, *est un élément de* $\mathscr{C}(G/H,\tau)$. *L'application* $\mathscr{I}^0_P$ *est une application linéaire continue de* $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)\otimes\mathscr{A}_2(M,\tau)$ *dans* $\mathscr{C}(G/H,\tau)$.

(ii) *Pour tout* $f\in\mathscr{C}(G/H,\tau)$ *et* $\Psi\in\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)\otimes\mathscr{A}_2(M,\tau)$, *on a*:

$$(\mathscr{F}^0_P f,\Psi) = (f,\mathscr{I}^0_P\Psi) \ ,$$

où le produit scalaire du premier membre est défini par le produit scalaire L^2 *sur* $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)$ *tensorisé avec celui de* $\mathscr{A}_2(M,\tau)$, *et celui du second membre est le produit scalaire* L^2.

Démonstration. Pour (i), on utilise le fait que $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ est de dimension finie. On est ramené à étudier les propriétés de l'application $a\mapsto\mathscr{I}^0_P(a\otimes\psi)$ où ψ est un élément fixé de $\mathscr{A}_2(M,\tau)$ et a décrit $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)$. On applique alors la version τ-sphérique du Théorème 1 de [4] étendu aux fonctions $\widetilde{II}'_{hol}$, en tenant compte de notre Théorème 3.

Pour (ii), on procède comme dans [6], Lemme 9.3. Il s'agit simplement d'une application du Théorème de Fubini. □

Lemme 7. (i) *Soient* $P,\ Q\in\mathscr{P}(L),\ s\in W(\mathfrak{a})$. *On définit, pour* $\Psi\in\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)\otimes\mathscr{A}_2(M,\tau)$ *et* $\lambda\in i\mathfrak{a}^*$:

$$(T^s_{P,Q}\Psi)(\lambda) = C^0_{P|Q}(s,\lambda)\Psi(\lambda) \ .$$

Alors $T^s_{P,Q}\Psi$ *est un élément de* $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)\otimes\mathscr{A}_2(M,\tau)$ *et* $T^s_{P,Q}$ *définit un opérateur linéaire continu de* $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)\otimes\mathscr{A}_2(M,\tau)$ *dans lui-même.*

(ii) On a les égalités:

$$\begin{aligned} T^1_{P,Q} \circ T^1_{Q,P} &= Id \\ \mathscr{F}^0_Q &= T^1_{Q,P} \circ \mathscr{F}^0_P \\ \mathscr{I}^0_Q &= \mathscr{I}^0_P \circ T^1_{P,Q} \end{aligned}$$

Démonstration. Pour (i), il s'agit de contrôler la croissance des dérivées de $C^0_{P|Q}(s,\lambda)$ par rapport aux éléments de $S(\mathfrak{a}^*)$. Mais cela résulte du Théorème 3 (i) et des propriétés des termes constants des fonctions $\widetilde{II}'_{\mathrm{hol}}(G,M,\tau)$ (voir Lemme 2 de [4]). Il faut utiliser le fait que, dans $\mathscr{A}_2(M,\tau)$, toutes les normes sont équivalentes. Ceci achève de prouver (i).
La première égalité de (ii) résulte de la Proposition 5 (vi). La deuxième est exactement la Proposition 6. La troisième est prouvée comme la Proposition 6. □

7.3 Théorème 5. *Soient P, $P' \in \mathscr{F}$ et MA (resp. $M'A'$) la σ-décomposition de Langlands de L_P (resp. $L_{P'}$).*

(i) *Soit $\mathscr{S}^0_P(\tau)$ l'espace formé des éléments ψ de $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$ tels que*:

$$\Psi(s\lambda) = C^0_{P|P}(s,\lambda)\Psi(\lambda), \quad \lambda \in i\mathfrak{a}^*, \ \ s \in W(\mathfrak{a}) \ .$$

Alors l'image de $\mathscr{I}^0_P$ est égale à $\mathscr{I}^0_P(\mathscr{S}^0_P(\tau))$ et $\mathscr{S}^0_P(\tau)$ est égal à l'image de $\mathscr{F}^0_P$.

(ii) *Si $\mathfrak{a}_P$ et $\mathfrak{a}_{P'}$ ne sont pas conjugués par un élément de K, on a*:

$$\mathscr{F}^0_{P'} \circ \mathscr{I}^0_P = 0 \ ,$$

et

$$\mathscr{F}^0_P \circ \mathscr{I}^0_P \Psi = (\# W(\mathfrak{a}_P))\Psi, \quad \Psi \in \mathscr{S}^0_P(\tau) \ .$$

(iii) *Si $Q \in \mathscr{P}(L_P)$*:

$$\mathscr{I}^0_P \circ \mathscr{F}^0_P = \mathscr{I}^0_Q \circ \mathscr{F}^0_Q \ .$$

Démonstration. Si $\Psi \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$, la fonction Ψ^0 définie par:

$$\Psi^0(\lambda) = \sum_{s \in W(\mathfrak{a})} C^0_{P|P}(s,\lambda)^{-1}(\Psi(s\lambda)), \quad \lambda \in i\mathfrak{a}^*$$

est encore élément de $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$, puisqu'elle est égale à:

$$\sum_{s \in W(\mathfrak{a})} (T^{s^{-1}}_{P|P}\Psi)(s\lambda) \ ,$$

en tenant compte de la Proposition 5 (vi). Par ailleurs, grâce à la Proposition 5 (v) et (vi), on voit que $\Psi^0 \in \mathscr{S}_P^0(\tau)$. Mais en utilisant l'équation fonctionnelle pour E^0 (Proposition 5 (iv)) et des changements de variables de λ en $s\lambda$ dans les intégrales, on voit facilement que:

$$\mathscr{I}_P^0 \Psi = (\#W(\mathfrak{a}))^{-1} \mathscr{I}_P^0 \Psi^0 \ .$$

Donc l'image de $\mathscr{I}_P^0$ est égale à $\mathscr{I}_P^0(\mathscr{S}_P^0(\tau))$.

L'image de $\mathscr{F}_P^0$ est contenue dans $\mathscr{S}_P^0(\tau)$ d'après la Proposition 6. Soient $a \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)$, ψ, $\psi' \in \mathscr{A}_2(M,\tau)$. En appliquant les définitions, on a, en posant $\Psi = a \otimes \psi$:

$$((\mathscr{F}_P^0 \mathscr{I}_P^0 \Psi)(\lambda), \psi') = (\mathscr{I}_P^0 \Psi, E^0(P, \psi', \lambda)), \quad \lambda \in i\mathfrak{a}^* \ . \tag{7.4}$$

On pose $F(\lambda) = E^0(P, \psi, -\lambda)$, $F'(\lambda) = E^0(P, \psi', -\lambda)$.

Si $k \in K \cap H$ et Q est un sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable on a:

$$F_{Q^k}(kmk^{-1}) = \tau(k) F_Q(m), \quad F \in \mathscr{A}_{\mathrm{temp}}(G,\tau), \ m \in M \ . \tag{7.5}$$

On choisit également un sous-groupe parabolique minimal de $G^{\sigma\theta}$ contenu dans P, définissant une notion auxilliaire de sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable standard pour appliquer le Théorème 4 de [14]. Alors, avec les notations de l.c., tout P^w, $w \in \mathscr{W}_P$ est de la forme $(P^{w'})^{k'}$ où $w' \in \mathscr{W}$ et $k' \in K \cap H$, et la correspondance $w \mapsto w'$ est une bijection de $\mathscr{W}_P$ sur $\mathscr{W}$ d'après le Lemme 10 de [14]. On change, dans l.c. Théorème 4, x en s^{-1} et on utilise notre définition du terme constant généralisé. Joint aux remarques précédentes et à (5.3), le Théorème 3 montre que, pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, $(\mathscr{I}_P^0 \Psi, E^0(P, \psi', \lambda))$ est égal à:

$$\sum_{s \in W(\mathfrak{a})} a(s\lambda) \ (C_{P|P}^0(1, s\lambda)\psi, C_{P|P}^0(s,\lambda)\psi') \ . \tag{7.6}$$

