

Espace de Schwartz pour la transformation de Fourier hypergéométrique

Patrick Delorme

Avec un appendice de Mustapha Tinfou

*Institut de Mathématiques de Luminy, U.P.R. 9016 du C.N.R.S.,
Université de la Méditerranée, 163 Avenue de Luminy, Case 907,
13288 Marseille Cedex 09, France*

Communicated by M. Vergne

Received February 1, 1999; revised May 10, 1999; accepted May 10, 1999

Let R be a reduced root system in an euclidean vector space E , W the Weyl group of R . One determines the hypergeometric Fourier transform (cf. E. Opdam, Cuspidal hypergeometric functions, preprint) of the related Schwartz space of W -invariant functions on E , introduced by Tinfou. The answer is very natural and quite similar to results of Harish-Chandra. The proof requires a theory of the constant term for W -invariant functions satisfying the hypergeometric system. This is analogous to Harish-Chandra's theory, once one has realized that simple difference operators play here the role of some elements of the unipotent radical of a parabolic subalgebra. Also, the fact that the parameter of cuspidal hypergeometric functions might be singular introduces new difficulties. This theory being established, one can take advantage of the techniques we used for real reductive symmetric spaces (cf. the introduction to the article by the author, Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs, *Ann. Math.* **147** (1998), 417–452), especially the truncation and its consequences. © 1999 Academic Press

0. INTRODUCTION

Soit R un système de racines réduit dans le dual $\mathfrak{a}^*$ d'un espace vectoriel euclidien $\mathfrak{a}$. Pour des raisons de récurrence, on ne suppose pas que R engendre $\mathfrak{a}^*$. On note W le groupe de Weyl correspondant, et, pour $\alpha \in R$, s_α la réflexion correspondante. On choisit un ensemble de racines positives R^+ . Soit $k \in \mathbb{C}^R$ une multiplicité, c'est à dire une fonction W -invariante sur R . Pour $X \in \mathfrak{a}$, on définit un opérateur agissant sur $C_c^\infty(\mathfrak{a})$, $T_X(k, R^+)$ par

$$T_X(k, R^+) = \partial_X - \rho(k)(X) + \sum_{\alpha \in R^+} k_\alpha \alpha(X) \Delta_\alpha$$

où $\rho(k) = 1/2 \sum_{\alpha \in R^+} k_\alpha \alpha$ et

$$(\Delta(\varphi))(X) = (1 - e^{-\langle X, \cdot \rangle})^{-1} (\varphi(X) - \varphi(s_\alpha(X))), \quad \varphi \in C(\alpha).$$

Les opérateurs $T_X(k, R^+)$ commutent entre eux (cf. par exemple [H, théorème 1.2]) et permettent de définir $T_p(k, R^+)$, $p \in S(\alpha)$ par la propriété universelle de $S(\alpha)$. Si $p \in S(\alpha)^W$, $T_p(k, R^+)$ agit sur $C(\alpha)^W$ comme un opérateur différentiel W -invariant, indépendant du choix de R^+ , $D_p(k)$.

On rappelle (cf. [O2, théorème 2.4 et les références citées là]) que la fonction hypergéométrique associée à R est une fonction de trois variables, $F(v, k)(X)$, W -invariante en v et X , définie et holomorphe, en particulier, pour $v \in \alpha_{\mathbb{C}}^*$, k élément de l'ensemble $\mathcal{K}$ des multiplicités et $X \in \alpha_{\mathbb{C}}$ vérifiant:

$$\operatorname{Re}(\rho(k)(\check{\beta}) + k_\beta + 1) > 0, \quad \text{si } \beta \text{ est la plus haute racine courte} \\ \text{d'une composante irréductible de } R$$

$$|\operatorname{Re} \alpha(X)| < 2\pi, \quad \alpha \in R$$

satisfaisant le système différentiel hypergéométrique:

$$D_p(k) F(v, k) = p(v) F(v, k), \quad p \in S(\alpha)^W, \quad v \in \alpha_{\mathbb{C}}^*,$$

et la condition de normalisation,

$$F(v, k)(0) \equiv 1.$$

On suppose en outre:

$$k_\alpha < 0, \quad \alpha \in R.$$

On note

$$\delta_k(X) = \prod_{\alpha \in R^+} |e^{\langle X, \alpha \rangle} - e^{-\langle X, \alpha \rangle}|^{2k_\alpha}, \quad X \in \alpha^{\text{reg}}$$

qui détermine une fonction localement intégrable sur α par rapport à la mesure de Lebesgue, avec nos hypothèses sur k . On note μ_k la mesure sur α de densité δ_k par rapport à la mesure de Lebesgue.

Opdam (cf. [O2, théorème 5.5]) a montré comment désintégrer les éléments de $L^2(\alpha, \mu_k)^W$. Nous allons donner ici une version légèrement modifiée de son résultat (cf. théorème 7(iii)).

Si P est une partie parabolique de R (cf. [Bou], chap. VI, 1.7, définition 4), on note $M_P = P \cap -P$. C'est un système de racines dans α . Soit

$$N_P = P \setminus M_P, \quad \alpha_P = \alpha_{M_P} = \bigcap_{\alpha \in M_P} \operatorname{Ker} \alpha, \quad \alpha^{M_P} = \alpha_P^\perp$$

On note $W(\alpha_p)$ l'ensemble des endomorphismes de α_p induit par des éléments de W préservant α_p . On note aussi k_{M_p} la restriction de k à M_p .

Deux parties paraboliques de R sont dites associées si les parties " M " correspondantes sont conjuguées par un élément de W . Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de représentants des classes d'association de parties paraboliques contenant R^- .

Si $P \in \mathcal{P}$, on note $(\alpha^{M_p})_{\text{disc}}^*(k_{M_p})$ l'ensemble des $\lambda \in (\alpha^{M_p})_{\mathbb{C}}^*$ tels que $F(\lambda, k_{M_p})$ (qui est une fonction sur α^{M_p}) soit définie et de carré intégrable pour $\mu_{k_{M_p}}$. D'après [HO2] et [O2], cet ensemble est fini et contenu dans $(\alpha^{M_p})^*$.

La transformée de Fourier hypergéométrique associe, à tout $f \in C_c(\alpha)^W$, une application $\mathcal{F}_k f$ définie sur $\coprod_{P \in \mathcal{P}} (\alpha^{M_p})_{\text{disc}}^*(k_{M_p}) \times i\alpha_p^*$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, par

$$\mathcal{F}_k f(\lambda, \nu) = (\text{Card } W(\alpha_p))^{-1} \int_{\alpha} f(X) \overline{F(\lambda + \nu, k)(X)} \delta_k(X) dX$$

pour $(\lambda, \nu) \in (\alpha^{M_p})_{\text{disc}}^*(k_{M_p}) \times i\alpha_p^*$. On note que l'égalité $F(\lambda, k) = F(w\lambda, k)$, $w \in W$, implique que, pour $\Psi = \mathcal{F}_k f$, on a

$$\Psi(w\lambda, w\nu) \equiv \Psi(\lambda, \nu), \quad w \in N_W(\alpha_p),$$

où $N_W(\alpha_p)$ est le normalisateur dans W de α_p .

La formule de Plancherel d'Opdam assure que $\mathcal{F}_k$ s'étend en une isométrie bijective entre $L^2(\alpha, \mu_k)^W$ et

$$\bigoplus_{P \in \mathcal{P}} (L^2((\alpha^{M_p})_{\text{disc}}^*(k_{M_p})) \otimes L^2(i\alpha_p^*, c_{4,k}^{-2} |c(k, \lambda, \nu)|^{-2} d\nu)^{N_W(\alpha_p)})$$

où $c_{4,k}$ est une constante strictement positive et

$$c(k, \lambda, \nu) = c'_{4,k} \prod_{\alpha \in R^+, :|\alpha_p \neq 0} \Gamma(-(\lambda + \nu)(\check{\alpha})) / \Gamma(-(\lambda + \nu)(\check{\alpha}) + k \cdot)$$

où $c'_{4,k}$ est une autre constante strictement positive.

Comme on l'a dit, ceci peut se déduire du travail d'Opdam (cf. [O2], théorème 5.5), joint à sa solution de la question (5.6) de l.c., qu'il nous a communiquée. On présente au théorème 7, un point de vue un peu différent, mais reposant aussi sur [O2]. On définit une fonction θ_k sur α par

$$\theta_k(X) = e^{-\langle k \rangle(X_+)}$$

où X_+ est l'unique élément de la chambre de Weyl positive fermée conjugué à X par un élément de W . L'espace de Schwartz $\mathcal{C}(\alpha, k)$ a été étudié

d'abord par Mustapha Tinfou dans le but de trouver une limitation à priori sur les fonctions hypergéométriques intervenant dans la formule de Plancherel, dans l'esprit du travail de J. Bernstein [Be]. M. Tinfou présente une partie de ses résultats dans l'appendice A.

L'espace de Schwartz $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)$ est l'espace des fonctions φ, C^∞ sur $\mathfrak{a}$, telles que:

$$\sup_{X \in \mathfrak{a}} |\Theta_k^{-1}(X)(1 + \|X\|)^n \partial_p \varphi(X)| < +\infty, \quad p \in S(\mathfrak{a}), \quad n \in \mathbb{N}$$

C'est un sous-espace dense de $L^2(\mathfrak{a}, \mu_k)$.

On dit que $f \in C^\infty(\mathfrak{a})$ est k -tempérée si, pour tout $p \in S(\mathfrak{a})$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que:

$$\sup_{X \in \mathfrak{a}} |\Theta_k^{-1}(X)(1 + \|X\|)^{-n} \partial_p \varphi(X)| < +\infty$$

Notons $\mathcal{S}(E)$ l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide sur un espace vectoriel réel E . On définit:

$$\mathcal{S}_k^W = \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} (l^2((\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P})) \otimes \mathcal{S}(i\mathfrak{a}_P^*))^{N_W(\mathfrak{a}_P)}$$

THÉORÈME. Pour $\Psi \in \mathcal{S}_k^W$, la fonction $\mathcal{I}_k \Psi$, sur $\mathfrak{a}$ est bien définie par:

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_k \Psi)(X) = & \sum_{P \in \mathcal{P}, \lambda \in (\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P})} \int_{i\mathfrak{a}_P^*} \Psi(\lambda, \nu) F(\lambda + \nu, k)(X) \\ & \times c_{4,k}^{-2} |c(k, \lambda, \nu)|^{-2} d\nu \end{aligned}$$

pour tout $X \in \mathfrak{a}$. C'est un élément de $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)^W$.

La transformation de Fourier hypergéométrique $\mathcal{F}_k$ s'étend en une bijection entre $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)^W$ et $\mathcal{S}_k^W$, d'inverse $\mathcal{I}_k$.

Pour démontrer ce théorème, on utilise des techniques analogues à celles que nous avons utilisées pour la formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs. D'abord on rappelle certaines propriétés simples des opérateurs de Dunkl et l'analogie de résultats de Casselman et Millicic (cf. [CassM]). On développe au paragraphe 3 (théorèmes 1 et 2) la théorie du terme constant pour une fonction tempérée, en suivant de près les arguments d'Harish-Chandra ([HC1]). Le point crucial est de substituer à l'utilisation des éléments X de l'algèbre de Lie du groupe, par Harish-Chandra, celle des λ (cf. l'appendice A de M. Tinfou).

La non régularité éventuelle des éléments de $(\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P})$ par rapport à M_P , rend plus délicate la théorie du terme constant pour les familles de

fonctions (fonctions I_{hol}). La propriété suivante permet de pallier à ce défaut de régularité (cf. paragraphe 4.3).

On appelle sous-espace tempéré, tout sous-espace de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ conjugué sous W à un sous-espace de la forme $\Lambda + i\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^*$, $P \in \mathcal{P}$, $\Lambda \in (\mathfrak{a}^{\text{Mp}})_{\text{disc}}^*(k_{\text{Mp}})$. Il résulte du travail d'Opdam [O2, théorème 5.7] et d'Heckman et Opdam [HO2, remarque 3.14] que deux sous-espaces tempérés inclus l'un dans l'autre sont égaux.

Nous avons essayé de tirer le meilleur parti de l'utilisation de la théorie spectrale des matrices (résolvante, etc.) dont nous donnons quelques conséquences dans l'appendice B. Cela nous est utile pour étudier le terme constant des fonctions I_{hol} , en particulier son holomorphie par rapport au paramètre indexant la famille (cf. théorèmes 3 et 4). On espère avoir, au passage, simplifié certains aspects du travail d'Harish-Chandra.

On établit aussi des estimations uniformes fines de la fonction hypergéométrique, en partant d'estimées plus grossières dues à Opdam [O2], et grâce à une adaptation d'une technique d'E. van den Ban (cf. [B], voir aussi [D2]).

Alors, les techniques de la troncature [D3] et des fonctions c de [CD] s'adaptent sans difficulté. Elles conduisent à un théorème analogue à celui annoncé, pour la transformation de Fourier hypergéométrique normalisée (théorème 6, paragraphe 5). On détermine explicitement les fonctions c qui interviennent (cf. Paragraphe 5, théorème 5), ce qui permet d'en déduire les propriétés nécessaires au passage de la transformation de Fourier hypergéométrique normalisée à la transformée de Fourier hypergéométrique.

1. OPÉRATEURS DE DUNKL ET ESPACES ASSOCIÉS

1.1.

Soit $\mathfrak{a}$ un espace vectoriel euclidien de dimension finie et soit R un système de racines réduit dans le dual $\mathfrak{a}^*$ de $\mathfrak{a}$. On ne suppose pas que R engendre $\mathfrak{a}^*$. Pour $\alpha \in R$, soit $\check{\alpha} = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ sa coracine et $s_{\check{\alpha}} : \lambda \mapsto \lambda - \lambda(\check{\alpha})\alpha$ la réflexion correspondante dans $\mathfrak{a}^*$. Soit W le groupe de Weyl de R , qui est engendré par les $s_{\check{\alpha}}$, $\alpha \in R$. Par dualité W agit sur $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}^*$. On suppose que le produit scalaire est invariant par W . On note $\mathfrak{a}_R$ l'orthogonal de R dans $\mathfrak{a}$. Soit $\check{R}$ le système formé des coracines. On note $\mathcal{Q} = \mathbb{Z}\check{R}$ le réseau engendré par les coracines. Soit $\mathcal{R}$ la sous-algèbre à unité de l'algèbre des fonctions sur $\mathfrak{a}^{\text{reg}} = \{X \in \mathfrak{a} \mid \alpha(X) \neq 0, \alpha \in R\}$ engendrée par les $(1 - e^{\cdot})^{-1}$, $\alpha \in R$. Cette algèbre est invariante par l'action naturelle de W sur les fonctions sur $\mathfrak{a}$.

On fixe un ensemble de racines positives R^+ de R . Soit $P_{\prec}$ un autre ensemble de racines positives. On note C^+ (resp. $C_{P_{\prec}}$) la chambre de Weyl

positive correspondante on note aussi $R^- = -R^+$, $C^- = -C^+$. On peut, dans la définition de $\mathcal{R}$, se limiter à α dans R^+ , car on a: $1 - (1 - e^\alpha)^{-1} = (1 - e^{-\alpha})^{-1}$.

Soit $\mathbb{C}[W]$ l'algèbre du groupe W . On munit $\mathcal{A} := \mathcal{R} \otimes S(\mathfrak{a}) \otimes \mathbb{C}[W]$ de la structure d'algèbre qui fait de l'algèbre des fonctions C^∞ sur $\mathfrak{a}^{\text{reg}}$, $C^\infty(\mathfrak{a}^{\text{reg}})$ un $\mathcal{A}$ -module à gauche pour l'action définie par:

$$(f \otimes p \otimes w) \varphi = f \partial_p(w\varphi), \quad f \in \mathcal{R}, \quad p \in S(\mathfrak{a}), \quad w \in W, \quad \varphi \in C^\infty(\mathfrak{a}^{\text{reg}})$$

où ∂_p est l'opérateur différentiel à coefficients constants correspondant à l'élément p de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ et où l'on a posé: $w\varphi(X) = \varphi(w^{-1}X)$, $w \in W$, $X \in \mathfrak{a}^{\text{reg}}$. On note $\mathcal{D}$ la sous algèbre $\mathcal{R} \otimes S(\mathfrak{a})$ de $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{K} = \{k \in \mathbb{C}^R \mid k_w = k_\cdot, w \in W, \alpha \in R\}$ l'espace des multiplicités de R . Pour $X \in \mathfrak{a}$, on définit l'élément $T_X(k, R^+)$ de $\mathcal{A}$ par:

$$T_X(k, R^+) = \partial_X - \rho(k)(X) + \sum_{\alpha \in R^+} k_\alpha \alpha(X) (1 - e^{-\alpha})^{-1} \otimes (1 - s_\alpha) \quad (1.1)$$