Par linéarité, on déduit de (7.4) et (7.6) que, pour tout $\Psi \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M,\tau)$, on a:

$$((\mathscr{F}_P^0 \mathscr{I}_P^0 \Psi)(\lambda), \psi') = \sum_{s \in W(\mathfrak{a})} (\Psi(s\lambda), C_{P|P}^0(s,\lambda)\psi'), \quad \lambda \in i\mathfrak{a}^* \ . \tag{7.7}$$

Ici on a tenu compte du fait que $C_{P|P}^0(1,\lambda)$ est l'identité. Si $\Psi \in \mathscr{S}_P^0(\tau)$, on voit, grâce à (7.7) et à l'unitarité de $C_{P|P}^0(s,\lambda)$ que:

$$((\mathscr{F}_P^0 \mathscr{I}_P^0 \Psi)(\lambda), \psi') = (\#W(\mathfrak{a}))(\Psi(\lambda), \psi'), \quad \psi' \in \mathscr{A}_2(M,\tau) \ .$$

Ceci prouve que $\mathscr{F}_P^0 \mathscr{I}_P^0$ est multiple de l'identité sur $\mathscr{S}_P^0(\tau)$ et en particulier que $\mathscr{S}_P^0(\tau)$ est contenu dans l'image de $\mathscr{F}_P^0$, donc égal à cette image d'après le début de la démonstration. En outre, on a prouvé la deuxième identité de (ii).

Pour la première, on procède comme ci-dessus en étudiant $((\mathscr{F}^0_{P'}\mathscr{I}^0_P\Psi)(\lambda),\psi')$ pour $\psi'\in\mathscr{A}_2(M',\tau)$, $\Psi\in\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)\otimes\mathscr{A}_2(M,\tau)$. Cette quantité est nulle , toujours grâce au Théorème 4 de [14].
(iii) résulte immédiatement du Lemme 7 (ii). □

7.4 Lemme 8. (i) *Il existe un sous-ensemble fini* $\mathbb{F}$ *de* $\mathscr{F}_{\mathrm{st}}$ *tel que, notant* $\mathbb{A}:=\{A_P\mid P\in\mathbb{F}\}$, *on ait*: *Les* A_P, $P\in\mathbb{F}$, *sont deux à deux distincts et* $\mathbb{A}$ *forme un ensemble de représentants des classes de conjugaison sous K des sous-groupes de G de la forme* A_P, *lorsque P décrit l'ensemble des sous-groupes paraboliques* $\sigma\theta$*-stables de G.*

(ii) *Soit* $\mathbb{F}$ *comme en* (i). *On note, pour* $P\in\mathbb{F}$, $\mathscr{W}_P$ *un ensemble de représentants dans* $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ *du sous-ensemble de* $W_\emptyset/W_\emptyset^M$ *noté* $\mathscr{W}_P$ *dans* [14] *Lemme* 10. *Alors, pour tout sous-groupe parabolique* $\sigma\theta$*-stable Q de G, il existe des éléments* $k\in K\cap H$, $P\in\mathbb{F}$, $Q_1\in\mathscr{P}(L_P)$, $w\in\mathscr{W}_P$ *tels que* $Q=(Q_1^w)^k$.

Démonstration. Tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G est conjugué sous K à un élément de $\mathscr{F}$ et même de $\mathscr{F}_{\mathrm{st}}$. Donc les ensembles $\mathbb{F}$ et $\mathbb{A}$ satisfaisant (i) existent.
Montrons que $\mathbb{F}$ satisfaisant (i) vérifie (ii). Tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable Q de G est conjugué sous $K\cap H$ à un élément de $\mathscr{F}$. On peut donc supposer $Q\in\mathscr{F}$. Alors Q est conjugué sous K à un élément Q_1 de $\mathscr{P}(L_P)$, avec $P\in\mathbb{F}$, ceci d'après les propriétés de $\mathbb{A}$ et $\mathbb{F}$. Mais, d'après le Lemme 10 (i) et (ii) de [14], on a $Q=(Q_1^w)^k$ avec $w\in\mathscr{W}_P$ et $k\in N_{K\cap H}(\mathfrak{a}_\emptyset)$. D'où le Lemme. □

Pour $P\in\mathbb{F}$, on choisit $\mathscr{W}=\mathscr{W}_{\mathscr{P}}$ pour construire les intégrales d'Eisenstein relativement à $Q\in\mathscr{P}(L_P)$.

Théorème 6. *On conserve les notations du Lemme précédent. Soit* $\mathscr{F}^0$ *l'application de* $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ *dans* $\mathscr{S}^0(\tau):=\bigoplus_{P\in\mathbb{F}}\mathscr{S}^0_P(\tau)$ *définie par* $f\mapsto\sum_{P\in\mathbb{F}}(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathscr{F}^0_Pf$. *On note* $\mathscr{I}^0$ *l'application de* $\bigoplus_{P\in\mathbb{F}}\mathscr{S}^0_P(\tau)$ *dans* $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ *définie par* $\mathscr{I}^0=\sum_{P\in\mathbb{F}}(\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathscr{I}^0_P$.

(i) *On a* $\mathscr{F}^0\mathscr{I}^0=Id_{\mathscr{S}^0(\tau)}$ *et l'image de* $\mathscr{F}^0$ *est égale à* $\mathscr{S}^0(\tau)$.

(ii) *L'application linéaire* $\mathscr{I}^0$ *est une isométrie de* $\mathscr{S}^0(\tau)$ *dans* $\mathscr{C}(G/H,\tau)$ *pour les produits scalaires naturels.*

(iii) $\mathscr{I}^0\mathscr{F}^0$ *est un projecteur orthogonal dans l'espace préhilbertien* $\mathscr{C}(G/H,\tau)$. *On le notera* $\mathbb{P}_\tau$.

Démonstration. (i) résulte du Théorème 5 (i) et (ii). Alors (ii) résulte de (i) et de la proposition 7 (ii) par un calcul immédiat.
De même on a:

$$(\mathscr{I}^0\mathscr{F}^0)^2=\mathscr{I}^0\mathscr{F}^0$$

grâce à (i). De plus, on a, pour $\psi,\ \psi'\in\mathscr{S}^0(\tau)$:

$$(\mathscr{I}^0\mathscr{F}^0\Psi, \Psi') = (\Psi, \mathscr{I}^0\mathscr{F}^0\Psi')$$

grâce à la Proposition 7 et au Théorème 5 (ii). □

8 Application à $\mathscr{C}(\mathbf{G}/\mathbf{H})_{(\mathbf{K})}$

8.1 Soit V_τ un sous-espace de dimension finie de $C^\infty(K)$, invariant par les translations à gauche et à droite de K. On note τ la représentation régulière droite de K dans V_τ. Si (π, H_π) est une représentation de K, on notera $(H_\pi)_{V_\tau}$ la somme des composantes isotypiques de type $\gamma \in \hat{K}$, où γ est contenu dans la représentation régulière gauche de K dans V_τ. On note $(H_\pi)_{(K)}$ l'espace des vecteurs K-finis de H_π. On regarde l'action régulière gauche de K dans $C^\infty(G/H)$. A toute fonction $f \in C^\infty(G/H)_{V_\tau}$, on associe l'application de classe C^∞, f_τ de G/H dans V_τ telle que:

$$(f_\tau(x))(k) = f(kx), \quad k \in K, \; x \in G/H \; . \tag{8.1}$$

Alors $f_\tau \in C^\infty(G/H, \tau)$. Notons l_τ la forme linéaire sur V_τ définie par l'évaluation en l'élément neutre de K. On définit, pour $f \in C^\infty(G/H, \tau)$ une fonction f^τ, de classe C^∞ sur G/H par:

$$f^\tau(x) = \langle f(x), l_\tau \rangle, \quad x \in G/H \; . \tag{8.2}$$

Alors, lorsqu'on munit $C^\infty(G/H)_{V_\tau}$ de la topologie induite par celle de $C^\infty(G/H)$, l'application $f \mapsto f_\tau$ définit un isomorphisme linéaire continu de $C^\infty(G/H)_{V_\tau}$ sur $C^\infty(G/H, \tau)$ car:

$$\begin{aligned} (f^\tau)_\tau &= f, \quad f \in C^\infty(G/H, \tau) \\ (f_\tau)^\tau &= f, \quad f \in C^\infty(G/H)_{V_\tau} \; . \end{aligned} \tag{8.3}$$

On a le même résultat lorsqu'on remplace C^∞ par $\mathscr{C}$.