où $\rho(k) = 1/2 \sum_{\alpha \in R^+} k_\alpha \alpha$. Les opérateurs $T_X(k, R^+)$ préservent $C^\infty(\mathfrak{a})$ et commutent entre eux (cf. par exemple [H], théorème 1.2). Alors la linéarité de $X \mapsto T_X(k, R^+)$ permet de définir un homomorphisme d'algèbre $p \mapsto T_p(k, R^+)$ de $S(\mathfrak{a})$ dans $\mathcal{A}$. Si p est W -invariant (i.e., est un élément de $S(\mathfrak{a})^W$), $T_p(k, R^+)$ est lui-même W -invariant (cf. par exemple [O1], corollaire 2.9 et Proposition 1.1(4)). On note $\mathbb{T}(k, R^+) := \{T_p(k, R^+) \mid p \in S(\mathfrak{a})\}$ et $\mathbb{T}(k, R^+)^W := \{T_p(k, R^+) \mid p \in S(\mathfrak{a})^W\}$. Soit (τ, V_τ) une représentation de dimension finie de W . On note $C^\infty(\mathfrak{a}, \tau)$ l'espace des fonctions, $\varphi \in C^\infty(\mathfrak{a}, \tau)$, τ -sphériques sur $\mathfrak{a}$, i.e., telles que $\varphi(w(X)) = \tau(w) \varphi(X)$, $X \in \mathfrak{a}$, $w \in W$. Alors, si $p \in S(\mathfrak{a})$, $T_p(k, R^+)$ envoie $C^\infty(\mathfrak{a}, \tau)$ dans $C^\infty(\mathfrak{a}, V_\tau)$. De plus $T_p(k, R^+)$ agit sur $C^\infty(\mathfrak{a}, \tau)$ comme l'opérateur différentiel sur $\mathfrak{a}$ à coefficients dans $\text{End}(V_\tau)$, noté $D_p(k, R^+, \tau)$ obtenu en remplaçant les éléments w dans l'expression de $T_p(k, R^+)$ par $\tau(w)$. Si $p \in S(\mathfrak{a})^W$, comme $T_p(k, R^+)$ commute à l'action de W , $D_p(k, R^+, \tau)$ préserve $C^\infty(\mathfrak{a}, \tau)$. Si de plus τ est la représentation triviale de dimension 1 de W , ε , on a $C^\infty(\mathfrak{a}, \varepsilon) = C^\infty(\mathfrak{a})^W$. Pour $p \in S(\mathfrak{a})^W$, on notera $D_p(k, R^+)$ l'opérateur différentiel $D_p(k, R^+, \varepsilon)$, qui est W -invariant grâce à l'invariance sous W de $T_p(k, R^+)$ et au lemme 1.2.2, Partie I de [HS]. On notera $\mathbb{D}(k, R^+)$ l'algèbre d'opérateurs différentiels engendrée par les $D_p(k, R^+)$, $p \in S(\mathfrak{a})^W$. L'application $p \mapsto D_p(k, R^+)$ est un homomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{a})^W$ dans $\mathbb{D}(k, R^+)$.

On introduit une fonction δ_k sur $\mathfrak{a}^{\text{reg}}$ par:

$$\delta_k(X) = \prod_{\alpha \in R^+} |e^{\alpha(X)/2} - e^{-\alpha(X)/2}|^{2k_\alpha}, \quad X \in \mathfrak{a}^{\text{reg}} \quad (1.2)$$

On note dX la mesure de Lebesgue sur $\mathfrak{a}$ associée à sa structure euclidienne et $\mu_k = \delta_k dX$. Soit $\mathcal{K}_1$ l'ensemble des multiplicités k telles que pour tout $X \in \mathfrak{a}$ avec $R_X \neq \emptyset$, on ait

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{\cdot \in R_X} k_{\cdot} \right) + \operatorname{rg}(R_X) > 0 \quad (1.3)$$

où $R_X = \{\alpha \in R \mid \alpha(X) = 0\}$ et $\operatorname{rg}(R_X)$ est le rang de ce système de racines. C'est un ensemble convexe ouvert. Si $k \in \mathcal{K}_1$, δ_k est localement intégrable par rapport à dX (cf. [BrHO], proposition 2.1). De plus si $k_0 \in \mathcal{K}_1$ et $X_0 \in \mathfrak{a}$, il existe un voisinage compact de k_0 , $V(k_0)$, un voisinage compact de X_0 , $V(X_0)$, une fonction intégrable sur $V(X_0)$, φ_0 , tels que:

$$|\delta_k(X)| \leq \varphi_0(X), \quad k \in V(k_0), \quad X \in V(X_0) \quad (1.4)$$

Soit $f, g \in C(\mathfrak{a})$ avec l'une de ces fonctions à support compact. Alors, pour $X_0 \in \mathfrak{a}$, $k \in \mathcal{K}_1$, on a:

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{a}} (T_{X_0}(k, R^+) f)(X) g(X) \delta_k(X) dX \\ &= \int_{\mathfrak{a}} f(X) (T_{-w_0 X_0}(k, R^+) w_0 g)(X) \delta_k(X) dX \end{aligned} \quad (1.5)$$

où w_0 est l'élément de plus grande longueur de W relativement à R^+ . En effet d'après [O1], lemme 7.8, cette formule est vraie dès que $k_{\cdot} > 0$ pour tout $\alpha \in R$. Par ailleurs il résulte de (1.4) que les deux membres de (1.5) sont holomorphes en $k \in \mathcal{K}_1$. On en déduit le résultat par prolongement analytique.

Si P est une partie parabolique de R , on note M_P ou M l'ensemble des éléments α de R tels que α et $-\alpha$ soient éléments de P . C'est un système de racines dans $\mathfrak{a}$. On note W_M son groupe de Weyl et $M^+ = M \cap R^+$. Soit N_P ou N le complémentaire de M dans P et $\mathfrak{a}_P$ ou $\mathfrak{a}_M$ l'ensemble $\{X \in \mathfrak{a} \mid \alpha(X) = 0, \alpha \in M\}$. On note $\mathfrak{a}^P$ ou $\mathfrak{a}^M$ l'orthogonal de $\mathfrak{a}_P$ dans $\mathfrak{a}$. On désigne par $\mathcal{R}_M$ la sous algèbre à unité de $\mathcal{R}$ engendrée par les $(1 - e^{-\cdot})^{-1}$, $\alpha \in M$ et par $\mathcal{R}_P^+$, l'idéal de $\mathcal{R}$ engendré par les $(1 - e^{-\cdot})^{-1} - 1 = e^{-\cdot}(1 - e^{-\cdot})^{-1}$, $\alpha \in N$. On se fixe $X_P \in \mathfrak{a}_P$ tel que $\alpha(X_P) > 0$ si $\alpha \in N$. Alors on a:

LEMME 1. (i) Si $\varphi \in \mathcal{R}$, pour tout $X \in \mathfrak{a}$, la limite $\lim_{t \rightarrow +} \varphi(X + tX_P)$ existe et définit un élément φ^P de $\mathcal{R}_M$. De plus $\varphi - \varphi^P$ est un élément de $\mathcal{R}_P^+$.

(ii) On a $\mathcal{R} = \mathcal{R}_M \oplus \mathcal{R}_P^+$ et φ^P est la projection de φ sur $\mathcal{R}_M$ parallèlement à $\mathcal{R}_P^+$. Cette projection est un morphisme d'algèbres.

(iii) L'idéal $\mathcal{R}_p^+$ de $\mathcal{R}$ est stable par les opérateurs ∂_p , $p \in S(\mathfrak{a})$ et par l'action de W_M .

(iv) On définit une application linéaire γ'_p de $\mathcal{D} = \mathcal{R} \otimes S(\mathfrak{a})$ dans $\mathcal{D}_M = \mathcal{R}_M \otimes S(\mathfrak{a})$ par:

$$\gamma'_p(\varphi \otimes p) = \varphi^p \otimes p, \quad \varphi \in \mathcal{R}, \quad p \in S(\mathfrak{a})$$

Alors γ'_p est un morphisme d'algèbres d'opérateurs différentiels sur $\mathfrak{a}^{\text{reg}}$ et on a:

$$\gamma'_p(D) - D \in \mathcal{R}_p^+ \otimes S(\mathfrak{a}), \quad D \in \mathcal{D}$$

On définit enfin un opérateur γ_p de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}_M = \mathcal{R}_M \otimes S(\mathfrak{a})$ en posant:

$$\gamma_p := e^{\backslash p(k)} \circ \gamma'_p \circ e^{-\backslash p(k)}$$

où $\rho_p(k) = 1/2 \sum_{i \in \mathbb{N}} k_i \alpha_i$.

Démonstration. L'existence de φ^p est immédiate grâce aux propriétés des générateurs de $\mathcal{R}$. De même il est clair que $\varphi^p = \varphi$ si $\varphi \in \mathcal{R}_M$ et que $\varphi^p = 0$ si $\varphi \in \mathcal{R}_p^+$. D'autre part $\mathcal{R}$ est la somme de $\mathcal{R}_M$ et de $\mathcal{R}_p^+$. D'après ce qui précède on conclut que la somme est directe et que φ_p est la projection de φ sur $\mathcal{R}_M$ parallèlement à $\mathcal{R}_p^+$. D'où (i) et (ii) puisque $\mathcal{R}_p^+$ est un idéal de $\mathcal{R}$.