On munit V_τ du produit scalaire L^2 des fonctions sur K. Alors:

$$\int_{G/H} f(x)\overline{f'(x)}\, dx = \int_{G/H} (f_\tau(x), f'_\tau(x))\, dx, \quad f, \; f' \in \mathscr{C}(G/H)_{V_\tau} \; . \tag{8.4}$$

Soient $L = MA \in \mathscr{L}$, $(\delta, V_\delta) \in \hat{M}$. A tout $\varphi \in C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}$ on associe l'application φ_τ de $K \times K$ dans V_δ définie par:

$$\varphi_\tau(k, x) = \varphi(kx), \quad k, \quad x \in K \; . \tag{8.5}$$

Pour F espace vectoriel de dimension finie et X, Y variétés, on identifie l'espace $C^\infty(Y, F) \otimes C^\infty(X)$ à un sous-espace de $C^\infty(X \times Y, F)$. Il est facile de vérifier que l'appartenance de φ à $C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}$ implique

$\varphi_\tau \in C^\infty(K, I_\delta) \otimes V_\tau$. De plus, φ_τ est un élément de $C^\infty(K, \delta, \tau)$. De même, à tout $\varphi \in C^\infty(K, \delta, \tau)$, on associe la fonction $\varphi^\tau \in C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}$ par:

$$\varphi^\tau(k) = \langle \varphi(k), l_\tau \rangle, \ k \in K \ . \tag{8.6}$$

Alors:

$$\begin{aligned}&\textit{L'application } \varphi \mapsto \varphi_\tau \textit{ est un isomorphisme linéaire continu}\\&\textit{de } C^\infty(K, \delta)_{V_\tau} \textit{ dans } C^\infty(K, \delta, \tau), \textit{ unitaire si l'on munit les}\\&\textit{espaces de leurs produits scalaires } L^2. \textit{ Enfin } (\varphi_\tau)^\tau = \varphi \textit{ pour}\\&\textit{tout } \varphi \textit{ dans } C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}.\end{aligned} \tag{8.7}$$

Soient $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$, $P \in \mathscr{P}(L)$ et $\varphi \in C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}$. Alors $E(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)$ appartient à $C^\infty(G/H)_{V_\tau}$ et l'on a l'identité:

$$E(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)_\tau = E(P, \psi_{\varphi_\tau \otimes \eta}, \lambda) \ . \tag{8.8}$$

Ceci résulte de ce qui précède joint à (3.4) et à la Définition 3 par. 3.4 de [13]. On définit $E^0(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)$ en remplaçant j par j^0 dans la définition de $E(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)$ (cf. [13] Définition 3 par. 3.4). On a alors, grâce à la Proposition 4 (i), l'identité de fonctions méromorphes:

$$E^0(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)_\tau = E^0(P, \psi_{\varphi_\tau \otimes \eta}, \lambda) \ . \tag{8.9}$$

8.2 On note I_δ^2 le complété de $I_\delta := C^\infty(K, \delta)$ pour le produit scalaire L^2, de sorte que, pour $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, la représentation $\bar{\pi}^P_{\delta,\lambda}$ se prolonge en une représentation unitaire continue de G dans I_δ^2 notée encore $\bar{\pi}^P_{\delta,\lambda}$. On note $(I_\delta)_{(K)}$ l'espace des vecteurs K-finis de I_δ^2.

Proposition 8. (i) *Pour tout* $\varphi \in C^\infty(K, \delta)_{(K)}$, $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$, *l'application* $\lambda \mapsto E^0(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)$ *est élément de l'espace* $\widetilde{\Pi}'_{\mathrm{hol}}(G, M)_{(K)}$ *(version K-finie de l'espace* $\widetilde{\Pi}'_{\mathrm{hol}}(G, M, \tau)$).

(ii) *Soit* $f \in \mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ *et* $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$. *Il existe un unique vecteur* $(\mathscr{F}^0_P f)(\delta, \lambda)$ *de* $(I_\delta)_{(K)} \otimes \mathscr{V}(\delta)$ *tel que*:

$$((\mathscr{F}^0_P f)(\delta, \lambda), \varphi \otimes \eta) = \int_{G/H} f(x)\overline{E^0(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)(x)}\, dx \ ,$$
$$\varphi \in (I_\delta)_{(K)}, \ \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ .$$

(iii) *Lorsque* f *décrit une composante isotypique donnée de* $\mathscr{C}(G/H)_{(K)}$, *l'application* $\lambda \mapsto (\mathscr{F}^0_P f)(\delta, \lambda)$ *est identiquement nulle sauf pour un nombre fini de représentations* $\delta \in \hat{M}$.

(iv) *Si* $f \in \mathscr{C}(G/H)_{V_\tau}$, *avec* (τ, V_τ) *comme en* 8.1, *on a*:

$$(\mathscr{F}^0_P(f_\tau))(\lambda) = \sum_{\delta \in \hat{M}} \psi_{(\mathscr{F}^0_P f(\delta,\lambda))_\tau} \ .$$

Ici, on a noté $v \mapsto v_\tau$ *l'application linéaire de* $(I_\delta)_{V_\tau} \otimes \mathscr{V}(\delta) = C^\infty(K, \delta)_{V_\tau} \otimes \mathscr{V}(\delta)$ *dans* $C(K, \delta, \tau) \otimes \mathscr{V}(\delta)$ *qui à* $\varphi \otimes \eta$ *associe* $\varphi_\tau \otimes \eta$ *pour* $\varphi \in (I_\delta)_{V_\tau}$ *et* $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$.

(v) *L'application* $f \mapsto (\mathscr{F}^0_P f)(\delta, .)$ *est une application linéaire continue de* $\mathscr{C}(G/H)_{V_\tau}$ *dans* $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes (I_\delta)_{V_\tau}$.

Démonstration. Montrons (i). Soit $f \in \mathscr{C}(G/H)_{(K)}$. On choisit (τ, V_τ) comme en 8.1 de telle sorte que $f \in \mathscr{C}(G/H)_{V_\tau}$. Alors (i) résulte de (8.9) et (8.3), joints au Théorème 3 (i). Pour (ii), on fixe (τ, V_τ) comme ci-dessus. Le second membre de l'égalité de (ii) est nul si $\varphi \in (I_\delta)_{V_{\tau'}}$ avec $V_{\tau'}$ orthogonal à V_τ. Alors l'existence de $(\mathscr{F}^0_P f)(\delta, \lambda)$ résulte du Théorème de représentation de Riesz que l'on applique à l'espace de dimension finie $(I_\delta)_{V_\tau} \otimes \mathscr{V}(\delta)$. L'unicité est évidente.

D'après la réciprocité de Frobenius, pour que $\mathscr{F}^0_P f(\delta, \lambda)$ ne soit pas nul, il faut que δ contienne au moins une représentation $\gamma \in S$, où S est une partie finie de $(\widehat{M \cap K})$. On utilise alors la Proposition 1 de [14] pour conclure que (iii) est vrai.

Montrons (iv). Partant des définitions et utilisant (8.4) et (8.9) on a:

$$((\mathscr{F}^0_P f)(\delta, \lambda), \varphi \otimes \eta) = ((\mathscr{F}^0_P(f_\tau))(\lambda), \psi_{\varphi_\tau \otimes \eta}), \ \varphi \in C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}, \ \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ . \tag{8.10}$$

Tenant compte de (2.10), (2.12), (2.2) et (8.7), on voit que l'égalité ci-dessus est équivalente à (iv).