Montrons (iii). On a:

$$\partial_X(1 - e^{-\cdot})^{-1} = -\alpha(X) e^{-\cdot} (1 - e^{-\cdot})^{-2}, \quad X \in \mathfrak{a}, \quad \alpha \in R$$

Donc si $\alpha \in N$, $\partial_X((1 - e^{-\cdot})^{-1} - 1)$ est élément de $\mathcal{R}_p^+$. Par application de la règle de dérivation des produits, on en déduit que $\mathcal{R}_p^+$ est un idéal de $\mathcal{R}$ invariant par les ∂_X , $X \in \mathfrak{a}$, donc par les ∂_p , $p \in S(\mathfrak{a})$. L'invariance de N sous W_M implique immédiatement celle de $\mathcal{R}_p^+$. D'où (iii).

Alors (iv) est une conséquence immédiate de (iii). ■

Pour exprimer la dépendance de γ_p et γ'_p par rapport à R , on notera parfois γ_p^R et $\gamma'_p{}^R$. Soit Q une partie parabolique de R contenue dans P . Alors $Q \cap M_p$ est une partie parabolique de M_p . On établit aisément:

$$\gamma_Q'^R = \gamma_{Q \cap M_p}^{M_p} \circ \gamma_p'^R \quad (1.6)$$

puis la même chose en remplaçant γ' par γ .

Alors, d'après [O1, théorème 2.12(2)], on a:

$$\gamma_{R^+}(D_p(k, R^+)) = p, \quad p \in S(\mathfrak{a})^W$$

Par ailleurs l'algèbre $\mathbb{D}(k, R^+)$ peut être présentée comme le commutant dans l'algèbre $\mathcal{D}$, d'un opérateur $L(k)$ (cf. [HS] Partie I, théorème 1.3.9, 1.3.12 et équation précédente) dont on vérifie aisément qu'il ne dépend pas de R^+ (cf. l.c. équation 1.2.6, pour la définition de $L(k)$). On notera désormais cette algèbre $\mathbb{D}(k)$.

Comme, pour $p \in S(\mathfrak{a})^W$, $D_p(k, R^+)$ est W -invariant, un calcul facile montre que, si $P_{<} = w(R^+)$, on a:

$$\gamma_{R^+}(D_p(k, R^+)) = w(\gamma_{P_{<}}(D_p(k, R^+))), \quad p \in S(\mathfrak{a})^W$$

d'où l'on déduit:

$$\gamma_{P_{<}}(D_p(k, R^+)) = p, \quad p \in S(\mathfrak{a})^W \quad (1.7)$$

En particulier $\gamma_{P_{<}}$ restreint à $\mathbb{D}(k)$ ne dépend pas de $P_{<}$, et, en tenant compte du fait que $\mathbb{D}(k)$ ne dépend pas de R^+ , on voit aussi que

$$D_p(k, R^+), \quad p \in S(\mathfrak{a})^W \text{ ne dépend pas de } R^+ \quad (1.8)$$

On les notera respectivement $\gamma(k)$ et $D_p(k)$. Enfin, on déduit de (1.6) et (1.7):

$$\gamma_P^R(D_p(k)) = D_p(k_M), \quad p \in S(\mathfrak{a})^W \quad (1.9)$$

où k_M est la restriction de la multiplicité k à M .

2.1.

On fixe une multiplicité k . On utilise les notations et résultats de l'appendice A de M. Tinfou. On note, pour $r \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathfrak{a}$, $N_r(X) := (1 + \|X\|)^r$.

On note $\mathcal{F}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k)$ l'espace des éléments φ de $C^\infty(\mathfrak{a})$ tels que, pour tout $p \in S(\mathfrak{a})$, il existe $m \in \mathbb{N}$ et $C \geq 0$ vérifiant:

$$|(\partial_p \varphi)(X)| \leq CN_m(X) |\Theta_k(X)|, \quad X \in \mathfrak{a}, \quad p \in S(\mathfrak{a})$$

Pour F partie finie de $S(\mathfrak{a})$ et $r \in \mathbb{R}$, on définit:

$$s_{F,r}^k(\varphi) = \sup_{p \in F, X \in \mathfrak{a}} |N_{-r}(X)(\Theta_k(X))^{-1} \partial_p \varphi(X)|$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate des lemmes A.1(ii), (iv) et A.2(ii).

LEMME 2. Soit $p \in S(\alpha)$ (resp. $\alpha \in R^+$). On note T l'opérateur ∂_p (resp. Δ). On fixe $r > 0$.

(i) Si q est un élément de $S(\alpha)$, il existe une partie finie, F , de $S(\alpha)$ telle que, pour tout $\varphi \in C(\alpha)$:

$$s_{q,r}^k(T(\varphi)) \leq s_{F,r}^k(\varphi)$$

(ii) T laisse $\mathcal{F}_{\text{temp}}(\alpha, k)$ invariant.

On notera $\mathcal{A}(\alpha, k)$ (resp. $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\alpha, k)$) l'espace formé des éléments de $C(\alpha)$ (resp. $\mathcal{F}_{\text{temp}}(\alpha, k)$) qui sont $\mathbb{T}(k, R^+)$ -finis. On remarquera, que $S(\alpha)$ étant un $S(\alpha)^W$ -module de type fini, cette condition de finitude équivaut, pour les éléments de $C(\alpha)^W$, à être de type fini sous $\mathbb{D}(k)$.

COROLLAIRE 1. L'algèbre $\mathbb{T}(k, R^+)$ opère sur $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\alpha, k)$, de même que $\mathbb{D}(k)$ opère sur $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\alpha, k)^W$.

On suppose désormais que k est un élément de $\mathcal{K}_1$ à valeurs réelles. Alors δ_k est positive et localement intégrable et, tenant compte de la proposition A.2, on définit une application sesquilinéaire sur $\mathcal{C}(\alpha, k) \times \mathcal{F}_{\text{temp}}(\alpha, k)$, donnée par:

$$(\varphi, \psi) = \int_{\alpha} \varphi(X) \bar{\psi}(X) \delta_k(X) dX, \quad \varphi \in \mathcal{C}(\alpha, k), \quad \psi \in \mathcal{F}_{\text{temp}}(\alpha, k) \quad (1.10)$$

Cette forme est continue dans sa première variable, d'après la proposition A.2(ii). On définit une involution antilinéaire de $S(\alpha)$, $p \mapsto p^*$ caractérisée par $X^* = -X$, $X \in \alpha$. On va voir que:

$$(T_p(k) \varphi, \psi) = (\varphi, T_{(w_0 p)^*}(k) w_0 \psi), \quad \varphi \in \mathcal{C}(\alpha, k), \quad (1.11)$$

$$\psi \in \mathcal{F}_{\text{temp}}(\alpha, k), \quad p \in S(\alpha)$$

où w_0 est l'élément de plus grande longueur de W relativement à R^+ . En effet, l'égalité est vraie pour tout $\varphi \in C_c(\alpha)$ et $\psi \in \mathcal{F}_{\text{temp}}(\alpha, k)$, d'après (1.5). Mais le premier et le second membre de l'égalité ci-dessus sont continus en $\varphi \in \mathcal{C}(\alpha, k)$, d'après les propriétés de $(\cdot, \cdot)$ et la proposition A.1(ii). Joint à la densité de $C_c(\alpha)$ dans $\mathcal{C}(\alpha, k)$, cela implique le résultat. En particulier, on a:

$$(D_p(k) \varphi, \psi) = (\varphi, D_{p^*}(k) \psi), \quad \varphi \in \mathcal{C}(\alpha, k)^W, \quad (1.12)$$

$$\psi \in \mathcal{F}_{\text{temp}}(\alpha, k)^W, \quad p \in S(\alpha)^W$$

2. PROPRIÉTÉS ASYMPTOTIQUES DES ÉLÉMENTS DE $\mathcal{A}(\alpha, k)^W$

Soit I un idéal de codimension finie de $S(\alpha)^W$. On note $\mathcal{D}_I(k)$ l'idéal à gauche de $\mathcal{D} = \mathcal{R} \otimes S(\alpha)$ engendré par les $D_p(k)$, $p \in I$. On s'intéresse à l'espace $\mathcal{A}_I(\alpha, k)^W$ des éléments W -invariants de $\mathcal{A}(\alpha, k)$ qui sont annihilés par $\mathcal{D}_I(k)$. On filtre l'algèbre $\mathcal{A} := \mathcal{R} \otimes S(\alpha) \otimes \mathbb{C}[W]$ par le degré des éléments de $S(\alpha)$. Cette filtration est compatible avec le produit. On filtre de même $\mathcal{D}$.