L'assertion (v) résulte de (iv) (ou (8.10)) et du Théorème 4. □

8.3 On définit l'espace:

$$(\mathscr{S}^1_P)_{(K)} = \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes (\bigoplus_{\delta \in \hat{M}} ((I_\delta)_{(K)} \otimes \mathscr{V}(\delta)))$$

sur lequel K opère par représentation régulière sur le premier facteur de chaque terme de la somme (i.e. sur $(I_\delta)_{(K)}$). On note $\mathscr{H}^1_P$ le complété de $(\mathscr{S}^1_P)_{(K)}$ pour le produit scalaire qui, sur chacun des termes de la somme, correspond au produit scalaire naturel sur le produit tensoriel, l'espace $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)$ étant muni du produit scalaire L^2, avec notre normalisation des mesures. Le groupe K agit unitairement sur $\mathscr{H}^1_P$. On définit une représentation π_P de $\mathfrak{g}$ dans $(\mathscr{S}^1_P)_{(K)}$ en posant:

$$\pi_P(X)(a \otimes \varphi \otimes \eta)(\lambda) = a(\lambda)(\bar{\pi}^P_{\delta,\lambda}(X)\varphi) \otimes \eta, \quad X \in \mathfrak{g}, \ \lambda \in i\mathfrak{a}^*, \ a \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*),$$

$$\delta \in \hat{M}, \ \varphi \in (I_\delta)_{(K)}, \ \eta \in \mathscr{V}(\delta) \ .$$

Alors, $\mathscr{S}_P^1$ est un $(\mathfrak{g}, K)$-module. On définit de manière similaire une représentation unitaire de G dans $\mathscr{H}_P^1$. On note $\mathscr{F}_P^0$ l'application linéaire de $\mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ dans $\mathscr{S}_P^1$ dont la composante de type δ, $\delta \in \hat{M}$, est l'application $f \mapsto (\mathscr{F}_P^0 f)(\delta, .)$ précédemment définie. C'est un morphisme de $(\mathfrak{g}, K)$-modules de $\mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ dans $(\mathscr{S}_P^1)_{(K)}$.
Pour $\delta \in \hat{M}$ et (τ, V_τ) comme en 8.1, on dispose de l'application linéaire $\psi \mapsto \psi_\tau$ de $\bigoplus_{\delta \in \hat{M}} (I_\delta)_{V_\tau} \otimes \mathscr{V}(\delta)$ dans $\mathscr{A}_2(M, \tau)$ caractérisée par:

$$(\varphi \otimes \eta)_\tau = \psi_{\varphi_\tau \otimes \eta}, \quad \delta \in \hat{M},\ \varphi \in (I_\delta)_{V_\tau} = C^\infty(K, \delta)_{V_\tau},\ \eta \in \mathscr{V}(\delta)\ . \quad (8.11)$$

Cette application est unitaire d'après (2.2), (2.9) et (2.13). Son inverse est noté $\psi \mapsto \psi^\tau$. Avec ces notations, l'assertion (iv) de la Proposition 8 prend la forme:

$$(\mathscr{F}_P^0 f(\lambda))_\tau = ((\mathscr{F}_P^0 f_\tau)(\lambda), \quad \lambda \in i\mathfrak{a}^*,\ f \in \mathscr{C}(G/H)_{V_\tau}\ . \quad (8.12)$$

On dispose alors d'une application linéaire $\Psi \mapsto \Psi_\tau$ de $(\mathscr{S}_P^1)_{V_\tau}$ $(= ((\mathscr{S}_P^1)_{(K)})_{V_\tau})$ dans $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes \mathscr{A}_2(M, \tau)$, définie par:

$$(a \otimes \psi)_\tau = a \otimes \psi_\tau\ , \ \ a \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*), \quad \psi \in \bigoplus_{\delta \in \hat{M}} ((I_\delta)_{V_\tau} \otimes \mathscr{V}(\delta))\ , \quad (8.13)$$

(voir (8.11)). Elle est bijective et on note son inverse $\Psi \mapsto \Psi^\tau$. Ces applications sont continues si on munit $(\mathscr{S}_P^1)_{V_\tau}$ de sa topologie naturelle d'espace de la forme $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*) \otimes F$ où F est un espace de dimension finie.
Soit $\tilde{s}$ un représentant de s dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$. On définit, pour tout $\delta \in \hat{M}$, un morphisme $\bar{\bar{R}}(\delta, \tilde{s})$ de $I_\delta \otimes \mathscr{V}(\delta)$ dans $I_{\delta^{\tilde{s}}} \otimes \mathscr{V}(\delta^{\tilde{s}})$ par:

$$\bar{\bar{R}}(\delta, \tilde{s})(\varphi \otimes \eta) = R(\tilde{s})\varphi \otimes \bar{R}(\delta, \tilde{s})\eta, \quad \varphi \in I_\delta,\ \eta \in \mathscr{V}(\delta)\ , \quad (8.14)$$

où $R(\tilde{s})$ désigne la translation à droite par $\tilde{s}$ et $\bar{R}(\delta, \tilde{s})$ a été défini avant (3.24). On a, grâce à (3.26):

$$\bar{R}(s)\psi_{(\varphi \otimes \eta)_\tau} = \psi_{(\bar{\bar{R}}(\delta, \tilde{s})(\varphi \otimes \eta))_\tau}, \quad \varphi \in (I_\delta)_{V_\tau},\ \eta \in V(\delta)\ . \quad (8.15)$$

Ceci implique, grâce aux propriétés de $\bar{R}(s)$, que $\bar{\bar{R}}(\delta, \tilde{s})$ est unitaire. On note $(\mathscr{S}_P^0)_{(K)}$ le sous-espace des éléments Ψ de $(\mathscr{S}_P^1)_{(K)}$ vérifiant, pour tout $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, $\delta \in \hat{M}$, $s \in W(\mathfrak{a})$ et $\tilde{s}$ représentant de s dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$:

$$\begin{aligned}\Psi(\delta, \lambda) = {} & \bar{\bar{R}}(\delta^{\tilde{s}^{-1}}, \tilde{s})(A(P^{s^{-1}}, P, \delta^{\tilde{s}^{-1}}, s^{-1}\lambda) \otimes B(\bar{P}, \bar{P}^{s^{-1}}, \delta^{\tilde{s}^{-1}}, s^{-1}\lambda)^{-1}) \\ & \Psi(\delta^{\tilde{s}^{-1}}, s^{-1}\lambda). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Soit f un élément de $\mathscr{C}(G/H)_{V_\tau}$, avec (τ, V_τ) comme dans (8.1), $\varphi \in C^\infty(K, \delta)_{V_\tau}$, $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$, $\lambda \in i\mathfrak{a}^*$, $\tilde{s}$ un représentant dans $N_K(\mathfrak{a}_\emptyset)$ de $s \in W(\mathfrak{a})$. Partant de (8.12), et utilisant successivement les propriétés de $\mathscr{F}_P^0$ (Proposition 6) et l'expression des fonctions C^0 (Proposition 5 (ii) et Proposition 4 (iv)), on obtient facilement, grâce à (8.15):

$$\textit{Pour } f \in \mathscr{C}(G/H)_{(K)},\ \mathscr{F}^0_P f \textit{ est élément de } (\mathscr{S}^0_P)_{(K)}\ . \tag{8.17}$$

Par ailleurs, on vérifie de façon similaire que:

$$\textit{Si } \Psi \in (\mathscr{S}^0_P)_{V_\tau},\ \textit{on a } \Psi_\tau \in \mathscr{S}^0_P(\tau)\ . \tag{8.18}$$