LEMME 3. (i) Si $p \in S(\alpha)$ est homogène de degré n , $T_p(k, R^+) - 1 \otimes p \otimes 1$ est de degré strictement inférieur à n .

(ii) Si $p \in S(\alpha)^W$ est homogène de degré n , $D_p(k) - 1 \otimes p$ est de degré strictement inférieur à n

(iii) Le gradué de $\mathcal{D}_I(k)$, $\text{Gr}(\mathcal{D}_I(k))$ contient $1 \otimes \text{Gr}(I)$, où $\text{Gr}(I)$ est le gradué de I .

Démonstration. (i) se démontre par récurrence sur le degré de p , le cas où p est de degré 1 étant immédiat grâce à la définition des opérateurs de Dunkl. Alors (ii) en résulte puisque $D_p(k)$ est l'opérateur différentiel déduit de $T_p(k, R^+)$ en y remplaçant les $w \in W$ par 1. Alors (iii) résulte de (ii). ■

PROPOSITION 1. Soit H l'espace des polynômes W -harmoniques sur $\alpha_{\mathbb{C}}^*$. Soit V un supplémentaire de I dans $S(\alpha)^W$ engendré par des éléments homogènes et contenant 1. Alors:

(i) L'espace $U := VH$ est un supplémentaire de $S(\alpha)I$ dans $S(\alpha)$.

(ii) Son image dans $\mathcal{D}/\mathcal{D}_I(k)$ est un système de générateurs de ce $\mathcal{R}$ -module.

Démonstration. Comme $HS(\alpha)^W = S(\alpha)$, (i) est clair. Pour (ii), il suffit de montrer, par récurrence sur le degré, que tout $p \in \mathcal{D}$ est un élément du $\mathcal{R}$ -module, $\mathcal{R} \otimes U + \mathcal{D}_I(k)$. On peut se limiter à $p \in S(\alpha)$. Soit $h_1, \dots, h_l$, une base de H . On écrit: $p = \sum_{i=1, \dots, l} h_i p_i$ où $p_i \in S(\alpha)^W$, puis: $p_i = q_i + u_i$ avec $q_i \in I$ et $u_i \in V$. Alors d'après le lemme précédent, $D_{q_i}(k) - q_i$ est un élément de $\mathcal{D}$ de degré strictement inférieur à celui de p . On conclut aisément grâce à l'hypothèse de récurrence. ■

Remarque 1. Si I est l'idéal des éléments de $S(\alpha)^W$ s'annulant en $v \in \alpha_{\mathbb{C}}^*$, on peut prendre $V = \mathbb{C}1$, et, avec les notations de la démonstration de la proposition ci-dessus, on a $u_i = p_i(v)$ et $q_i = p_i - p_i(v)$.

On note $u_1, \dots, u_r$ une base de U formée d'éléments homogènes. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ une base de α_R^* et $H_{\lambda_1}, \dots, H_{\lambda_n}$ la base de α_R duale de celle-ci. On

note $A = \Sigma \cup \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, où Σ est l'ensemble des racines simples de R^+ . On pose, pour $\varphi \in \mathcal{A}_1(\mathfrak{a}, k)^W$:

$$\Phi = (\partial_{u_1} \varphi, \dots, \partial_{u_r} \varphi) \quad (2.1)$$

Alors, on a:

$$\partial_{H_*} \Phi = G_* \Phi, \quad \lambda \in A \quad (2.2)$$

où G_* est une matrice carrée d'ordre r , à coefficients dans $\mathcal{R}$. En effet, pour tout $p \in S(\mathfrak{a})$ et tout i , pu_i est égal, modulo $\mathcal{D}_1$, à une combinaison linéaire à coefficients dans $\mathcal{R}$ des u_i , d'après la proposition 1(ii). Comme φ est annulée par $\mathcal{D}_1$, on a le résultat voulu.

Identifiant $\mathfrak{a}$ à une partie de $\mathbb{C}^4$, en associant à $X \in \mathfrak{a}$, $z(X) = (z_*(X))_{* \in 4}$, où $z_*(X) = e^{*(X)}$, le système précédent devient:

$$z_* \partial_{z_*} \Phi = G_* \Phi, \quad \lambda \in A \quad (2.3)$$

où G_* a des pôles seulement sur $Y = \bigcup_{* \in \mathbb{R}} \{z \in \mathbb{C}^4 \mid z_* = 1\}$.

Le travail de Casselman et Millicic, [CassM], s'adapte à notre situation. Précisons. On note $\leqslant_{\mathbb{R}-}$ l'ordre sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ défini par $\nu \leqslant_{\mathbb{R}-} \mu$ si et seulement si $\mu - \nu$ est combinaison linéaire, à coefficients entiers positifs ou nuls, d'éléments de R^- . On dit que ν et μ sont R -intégralement équivalents si et seulement si $\nu - \mu$ est combinaison linéaire, à coefficients entiers, d'éléments de R .

Pour $m \in \mathbb{N}^4$, on note $X^m = \prod_{* \in 4} \lambda(X)^{m_*}$. On montre comme dans [CassM], théorème 5.7:

PROPOSITION 2. *Soit $\varphi \in \mathcal{A}(\mathfrak{a}, k)^W$. On note D le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$.*

Il existe un ensemble fini, S , d'éléments mutuellement R -intégralement inéquivalents de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^$ et, pour chaque $\nu \in S$, des fonctions $\varphi_{\&, m}$ holomorphes non triviales sur D^7 , où m décrit un ensemble fini de $\mathbb{N}^4$, telles que, sur chacun des hyperplans coordonnées, au moins l'une d'entre elles soit non nulle et vérifiant:*

$$\varphi(X) = \sum_{\&, m} \varphi_{\&, m}(z(X)) e^{\&(X)} X^m, \quad X \in C^-$$

Cet ensemble S et les $\varphi_{\&, m}$ sont uniques.

Développant les $\varphi_{\&, m}$ en série entière, on a:

$$\varphi_{\&, m}(z) = \sum_{r \in \mathbb{N}^7} c_{\&+r, m} z^r$$

où $\bar{r} = \sum_{\alpha \in \gamma} r_{\alpha}$ et on peut écrire:

$$\varphi(X) = \sum_{+ \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*} c_{+,m} e^{+(X)} X^m, \quad X \in C^-$$

où les $c_{+,m}$ qui n'ont pas été définis ci-dessus sont nuls. La convergence est absolue. Les $c_{+,m}$ vérifiant ces propriétés sont uniques. Si $c_{+,m} \neq 0$, pour un $m \in \mathbb{N}^4$, on dit que μ est un exposant de φ le long de R^- . Les exposants directeurs de φ le long de R^- sont les exposants maximaux pour l'ordre $\leq_{R^-}$. Pour $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, on note I_* l'idéal de $S(\mathfrak{a})^W$, formé de ses éléments s'annulant en λ . Noter que $I_* = I_{w*}$ pour $w \in W$.

PROPOSITION 3. *Soit I un idéal de codimension finie de $S(\mathfrak{a})^W$. Soit $\varphi \in \mathcal{A}_1(\mathfrak{a}, k)^W$. L'ensemble de ses exposants directeurs le long de R^- est contenu dans l'ensemble $\{\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \mid I \subset I_{*-\backslash(k)}\}$. En particulier, si I est égal à l'idéal $I_{\mathfrak{k}}$, $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, les exposants directeurs de φ le long de R^- , sont des éléments de l'ensemble $\{w\nu + \rho(k) \mid w \in W\}$*

Démonstration. En effet si $p \in S(\mathfrak{a})$, on a $D_p(k) - \gamma'_{R^-}(D_p(k)) \in \mathcal{R}_{R^-}^+ \otimes S(\mathfrak{a})$, d'après le lemme 1(iv). Par ailleurs, tout élément φ de $\mathcal{R}_{R^-}^+$ admet un développement en série de la forme $\varphi(X) = \sum_{+ \in \mathbb{N}^4, + \neq 0} a_+ z(X)^+$, pour $X \in C^-$. On suit la démonstration du théorème 5.2 de [CassM] pour voir que, si ν est un exposant directeur de φ le long de R^- , et $p \in I$, $\gamma'_{R^-}(D_p(k))(\nu)$ est nul. Mais $\gamma'_{R^-}(D_p(k))(\nu) = \gamma_{R^-}(k)(D_p(k))(\nu - \rho(k))$, d'après la définition de γ_{R^-} (lemme 1). Alors, on déduit le résultat de (1.7). ■