Proposition 9. (i) *Avec les notations ci-dessus, il existe une application linéaire* $\mathscr{I}^0_P$ *de* $(\mathscr{S}^1_P)_{(K)}$ *dans* $\mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ *telle que, pour tout* $\delta \in \hat{M}$, $a \in \mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)$, $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}$ *et* $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$ *on ait*:

$$\mathscr{I}^0_P(a \otimes \varphi \otimes \eta)(x) = \int_{i\mathfrak{a}^*} a(\lambda) E^0(P, \delta, \lambda, \eta, \varphi)(x)\, d\lambda\ .$$

(ii) *Soient* (τ, V_τ) *comme en* 8.1 *et* $\Psi \in (\mathscr{S}^1_P)_{V_\tau}$. *Alors*:

$$(\mathscr{I}^0_P \Psi)_\tau = \mathscr{I}^0_P(\Psi_\tau).$$

(iii) *L'application linéaire* $\mathscr{I}^0_P$ *est continue de* $(\mathscr{S}^1_P)_{V_\tau}$ *dans* $\mathscr{C}(G/H)_{V_\tau}$.
(iv) *Pour tout* $f \in \mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ *et* $\Psi \in (\mathscr{S}^1_P)_{(K)}$:

$$(\mathscr{F}^0_P f, \Psi) = (f, \mathscr{I}^0_P \Psi)\ .$$

(v) *L'image de* $\mathscr{F}^0_P$ *est égale à* $(\mathscr{S}^0_P)_{(K)}$.

Démonstration. (i) résulte du Théorème 1 de [4] et de la Proposition 8 (i).
(ii) résulte de (i), (8.8), (8.11) et (8.13).
Alors (iii) résulte de (ii) et de la Proposition 7 (ii) car, d'après (8.3):

$$\mathscr{I}^0_P \Psi = (\mathscr{I}^0_P(\Psi_\tau))^\tau$$

Pour (iv), on choisit (τ, V_τ) comme dans 8.1 tel que $f \in C^\infty(G/H)_{V_\tau}$ *et* $\Psi \in (\mathscr{S}^1_P)_{V_\tau}$. Alors (iv) résulte de (ii), (8.12) et de la Proposition 7 (ii).

Prouvons (v). Soit $\Psi \in (\mathscr{S}^0_P)_{(K)}$ *et* τ comme dans 8.1 tel que $\Psi \in (\mathscr{S}^0_P)_{V_\tau}$. Alors Ψ_τ est élément de $\mathscr{S}^0_P(\tau)$ d'après (8.16), donc de la forme $\mathscr{F}^0_P f$ avec $f \in \mathscr{C}(G/H, \tau)$. Alors $f = (f^\tau)_\tau$ avec $f^\tau \in \mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ et, avec les notations de (8.13):

$$(\mathscr{F}^0_P(f^\tau))_\tau = \Psi_\tau\ ,$$

soit encore:

$$\mathscr{F}^0_P(f^\tau) = \Psi\ ,$$

Donc $(\mathscr{S}^0_P)_{(K)}$ est contenu dans l'image de $\mathscr{F}^0_P$. On achève de prouver (v) grâce à (8.15). $\square$

Théorème 7, Soit $\mathbb{F}$ *comme dans le lemme* 8. *On définit une application linéaire* $\mathcal{F}^0$ *de* $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ *dans* $\mathcal{S}^0_{(K)} := \bigoplus_{P\in\mathbb{F}} (\mathcal{S}^0_P)_{(K)}$ *en posant*:

$$\mathcal{F}^0 f := \bigoplus_{P\in \mathbb{F}} \ (\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{F}^0_P f, \quad f\in\mathcal{C}(G/H)_{(K)} \ ,$$

et une application $\mathcal{I}^0$ *de* $\mathcal{S}^0_{(K)}$ *dans* $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ *en posant*:

$$\mathcal{I}^0 := \bigoplus_{P\in \mathbb{F}} \ (\#W(\mathfrak{a}_P))^{-\frac{1}{2}}\mathcal{I}^0_P \ .$$

Alors:

(i) $\mathcal{I}^0$ *et* $\mathcal{F}^0$ *sont des morphismes de* $(\mathfrak{g}, K)$*-modules.*

(ii) $\mathcal{F}^0\mathcal{I}^0 = Id_{\mathcal{S}^0_{(K)}}$.

(iii) $\mathcal{I}^0$ *est une isométrie de* $\mathcal{S}^0_{(K)}$ *dans* $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ *pour les produits scalaires naturels.*

(iv) $\mathcal{I}^0\mathcal{F}^0$ *est un projecteur orthogonal dans* $\mathcal{C}(G/H)_{(K)}$ *noté* $\mathbb{P}$.

(v) *Si*(τ, V_τ) *est comme dans* 8.1 *et* $f\in\mathcal{C}(G/H)_{V_\tau}$, *on a* $(\mathbb{P}f)_\tau = \mathbb{P}_\tau f_\tau$.

Démonstration. Le fait que $\mathcal{F}^0$ et $\mathcal{I}^0$ soient des morphismes de $(\mathfrak{g}, K)$-modules se vérifie aisément sur les caractérisations (Proposition 8 (i) et 9 (i)). Alors, (ii), (iii), (iv) et (v) résultent de (8.12) et de la Proposition 9 (ii) joints au Théorème 6. □

9 Un critère de surjectivité de $\mathcal{I}^0$

9.1 Lemme 9. *On conserve les notations et hypothèses de la Proposition 9. Alors, quels que soient* $\delta\in\hat{M}$, $a\in C^\infty_c(i\mathfrak{a}^*)$, $\varphi\in(I_\delta)_{(K)}$ *et* $\eta\in\mathcal{V}(\delta)$ *la fonction* $\mathcal{I}^0_P(a\otimes\varphi\otimes\eta)$ *définit un vecteur analytique de la représentation régulière gauche, L, de G dans* $L^2(G/H)$.

Démonstration. On utilise les notations de 7.1. Le Laplacien de $\mathfrak{g}$ et de $\mathfrak{k}$ sont définis l'aide du produit scalairedé duit de la forme quadratique définie positive introduite partir de B dans l'introduction. Par linéarité, on peut supposer que η *est* $\mathbb{D}(M/M\cap H)$- propre pour une valeur propre $\Lambda\in(\mathfrak{a}^d_k)^*$ et que φ appartient à une composante K-isotypique de I_δ de telle sorte que si Δ_k est le Laplacien de $\mathfrak{k}$, $\bar{\pi}^P_{\delta,\lambda}(\Delta_k)\varphi = c\varphi$ pour un complexe c convenable. Le Laplacien Δ de g est donné par la relation $\Delta = \Omega + 2\Delta_k$, où Ω est l'élément de Casimir de $\mathfrak{g}$ associé à la forme bilinéaire G-invariante B. On note γ la fonction polynomiale sur $\mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$ définie par $\gamma(\lambda) = \gamma_{\mathfrak{a}_d}(\Omega)(\Lambda-\lambda)$. Par dérivation élémentaire sous le signe somme on a, pour tout $j\in\mathbb{N}$ (voir (7.2)):

$$L(\Delta^j)\mathcal{I}^0_P(a\otimes\varphi\otimes\eta) = \mathcal{I}^0_P((\gamma+2c)^j a\otimes\varphi\otimes\eta) \ .$$

Compte tenu de la continuité de l'injection de $\mathcal{C}(G/H)$ dans $L^2(G/H)$, le Théorème 1' de [4] implique qu'il existe une semi-norme continue q sur $\mathcal{S}(i\mathfrak{a}^*)$, et une constante $C>0$ telles que, pour tout entier naturel j:

$$\|L(\Delta^j)\mathscr{I}_P^0(a \otimes \varphi \otimes \eta)\| \leq Cq((\gamma + 2c)^j a) \ .$$

a définition de γ implique immédiatement que c'est un polynôme de degré inférieur ou égal à deux. Si on utilise la forme précise des semi-normes continues de $\mathscr{S}(i\mathfrak{a}^*)$ et le fait que a est à support compact, on déduit de la formule de Leibniz l'existence d'une constante $M > 0$ telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\|L(\Delta^j)\mathscr{I}_P^0(a \otimes \varphi \otimes \eta)\| \leq M^j(2j)! \ .$$