Pour pouvoir faire le développement le long des murs, il est nécessaire de montrer que, pour tout I , idéal de codimension finie de $S(\mathfrak{a})^W$, on a:

$$\text{Tout élément } \varphi \text{ de } \mathcal{A}_1(\mathfrak{a}, k) \text{ est analytique sur } \mathfrak{a}. \quad (2.4)$$

Ceci est lié au système satisfait par φ :

$$D_p(k)\varphi = 0, \quad p \in I. \quad (2.5)$$

Nous allons utiliser l'appendice A de [BD], qui est de nature élémentaire, car basé uniquement sur les propriétés des équations différentielles de type Fuchs, à une variable, mais à coefficients dans un espace de Banach (ce qui ne change pas grand chose). Afin de s'en servir, on montre aisément, par récurrence sur le degré de p , que pour tout $p \in S(\mathfrak{a})$, $T_p(k, R^+)$ peut s'écrire comme une somme d'éléments de $\mathcal{A}$ (cf. paragraphe 1.1) de la forme $f \otimes q \otimes w$, où $w \in W$, $q \in S(\mathfrak{a})$ est homogène de degré inférieur ou égal à celui de p , et f est un produit de fonctions du type $(1 - e^{-\cdot})^{-1}$, $\alpha \in R^+$,

dont le nombre de facteurs est inférieur ou égal au degré de p diminué du degré de q (cf. le début de la preuve du lemme A.1). Par ailleurs, pour tout $p \in S(\alpha)^W$, le symbole principal de $D_p(k)$ est égal à la composante homogène de p de degré le degré de p . En outre, comme I est idéal de codimension finie dans $S(\alpha)^W$, il en va de même du gradué de I et, comme $S(\alpha)$ est un module de type fini sous $S(\alpha)^W$, l'idéal de $S(\alpha)$ engendré par ce gradué est de codimension finie.

On fixe $X_0 \in \alpha$. Ce qui précède permet d'appliquer le théorème A.1 de [BD] à la famille d'opérateurs différentiels D_p , $p \in I$, en identifiant $\alpha_{\mathbb{C}}$ à $\mathbb{C}^{\dim \alpha}$, et en fixant comme origine X_0 , la famille d'hyperplans à considérer étant les noyaux des racines (en fait, pour l'étude au voisinage de X_0 , on peut se limiter à ceux passant par X_0). Alors, comme φ est une solution C de (2.5), sa série de Taylor en X_0 fournit une solution formelle du système. Le théorème A.1 de [BD] montre qu'il existe une solution locale de (2.5), au voisinage de X_0 dans $\alpha_{\mathbb{C}}$, qui admet la même série de Taylor que φ en X_0 . La différence, ψ , entre φ et cette solution, est donc une solution locale de (2.5), au voisinage de X_0 dans α , dont la série de Taylor en X_0 est nulle.

Pour $H \in \alpha$ tel que la droite affine $X_0 + \mathbb{C}H$ ne rencontre qu'en X_0 la réunion des noyaux des racines nulles en X_0 , on définit $\psi_H(t) = \psi(X_0 + tH)$, pour $t \in \mathbb{R}$, assez petit. On montre, comme dans [BD], lemme A.3, que ψ_H est la première composante d'une fonction à valeurs vectorielles vérifiant un système à singularités simples, i.e., comme dans l'appendice C de cet article, (C.2), (C.3) mais dans le cas d'une seule variable, c'est à dire $k = n = 1$. Supposons que ψ_H ne soit pas identiquement nulle. Le théorème A.1.4 et la proposition A.1.6 de [CassM] (par exemple) montrent qu'alors elle peut s'écrire, pour $t > 0$, petit, sous la forme:

$$\psi_H(t) = \sum_{s, m} \psi_{H, s, m}(t) t^s (\log(t))^m$$

où $\psi_{H, s, m}$, $s \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, est une famille finie de fonctions C^∞ sur $[0, 1[$, ne s'annulant pas en zéro.

Par ailleurs ψ_H est plate en zéro, donc c'est un $o(x^1)$, pour tout $l \in \mathbb{N}$. Il résulte de [CaM], proposition A.2.1, que l'on a $\operatorname{Re} s \geq l$, pour tout $l \in \mathbb{N}$. Une contradiction qui montre que $\psi_H(t)$ est nulle pour $t > 0$. On démontre de même que c'est vrai pour $t < 0$. Comme ceci est vrai pour tout H comme ci-dessus et que ψ est C^∞ , cela implique, par densité, que ψ est nulle au voisinage de X_0 .

Ceci montre que φ est analytique au voisinage de tout point de α , comme désiré.

On définit, pour $v_1, v_2 \in \alpha^*$, $v_1 \leq_{\mathbb{R}} v_2$ (resp. $v_1 <_{\mathbb{R}} v_2$) si et seulement si $v_1(X) \leq v_2(X)$, $X \in C^-$ (resp. $v_1(X) < v_2(X)$, $X \in C^-$).

Grâce à (2.4), on peut également faire les développements le long des murs (cf. [CassM], paragraphe 6). Précisons certaines de leurs conséquences. Si P est une partie parabolique de R contenant R^- , on note Σ_M , l'intersection de $M = M_P$ avec Σ . Notons que $\Lambda \backslash \Sigma_M$ est égal à $\Lambda \backslash M$. Si $X \in \mathfrak{a}_P$ et $m \in \mathbb{N}^{4 \setminus M}$, on pose $X^m = \prod_{* \in 4 \setminus M} \lambda(X)^{m_*}$. En procédant comme dans [D2], appendice, preuve de 2.2(i), on déduit des développements asymptotiques le long des murs, la proposition suivante:

PROPOSITION 4. *Soit $\varphi \in \mathcal{A}(\mathfrak{a}, k)^W$. On utilise les notations de la proposition 2. On note S_P (resp. L_P^+) l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{a}_P$ des éléments de S (resp. des combinaisons linéaires à coefficients entiers positifs ou nuls d'éléments de R^-). Alors:*

(i) *Il existe des fonctions analytiques sur $\mathfrak{a}^P$, $c_{\&, m}^P$, où v décrit $S_P - L_P^+$ et m décrit un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}^{4 \setminus M}$, telles que:*

Pour tout $R > 0$, il existe $C_R > 0$ tel que si $X \in \mathfrak{a}_P$ vérifie $\alpha(X) < -C_R$, pour tout $\alpha \in N_P$, et si $Y \in \mathfrak{a}^P$ satisfait $\|Y\| \leq R$, on a:

$$\varphi(X + Y) = \sum_{\&, m} c_{\&, m}^P(Y) X^m e^{\&(X)}$$

Les fonctions $c_{\&, m}^P$ vérifiant ces propriétés sont uniques.

(ii) *De plus, si $Y \in \mathfrak{a}^P$, et vérifie $\alpha(Y) < 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma_M$, on a:*

$$c_{\&, m}^P(Y) = \sum_{\substack{+ \in \mathfrak{a}_C^*, +|_{\mathfrak{a}^P} = \&, m' \in \mathbb{N}^{7M}}} c_{+, (m, m')} e^{+(Y)} Y^{m'}$$

où (m, m') est regardé comme un élément de $\mathbb{N}^4$.

On dit que $v \in (\mathfrak{a}_P^*)_{\mathbb{C}}$ est un exposant directeur de φ le long de P , si $c_{\&, m}^P$ est non nul pour un m et si $c_{\&', m'}^P$ est nul si $v = v' + \mu$ avec $\mu \in L_P^+ \setminus \{0\}$. Si $v \in (\mathfrak{a}_P^*)_{\mathbb{C}}$, on définit une fonction $\varphi_{\&}$ sur $\mathfrak{a}$ par:

$$\varphi_{\&}(X + Y) = \sum_m c_{\&, m}^P(Y) X^m e^{\&(X)}, \quad X \in \mathfrak{a}_P, \quad Y \in \mathfrak{a}^P. \quad (2.6)$$

PROPOSITION 5. (i) *Si $v \in (\mathfrak{a}_P^*)_{\mathbb{C}}$ est un exposant directeur de φ le long de P , et $D \in \mathbb{D}(k)$, on a:*

$$(D\varphi)_{\&} = \gamma'_P(D)(\varphi_{\&})$$

(ii) *L'ensemble des exposants de φ le long de P est égal à l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{a}_P$ des exposants de φ le long de R^- .*

(iii) *Tout exposant directeur de φ le long de P est la restriction à $\mathfrak{a}_P$ d'un exposant directeur de φ le long de R^- .*

Démonstration. Pour (i) voir la démonstration du théorème 5.2 de [CassM] et celle du lemme 1.

(ii) est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

Enfin (iii) résulte de (ii). ■

PROPOSITION 6. *Soit $\varphi \in \mathcal{A}(\alpha, k)^W$ et $\omega \in \alpha^*$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Pour tout exposant directeur v de φ le long de R^- , on a $\operatorname{Re} v \leq_{R^-} \omega$.*

(ii) *Il existe $M \geq 0$ et $m \geq 0$ tels que:*

$$|\varphi(X)| \leq M e^{l(X)} (1 + \|X\|)^m, \quad X \in C^-$$

(iii) *Pour tout $p \in S(\alpha)$, il existe $M \geq 0$ et $m \geq 0$ tels que:*

$$|\partial_p \varphi(X)| \leq M e^{l(X)} (1 + \|X\|)^m, \quad X \in C^-$$

Démonstration. L'équivalence de (i) et (ii) se montre comme dans [CassM], théorème 7.1. Par ailleurs le développement de φ dans la proposition 2 peut aisément être dérivé par ∂_p . On peut faire de même pour les développements le long des murs. Ceci permet de voir que (i) implique aussi (iii). ■

COROLLAIRE 1. *Si $\varphi \in \mathcal{A}(\alpha, k)^W$, on a $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(\alpha, k)$ si et seulement si tous les exposants directeurs, v , de φ le long de R^- vérifient $\operatorname{Re} v \leq_{R^-} \rho(k)$. En particulier ceux-ci sont imaginaires purs sur α_R .*

La démonstration de la proposition suivante est identique à celle du théorème 7.5 de [CassM], en tenant compte de la proposition A.2.

PROPOSITION 7. *On rappelle que k est élément de $\mathcal{K}_1$, à valeurs réelles. Soit $p \geq 1$ et $\varphi \in \mathcal{A}(\alpha, k)^W$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Pour tout exposant directeur v de φ on a $\operatorname{Re} v <_{R^-} 2p^{-1}\rho(k)$.*

(ii) *φ est un élément de $L^p(\alpha, \mu_k)$*

On note $\mathcal{A}_2(\alpha, k)^W$, le sous-espace de $\mathcal{A}(\alpha, k)^W$ formé de ses éléments de carré intégrable pour μ_k .

PROPOSITION 8. (i) *On a l'égalité $\mathcal{A}_2(\alpha, k)^W = \mathcal{A}(\alpha, k)^W \cap \mathcal{C}(\alpha, k)^W$.*

(ii) *L'algèbre $\mathbb{D}(k)$ opère sur $\mathcal{A}_2(\alpha, k)^W$, qui est somme directe de sous-espaces propres pour cette action.*

Démonstration. (i) résulte de la proposition 7 et du corollaire de la proposition 6. Donc l'algèbre $\mathbb{D}(k)$ opère sur $\mathcal{A}_2(\mathfrak{a}, k)^W$, puisqu'elle opère sur $\mathcal{A}(\mathfrak{a}, k)^W$ et sur $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)^W$ (cf. Corollaire 1 du lemme 2 et proposition A.1). Maintenant, si $\varphi \in \mathcal{A}_2(\mathfrak{a}, k)^W$, l'espace $V = \mathbb{D}(k) \varphi$ est de dimension finie et est muni d'un produit scalaire tel que:

$$(D_p \psi, \psi') = (\psi, D_{p^*} \psi'), \quad \psi, \psi' \in V, \quad p \in S(\mathfrak{a})^W$$

d'après (1.12). Comme $S(\mathfrak{a})^W$ est engendré par des éléments tels que $p = p^*$, l'action de $\mathbb{D}(k)$ sur V se diagonalise. ■

3. TERME CONSTANT DES ÉLÉMENTS DE $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k)^W$

3.1.

Nous allons établir quelques lemmes préliminaires, qui nous permettront de suivre ensuite le travail d'Harish-Chandra, [H-C1], au plus près. Soit P une partie parabolique de R contenant R^- . On définit:

$$\begin{aligned} \rho_P(k) &= \sum_{\alpha \in P} k_\alpha \alpha, & \rho_M(k) &= \sum_{\alpha \in M^+} k_\alpha \alpha \\ \beta_P(X) &= \inf_{\alpha \in N_P} \alpha(X), & X &\in \mathfrak{a} \end{aligned}$$

On remarque que $\rho_P(k)$ est W_M -invariant, donc nul sur $\mathfrak{a}^P$, ce qui permet de le regarder comme un élément de $(\mathfrak{a}_P)^*$. De même, on peut regarder $\rho_M(k)$ comme un élément de $(\mathfrak{a}^P)^*$.

LEMME 4. Soit $p \in S(\mathfrak{a})$. On note p' l'élément de $S(\mathfrak{a})$ tel que $p'(\lambda) = p(\lambda + \rho_P(k))$, $\lambda \in \mathfrak{a}^*$.

(i) L'opérateur $T_P(k, R^+) - T_P(k_M, M^+)$ est une combinaison linéaire de produits d'opérateurs du type ∂_q , $q \in S(\mathfrak{a})$ et Δ , $\beta \in R^+$ et pour lesquels au moins l'un des facteurs est égal à Δ , pour un élément α de $-N_P$.

(ii) On a l'égalité:

$$T_P(k_M, M^+) = e^{-\lambda_P(k)} \circ T_P(k_M, M^+) \circ e^{\lambda_P(k)}$$

Démonstration. Notant que:

$$\rho(k) = \rho_M(k) - \rho_P(k) \tag{3.1}$$

on a, pour tout $X \in \mathfrak{a}$:

$$T_X(k, R^+) = T_X(k_M, M^+) + \rho_p(k)(X) + \sum_{\alpha \in -N_p} k_\alpha \alpha(X) \Delta_\alpha. \quad (3.2)$$

Mais on a:

$$T_X(k_M, M^+) + \rho_p(k)(X) = T_X(k_M, M^+). \quad (3.3)$$

D'où (i) si p est de degré un. On montre ensuite (i) par récurrence sur le degré de p . Montrons (ii). Remarquant que $\rho_p(k)$ est W_M -invariant, on a:

$$\Delta_\alpha \circ e^{\lambda_p(k)} = e^{\lambda_p(k)} \circ \Delta_\alpha, \quad \alpha \in M^+ \quad (3.4)$$

On en déduit aisément l'assertion pour p de degré un, grâce à (3.3), puis pour tout p , par récurrence sur le degré de p . ■

On note $\mathcal{F}_{\text{temp}, +, p}(\mathfrak{a}, k)$, l'espace formé des $\varphi \in \mathcal{F}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k)$ tels que pour toute partie finie F de $S(\mathfrak{a})$, il existe $r > 0$ vérifiant:

$$s_{p, r}^{k, +, p}(\varphi) = \sup_{p \in F, X \in W_M(C^-)} N_{-r}(X) e^{\lambda_p(X)} (\Theta_k(X))^{-1} |\partial_p \varphi(X)| < +\infty \quad (3.5)$$

DÉFINITION 1. On note $\mathcal{U}(R^+)$ (resp. $\mathcal{U}(M^+)$) l'algèbre engendrée par les ∂_p , $p \in S(\mathfrak{a})$ et Δ_α , $\alpha \in R^+$ (resp. $\alpha \in M^+$).

LEMME 5. Soit $p \in S(\mathfrak{a})$ et $r > 0$.

(i) Si T est élément de $\mathcal{U}(M^+)$, il existe une partie finie F de $S(\mathfrak{a})$, telle que, pour tout $\varphi \in C^-(\mathfrak{a})$, on ait:

$$s_{p, r}^{k, +, p}(T(\varphi)) \leq s_{F, r}^{k, +, p}(\varphi)$$

(ii) Si T est égal à Δ_α avec $-\alpha \in N_p$, il existe une partie finie F de $S(\mathfrak{a})$, telle que, pour tout $\varphi \in C^-(\mathfrak{a})$, on ait:

$$s_{p, r}^{k, +, p}(T(\varphi)) \leq s_{F, r}^k(\varphi)$$

Démonstration. On prend d'abord T égal à Δ_α , $\alpha \in M^+$. Soit F , l'orbite sous W d'une base de l'espace des éléments de $S(\mathfrak{a})$ de degré inférieur ou égal au degré de p augmenté de 1. En utilisant le lemme A.1(ii), ainsi que

l'invariance de β_p , Θ_k et F sous W_M , on voit qu'il existe C_0 positif, tel que, pour tout $\varphi \in C(\mathfrak{a})$, on ait:

$$|\partial_p(\Delta; \varphi)(X)| \leq C_0 s_{F, r}^{k, +, p}(\varphi) N_r(X) e^{-; p(X)} \Theta_k(X), \quad (3.6)$$

si $X \in \mathfrak{a}$ et $|\alpha(X)| \geq 1$.