Le résultat découle aussitôt du Corollaire 4.4.6.4 de [24]. □

Lemme 10. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *Le projecteur* $\mathbb{P}$ *est égal à l'identité.*

(ii) *Pour toute représentation unitaire de dimension finie* (τ, V_τ) *de* K, $\mathbb{P}_\tau$ *est égal à l'identité.*

Démonstration. D'après (8.3) et le Théorème 7 (v), $\mathbb{P}_\tau$ est égal à l'identité pour tout (τ, V_τ) comme dans 8.1 si et seulement si (i) est vrai. Par ailleurs, comme toute représentation irréductible de K apparait comme facteur direct d'une représentation (τ, V_τ) vérifiant les hypothèses de 8.1, (ii) est équivalent à $\mathbb{P}_\tau$ égal à l'identité pour tout (τ, V_τ) comme dans 8.1. D'où l'équivalence de (i) et (ii). □

Lemme 11. (i) *Le projecteur* $\mathbb{P}$ *est égal à l'identité si toute fonction tempérée,* $\mathbb{D}(G/H)$*-finie,* K*-finie, se transformant sous* A_G *par un caractère unitaire et orthogonale à l'image de* $\mathbb{P}$, *est nulle.*

(ii) *Le projecteur* $\mathbb{P}$ *est égal à l'identité si, pour toute représentation unitaire de dimension finie* (τ, V_τ) *de* K, *toute fonction* τ *-sphérique, tempérée,* $\mathbb{D}(G/H)$*-finie, se transformant sous* A_G *par un caractère unitaire et orthogonale à l'image de* $\mathbb{P}_\tau$, *est nulle.*

Démonstration. Montrons (i). Raisonnons par l'absurde et supposons le projecteur $\mathbb{P}$ différent de l'identité. L'espace vectoriel engendré par les paquets d'ondes $\mathscr{I}_P^0(a \otimes \varphi \otimes \eta)$, $P \in \mathbb{P}$, $\delta \in \hat{M}_P$, $a \in C_c^\infty(i\mathfrak{a}^*)$, $\varphi \in (I_\delta)_{(K)}$ et $\eta \in \mathscr{V}(\delta)$, est un $(\mathfrak{g}, K)$-module fomé de vecteurs analytiques et dont l'adhérence dans $L^2(G/H)$ est identique à l'adhérence de *Im* $\mathbb{P}$. Cette dernière est donc un sous G-module de $L^2(G/H)$.

On note $\mathscr{H}$ l'orthogonal de l'image de $\mathbb{P}$ dans $L^2(G/H)$. C'est aussi un G-module. Soit ξ la restriction de la mesure de Dirac δ_{eH} en eH à $\mathscr{H}^\infty$. On écrit la désintégration centrale de la représentation unitaire de G dans $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H} = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \mathscr{H}_\pi \, d\mu(\pi)$$

où, pour tout $\pi \in \hat{G}$, $\mathscr{H}_\pi$ est un multiple (fini d'après [1]) de π. On désintègre ξ :

$$\xi = \int_{\hat{G}}^{\oplus} \xi_\pi \, d\mu(\pi) \ ,$$

où on peut supposer (après modification éventuelle sur un ensemble μ-négligeable) que $\xi_\pi \in (\mathscr{H}_\pi^{-\infty})^H$ pour tout $\pi \in \hat{G}$. Alors ξ_π est $\mathbb{D}(G/H)$-fini ([1]) et faiblement H-tempéré (cf. [11] Appendice C).

Soit $f \in \mathscr{C}(G/H)_{(K)}$ tel que $f \neq \mathbb{P}f$. Comme $\mathbb{P}$ est un projecteur orthogonal, la fonction $f_1 := f - \mathbb{P}f$ est un élément de $\mathscr{H}^\infty$. On peut donc désintégrer f_1:

$$f_1 = \int_{\hat{G}}^{\oplus} v_\pi \, d\mu(\pi) \ ,$$

où on peut supposer (après modification sur un ensemble μ-négligeable) que pour tout $\pi \in \hat{G}$, le vecteur v_π appartient à $(\mathscr{H}_\pi^\infty)_{(K)}$.

On choisit une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans G et on note, pour $p,\ q \in \mathbb{N}$:

$$X_{p,q,n} := \{\pi \in \hat{G} \mid |\langle \xi_\pi, \pi(g_n^{-1})v_\pi \rangle| \leq pN_q(g_nH)\Theta_G(g_nH) \ ,$$

où N_q est défini dans [14] avant le Lemme 3. Alors, pour tout $g \in G$, l'application $\pi \mapsto \langle \xi_\pi, \pi(g^{-1})v_\pi \rangle$ est μ-mesurable d'après les propriétés des désintégrations de ξ et f_1. Chaque ensemble $X_{p,q,n}$ est donc μ-mesurable et il en va de même de $X_{p,q} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_{p,q,n}$. De plus, $\bigcup_{p,q\in\mathbb{N}} X_{p,q}$ est égal à $\hat{G}$, car pour tout π, ξ_π est faiblement tempéré et v_π est K-fini. D'autre part:

$$f_1(gH) = \int_{\hat{G}} \langle \xi_\pi, \pi(g^{-1})v_\pi \rangle \, d\mu(\pi), \quad g \in G \ .$$

Comme f_1 est non nulle, on peut trouver $p, q \in \mathbb{N}$ et une partie μ-mesurable $X_{p,q}^0$ de $X_{p,q}$, de mesure finie non nulle et telle que, pour tout élément π de $X_{p,q}^0$, la fonction $gH \mapsto \langle \xi_\pi, \pi(g^{-1})v_\pi \rangle$ ne soit pas identiquement nulle sur G/H. Soit χ l'indicatrice de $X_{p,q}^0$ et a un élément de $L^\infty(\hat{G}, \mu)$. D'après [22] Théorème C, la fonction: $f_{a\chi} := \int_{\hat{G}}^{\oplus} a(\pi)\chi(\pi)v_\pi \, d\mu(\pi)$ est un élément de $\mathscr{H}^\infty$, car $\int_{\hat{G}}^{\oplus} v_\pi \, d\mu(\pi)$ est élément de $\mathscr{H}^\infty$. On a donc:

$$f_{a\chi}(gH) = \int_{\hat{G}}^{\oplus} a(\pi)\chi(\pi)\langle \xi_\pi, \pi(g^{-1})v_\pi \rangle \, d\mu(\pi) \ ,$$

Pour $f' \in Im\ \mathbb{P}$ on a:

$$(f_{a\chi}, f') = \int_{G/H} f_{a\chi}(x)\overline{f'(x)} \, dx$$

soit encore,

$$(f_{a\chi}, f') = \int_{G/H} \overline{f'(gH)} \int_{X_{p,q}^0} a(\pi)\langle \xi_\pi, \pi(g^{-1})v_\pi \rangle \, d\mu(\pi) dgH \ .$$

On souhaite appliquer le Théorème de Fubini. La fonction $(g, \pi) \mapsto \langle \xi_\pi, \pi(g^{-1}) v_\pi \rangle$ est $dg \otimes \mu$-mesurable sur $G \times \hat{G}$. Cela résulte, par localisation, du fait élémentaire suivant:

Soit Ω un pavé ouvert de $\mathbb{R}^n$, (X, μ) un espace mesuré, h une application de $\Omega \times X$ dans $\mathbb{C}$ telle que:
(a) *Pour tout $x \in X$, la fonction $\omega \mapsto h(\omega, x)$ est continue sur Ω.*
(b) *Pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $x \mapsto h(\omega, x)$ est μ-mesurable sur X. Alors, la fonction h est $d\omega \otimes \mu$-mesurable, où $d\omega$ désigne la mesure de Lebe sur Ω.*

En effet, en utilisant le procédé d'approximation utilisé pour les intégrales de Riemann, il est facile de construire une suite (h_n) de fonctions sur $\Omega \times X$, convergeant simplement vers h et telle que, pour tout entier n, h_n soit une combinaison linéaire de fonctions de la forme $(\omega, x) \mapsto 1_P(\omega) f(\theta_P, x)$, où P est un pavé de Ω et θ_P un élément de P.

Mais $X^0_{p,q} \subseteq X_{p,q}$ et la suite (g_n) est dense dans G. On a donc, pour tout $g \in G$ et π dans $X_{p,q}$:

$$|\langle \xi_\pi, \pi(g^{-1}) v_\pi \rangle| \leq p N_q(gH) \Theta(gH) \ .$$

Comme $a \in L^\infty(\hat{G}, \mu)$ et $f' \in \mathscr{C}(G/H)$, le Théorème de Fubini s'applique et donne:

$$(f_{a\chi}, f') = \int_{X^0_{p,q}} a(\pi) \int_{G/H} \overline{f'(gH)} \, \langle \xi_\pi, \pi(g^{-1}) v_\pi \rangle dgH \ d\mu(\pi) \ .$$

Comme $f_{a\chi} \in \mathscr{H}$ et $f' \in Im\ \mathbb{P}$, le premier membre de cette égalité est nul, et ce quel que soit $a \in L^\infty(\hat{G}, \mu)$. On a donc, pour μ-presque tout π élément de $X^0_{p,q}$:

$$\int_{G/H} \overline{f'(gH)} \langle \xi_\pi, \pi(g^{-1}) v_\pi \rangle dgH = 0 \ .$$

Par un argument de séparabilité ([16] 17.1.2), on voit qu'il existe au moins un élément $\pi \in X^0_{p,q}$ tel que l'égalité ci dessus soit vraie pour tout $f' \in Im\ \mathbb{P}$. Mais, d'après le choix de $X^0_{p,q}$, la fonction $gH \mapsto \langle \xi_\pi, \pi(g^{-1}) v_\pi \rangle$ est non nulle, K-finie, $\mathbb{D}(G/H)$-finie (car ξ_π est $\mathbb{D}(G/H)$-fini) et tempérée et se transforme sous A_G par un caractère unitaire (car π est unitaire irréductible). Ceci achève de prouver (i).

(ii) On raisonne par l'absurde et on suppose différent de l'identité. D'après (i), il existe une fonction non nulle Φ, $\mathbb{D}(G/H)$-finie, tempérée, K-finie, se transformant sous A_G par un caractère unitaire, orthogonale à l'image de $\mathbb{P}$. On choisit alors (τ, V_τ) comme dans 8.1 tel que $\Phi \in \mathscr{C}(G/H)_{V_\tau}$.

Alors, Φ_τ est orthogonale à l'image de $\mathbb{P}_\tau$ d'après (8.4) et le Théorème 7 (v). D'où (ii). $\square$

9.2 Le cas des groupes

Théorème 8. *On suppose ici que* $G = G_1 \times G_1$, σ *est la permutation des composantes et* H *le sous-groupe diagonal de* G. *Alors, les transformations* $\mathscr{I}^0$ *et* $\mathscr{F}^0$ *sont inverses l'une de l'autre.*

Démonstration. D'après le Lemme 10, il suffit de traiter le cas des fonctions K-finies puis, grâce au Théorème 7 (ii), de montrer que $\mathscr{I}^0\mathscr{F}^0$ est l'identité. Montrons qu'il suffit de vérifier que $\mathscr{F}^0$ est injective. En effet, comme $\mathscr{I}^0\mathscr{F}^0$ est l'identité, l'application $\mathscr{F}^0\mathscr{I}^0\mathscr{F}^0 - \mathscr{F}^0$ est nulle et donc $\mathscr{I}^0\mathscr{F}^0$ moins l'identité est nulle si $\mathscr{F}^0$ est injective. Considérons un élément f_0 K_1-fini à droite et à gauche de l'espace de Schwartz de G/H tel que la fonction $\mathscr{F}^0 f_0$ soit nulle. D'après [9], par. 9.2, tout sous-groupe parabolique $\sigma\theta$-stable de G est de la forme $P = P_1 \times \bar{P}_1$ où P_1 est un sous-groupe parabolique de G_1 de décomposition de Langlands $P_1 = M_1A_1N_1$, et $\bar{P}_1$ est l'opposé de P_1. De plus, les séries principales étudiées sont de la forme $\pi^P_{\delta,\nu} = \pi^{P_1}_{\delta_1,\nu_1} \otimes \pi^{\bar{P}_1}_{\delta'_1,-\nu_1}$ où $\nu_1 \in (\mathfrak{a}_1)^*_{\mathbb{C}}$, δ_1 est une série discrète de M_1, δ'_1 sa contragrédiente. Alors $\delta = \delta_1 \otimes \delta'_1$ et $\mathscr{V}(\delta)$ est de dimension un. Ici les produits tensoriels sont topologiques. Notons $A(\bar{P}_1, P_1, \delta_1, \nu_1)$ le prolongement méromorphe de l'intégrale d'entrelacement (lorsqu'il est défini) entre $I^{P_1}_{\delta_1,\nu_1}$ et $I^{\bar{P}_1}_{\delta_1,\nu_1}$. On sait que $I^{\bar{P}_1}_{\delta'_1,-\nu_1}$ s'identifie à un sous-espace du dual de $I^{\bar{P}_1}_{\delta_1,\nu_1}$. D'autre part, d'après [9], par. 9.2, on sait qu'il existe un élément η de $\mathscr{V}(\delta)$ tel que, pour tout $v_1 \otimes v'_1 \in I^{P_1}_{\delta_1,\nu_1} \otimes I^{\bar{P}_1}_{\delta'_1,-\nu_1}$, $\langle j(P,\delta,\nu,\eta),\ v_1 \otimes v'_1\rangle = \langle A(\bar{P}_1, P_1, \delta_1, \nu_1)v_1, v'_1\rangle$. Comme $\mathscr{V}(\delta)$ est de dimension un, $j^0(P,\delta,\nu,\eta)$ est proportionnel à $j(P,\delta,\nu,\eta)$ pour ν_1 dans un ouvert dense de $i\mathfrak{a}_1^*$. Alors, partant de la Proposition 8, on voit que, comme $\mathscr{F}^0 f_0$ est nul, on a, pour ν_1 élément d'un ouvert dense de $i\mathfrak{a}_1^*$ (on dira générique dans $i\mathfrak{a}_1^*$), $\langle A(\bar{P}_1, P_1, \delta_1, \nu_1)\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu_1}(f_0)v_1, v'_1\rangle = 0$. Ici, on a identifié G/H à G_1 de la façon habituelle. Comme $A(\bar{P}_1, P_1, \delta_1, \nu_1)$ est inversible pour ν_1 générique dans $i\mathfrak{a}_1^*$, on en déduit que $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu_1}(f_0) = 0$ pour ν_1 générique dans $i\mathfrak{a}_1^*$, puis, par densité et continuité, pour tout $\nu_1 \in i\mathfrak{a}_1^*$.

La formule de Plancherel abstraite donne une identification de $L^2(G_1)$ avec une intégrale hilbertienne de représentations de $G_1 \times G_1$, $\int^{\oplus}_{\widehat{G_1}} H_\pi \hat{\otimes} H_{\pi'}\, d\mu(\pi)$, où H_π est l'espace de π, π' sa contragrédiente et $H_\pi \hat{\otimes} H_{\pi'}$ le produit tensoriel hilbertien. On identifie $H_\pi \hat{\otimes} H_{\pi'}$ à l'espace des opérateurs de Hilbert-Schmidt de H_π dans lui même. Alors, toute fonction f, C^∞ à support compact sur G_1, s'identifie à $\int^{\oplus}_{\widehat{G_1}} \pi(f)\ d\mu(\pi)$.

Par ailleurs, l'injection de l'espace de Schwartz $\mathscr{C}(G_1) = \mathscr{C}(G/H)$ dans $L^2(G_1) = L^2(G/H)$ est "fine" au sens de [7], § 1.4 grâce à l.c. Théorème 3.2 et

[11], §. C.2. Donc, d'après [7], Lemme 1.3, pour μ-presque tout π, il existe un entrelacement de $G_1 \times G_1$-modules entre $\mathscr{C}(G_1)$ et $H_\pi \hat{\otimes} H_{\pi'}, \alpha_\pi$, tel que:

$$f = \int_{\widehat{G_1}}^{\oplus} \alpha_\pi(f)\ d\mu(\pi), \quad f \in \mathscr{C}(G_1)\ .$$

Par ailleurs, on sait que pour μ-presque tout π, π est une sous-représentation de $\pi^{P_1}_{\delta_1,\nu_1}$, pour un couple (P_1, δ_1) comme ci-dessus et $\nu_1 \in i\mathfrak{a}_1^*$ (cf. [11], Proposition C.2). Alors π est tempérée, et, si l'on se restreint à une composante isotypique sous $K_1 \times K_1$ de $C_c^\infty(G_1)$, l'application $f \mapsto \pi(f)$ s'étend continuement à la composante isotypique correspondante de $\mathscr{C}(G_1)$. D'autre part, l'espace $C_c^\infty(G_1)$ est séparable et dense dans $\mathscr{C}(G_1)$ (cf. [17], Théorème 6.1.6 et sa preuve). Alors l'égalité

$$\int_{\widehat{G_1}}^{\oplus} \pi(f)\ d\mu(\pi) = \int_{\widehat{G_1}}^{\oplus} \alpha_\pi(f)\ d\mu(\pi), \quad f \in C_c^\infty(G)\ ,$$

montre, par un raisonnement de séparabilité, densité et continuité, que pour μ-presque tout π :

$$\pi(f) = \alpha_\pi(f), \quad f \in \mathscr{C}(G_1)_{(K_1 \times K_1)}\ .$$

Alors, grâce à notre hypothèse sur f_0, on déduit de ce qui précède que $\alpha_\pi(f_0) = 0$ pour μ-presque tout π. D'où la nullité de f_0. Donc $\mathscr{F}^0$ est bien injective comme désiré. □

10 Appendice

Lemme 12. *Soit f une application méromorphe d'un ouvert convexe X du complexifié $E_{\mathbb{C}}$ d'un espace vectoriel réel de dimension finie E, à valeurs dans un espace localement convexe séparé complet V. On suppose qu'il existe n formes linéaires $l_1, \cdots, l_n \in E^* \subseteq E_{\mathbb{C}}^*)$ et n complexes $r_1, \cdots, r_n$ tels que f soit holomorphe sur $X \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$, où $H_i := \{z \in E_{\mathbb{C}} \mid l_i(z) - r_i = 0\ \}$. On note $\Sigma = \{l_1, \cdots, l_n\}$ et $\Pi(\Sigma)$ l'ensemble des fonctions polynomiales sur $E_{\mathbb{C}}$ qui sont produits de fonctions affines de la forme $z \mapsto l(z) - r$, où $l \in \Sigma$ et $r \in \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe un polynôme p tel que pf se prolonge en une fonction holomorphe sur X. Alors p s'écrit $p = p_1 q_1$ avec $p_1 \in \Pi(\Sigma)$ et q_1 polynôme sur $E_{\mathbb{C}}$, de telle sorte que $p_1 f$ est holomorphe sur X et, pour tout i, q_1 restreint à H_i est non identiquement nul.*

Démonstration. On procède par récurrence sur le degré de p (supposé non nul). On voit que $p = p_1 q_1$ où p est produit de fonctions $z \mapsto l_i(z) - r_i$ et q_1 un polynôme qui, pour tout i, admet une restriction à H_i non identiquement nulle. Montrons que $p_1 f$ se prolonge en une fonction holomorphe sur X. Elle est déjà holomorphe sur $X \setminus \bigcup_{i=1}^n H_i$. Notant $Y = X \cap (\bigcup_{i=1}^n H_i)$, si $y \in Y$ est tel que $q_1(y) \neq 0$, il est clair que $p_1 f$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage de y, car $pf = q_1 p_1 f$. D'après les propriétés de q_1

et le Lemme A.1.8 de [12], $p_1 f$ se prolonge en une fonction holomorphe sur X. Pour traiter le cas de fonctions vectorielles, on utilise le fait que grâce à nos hypothèses sur V, l'holomorphie des fonctions à valeurs dans V est équivalente à l'holomorphie faible (cf. [8] par. 3.3.1). $\square$

Bibliographie

1. van den Ban, E., Invariant differential operators for a reductive symmetric space and finite multiplicities, Arkiv för Mat. **25**, 175–187 (1987)
2. van den Ban, E., Asymptotic behaviour of matrix coefficients related to reductive symmetric spaces, Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. **90**, 225–249 (1987)
3. van den Ban, E., The principal series for a reductive symmetric space II. Eisenstein integrals, J. of Funct. Analysis, **109**, p. 331–441 (1992)
4. van den Ban, E., Carmona, J., Deloreme, P., Paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif, J. Funct. Anal., **139**, 225–243 (1996)
5. van den Ban, E., Schlichtkrull, H., Fourier transform on a semi-simple symmetric space, Preprint Universiteit Utrecht, No 888, Nov. 1994
6. van den Ban, E., Schlichtkrull, H., The most continuous part of the Plancherel decomposition for a reductive symmetric space, Ann. of Math., **145**, 267–364 (1997)
7. Bernstein, J. N., On the support of the Plancherel measure, J. Geom. Phys., 5, no **4**, 663–710 (1988)
8. Bourbaki, N., Variétés différentiables et analytiques, Fascicule de résultats, par. 1 à 7, Eléments de Mathématiques XXXIII, Hermann, Paris, 1967
9. Brylinski, J.L., Delorme, P., Vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs et prolongement méromorphe d'intégrales d'Eisenstein, Inv. Math., **109**, 619–664 (1992)
10. Carmona, J., Terme constant des fonctions tempérées sur un espace symétrique réductif, A paraître au J. Reine Angew. Math.
11. Carmona, J., Delorme, P., Base méromorphe de vecteurs distributions H-invariants pour les séries principales généralisées d'espaces symétriques réductifs, J. Funct. Anal., **122**, 152–221 (1994)
12. Casselman, W., Milicic, D., Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations, Duke Math. J., **49**, 869–930 (1982)
13. Delorme, P., Intégrales d'Eisenstein pour les espaces symétriques réductifs. Tempérance. Majorations. Petite matrice B, J. Funct. Anal., **136**, 422–509 (1996)
14. Delorme, P., Troncature pour les espaces symétriques réductifs , A paraitre dans Acta Mathematica
15. Delorme, P., Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs, A paraitre dans Annals of Math
16. Dieudonné, J., Eléments d'Analyse. Tome 3, Gauthier-Villars, Paris, 1970
17. Gangolli, R., Varadarajan, V.S., Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 101, (1988), Springer, Berlin Heidelberg New York
18. Harinck P., Fonctions orbitales sur $G_{\mathbb{C}}/G_{\mathbb{R}}$. Formule d'inversion des intégrales orbitales et formule de Plancherel, to appear in J. Funct. Anal.
19. Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups II, Inventiones Math. **36**, 1–35 (1976)
20. Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups III, Ann. of Math. **104** 117–201 (1976)
21. Knapp, A., Stein, E., Intertwining operators for semisimple groups II, Inv. Math., **60**, 9–84 (1980)
22. Poulsen, N.,S., On C^∞ vectors and intertwining bilinear forms for representations of Lie groups, J. Funct. Anal., **9**, 87–120 (1972)
23. Wallach, N., R., Real reductive groups II, Academic Press, 1992
24. Warner, G., Harmonic analysis on semisimple Lie groups I, Springer Verlag, New York, 1972