Par ailleurs, grâce au lemme A.1(iv), on voit qu'il existe une constante positive, C_1 , telle que, pour tout $\varphi \in C(\mathfrak{a})$, on ait:

$$|\partial_p(\Delta; \varphi)(X)| \leq C_1 \sup_{q \in F, t \in [0, 1]} |\partial_q \varphi(X - t\check{\alpha})|, \quad \text{si } X \in \mathfrak{a} \text{ et } |\alpha(X)| \leq 1. \quad (3.7)$$

Mais on a:

$$|\partial_q \varphi(X - t\check{\alpha})| \leq s_{q, r}^{k, +, p}(\varphi) (1 + \|X - t\check{\alpha}\|)^r e^{-; p(X - t\check{\alpha})} \Theta_k(X - t\check{\alpha}), \quad (3.8)$$

$t \in [0, 1], \quad X \in \mathfrak{a}$.

De plus, il existe une constante positive, C_2 , telle que, pour tout $t \in [0, 1]$, tout $X \in \mathfrak{a}$, on ait:

$$e^{-; p(X - t\check{\alpha})} \leq C_2 e^{-; p(X)}$$

et

$$(1 + \|X - t\check{\alpha}\|)^r \leq C_2 (1 + \|X\|)^r.$$

Joint à (3.7), (3.8) et au lemme A.2(ii), ces inégalités impliquent qu'il existe une constante positive C_3 telle que:

$$|\partial_p(\Delta; \varphi)(X)| \leq C_3 s_{F, r}^{k, +, p}(\varphi) N_r(X) e^{-; p(X)} \Theta_k(X),$$

si $X \in \mathfrak{a}$ et $|\alpha(X)| \leq 1$

Joint à (3.6) cela prouve (i) lorsque T est égal à Δ , $\alpha \in M^+$. Mais (i) est clair si T est égal à ∂_q , $q \in S(\mathfrak{a})$. On en déduit immédiatement le résultat pour $T \in \mathcal{U}(M^+)$. Passons à (ii). Soit $\alpha \in -N_P$. On pose:

$$\omega(X) := |N_{-r}(X) e^{; p(X)} (\Theta_k(X))^{-1} \partial_p(\Delta; \varphi)(X)|.$$

Si $\alpha(X) \geq -1$, on a $-\alpha(X) \leq -1$, donc $\beta_p(X) \leq 0$. Ceci, joint à la majoration de $s_{p, r}^k(\Delta; (\varphi))$, donnée par le lemme 2(i), conduit à une majoration de $\omega(X)$ du type voulu. Si $\alpha(X) < -1$, on procède comme dans (i), en remplaçant l'utilisation du point (ii) du lemme A.1 par celle du point (iii) et en remarquant que $e^{; (X)} \leq e^{-; p(X)}$. Cela conduit immédiatement à la preuve de (ii) ■

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du lemme 2 et des deux lemmes précédents

LEMME 6. *On reprend les notations du lemme 4. Si q est un élément de $S(\mathfrak{a})$, $r > 0$ et T est une combinaison linéaire d'opérateurs de la forme $S(T_p(k, R^+) - T_p(k_M, M^+))$, pour $S \in \mathcal{U}(M^+)$, $p \in S(\mathfrak{a})^W$, il existe une partie finie, F , de $S(\mathfrak{a})$ telle que:*

$$s_{q,r}^{k,+,\mathbf{P}}(T(\varphi)) \leq s_{F,r}^k(\varphi), \quad \varphi \in C(\mathfrak{a})$$

En particulier si φ est élément de $\mathcal{F}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k)$, $T(\varphi)$ est élément de $\mathcal{F}_{\text{temp}, +, \mathbf{P}}(\mathfrak{a}, k)$.

3.2.

On note $d_p(k)$ la fonction $e^{\setminus p(k)}$ sur $\mathfrak{a}$.

Pour X variable dans $\mathfrak{a}_p$, on dit que $X \rightarrow_p \infty$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\alpha \in N_p$, on ait

$$\alpha(X) \geq \varepsilon \|X\|$$

$$\alpha(X) \rightarrow +\infty$$

THÉOREME 1. *Soit $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k)^W$. Il existe un unique élément $\varphi_p \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k_M)^{W_M}$ tel que:*

$$\lim_{H \rightarrow_p} (d_p(k)(X+H) \varphi(X+H) - \varphi_p(X+H)) = 0, \quad X \in \mathfrak{a}$$

Nous allons suivre de près la démonstration d'Harish-Chandra dans le cas des groupes (cf. [H-C1, paragraphe 21 et suivants]).

Soit I un idéal de codimension finie de $S(\mathfrak{a})^W$, tel que φ appartienne à $\mathcal{A}_{\text{temp}, I}(\mathfrak{a}, k)^W = \mathcal{A}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k)^W \cap \mathcal{A}_I(\mathfrak{a}, k)^W$. Soit V un supplémentaire de I dans $S(\mathfrak{a})^W$ engendré par des éléments homogènes et contenant 1. On rappelle (cf. Paragraphe 2) que H est l'espace des polynômes W -harmoniques sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, dont on note H_M l'intersection avec $S(\mathfrak{a})^{W_M}$. On montre, comme dans la proposition 1, que $U_1 := VH_M$ est un supplémentaire de $I_1 := S(\mathfrak{a})^{W_M}I$ dans $S(\mathfrak{a})^{W_M}$. On note $J = \{D_p(k) \mid p \in I\}$ et $J_1 = \{D_p(k_M) \mid p \in I_1\}$. Alors $U := \{D_p(k_M) \mid p \in U_1\}$ est un supplémentaire de J_1 dans $\mathbb{D}(k_M)$. Identifiant $\mathbb{D}(k_M)/J_1$ à U , on dispose d'une action de $\mathbb{D}(k_M)$ sur U . Si D est élément de $\mathbb{D}(k_M)$, on définit un endomorphisme $\Gamma(D)$ de U^* par:

$$\langle \Gamma(D) \eta^*, \eta \rangle = \langle \eta^*, D\eta \rangle, \quad \eta \in U, \quad \eta^* \in U^*. \quad (3.9)$$

On note $(\eta_1, \dots, \eta_p)$ une base de U , avec $\eta_1 = 1$ et $(\eta_1^*, \dots, \eta_p^*)$ sa base duale. On définit, pour φ comme dans l'énoncé, une fonction Φ (notée si nécessaire $\Phi(\varphi)$) sur $\mathfrak{a}$, à valeurs dans U^* , par:

$$\langle \Phi(X), \eta \rangle = (\eta(d_p(k) \varphi))(X), \quad X \in \mathfrak{a}, \quad \eta \in U. \quad (3.10)$$

Ceci s'écrit aussi:

$$\Phi = \sum_{i=1, \dots, p} \eta_i(d_p(k) \varphi) \otimes \eta_i^*. \quad (3.11)$$

Si D est élément de $\mathbb{D}(k_M)$, il existe des nombres complexes uniques, c_{ij} , tels que:

$$u_i(D) := D\eta_i - \sum_{j=1, \dots, p} c_{ij} \eta_j \in J_1, \quad i = 1, \dots, p. \quad (3.12)$$

Identifiant U^{**} à U et notant $\Gamma(D)^*$ le transposé de $\Gamma(D)$, on a:

$$\sum_{j=1, \dots, p} c_{ij} \eta_j = \Gamma(D)^* \eta_i \quad (3.13)$$

On définit une fonction sur $\mathfrak{a}$, $\Psi_D(\varphi)$, ou Ψ_D , par:

$$\Psi_D = \sum_{i=1, \dots, p} (u_i(D)(d_p(k) \varphi)) \otimes \eta_i^*. \quad (3.14)$$

On remarque que Ψ_D est une fonction sur $\mathfrak{a}$, W_M -invariante, car c'est le cas pour $d_p(k)$ et pour les opérateurs $u_i(D)$. On a l'égalité:

$$(D\Phi)(X) = (\Gamma(D) \Phi)(X) + \Psi_D(X), \quad X \in \mathfrak{a}, \quad D \in \mathbb{D}(k_M). \quad (3.15)$$

Si on spécialise à $D = H \in \mathfrak{a}_p$, on obtient un système différentiel à coefficients constants, avec second membre Ψ_H . La méthode de la variation de la constante conduit à:

$$\Phi(X + TH) = e^{T1(H)} \Phi(X) + \int_0^T e^{(T-t)1(H)} \Psi_H(X + tH) dt, \quad (3.16)$$

$$T \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{a}, \quad H \in \mathfrak{a}_p.$$

Comme les éléments de $\mathcal{U}(M^+)$ commutent à la translation par H , on en déduit que pour tout $T \in \mathbb{R}$, $X \in \mathfrak{a}$, $H \in \mathfrak{a}_p$, $S \in \mathcal{U}(M^+)$:

$$(S\Phi)(X + TH) = e^{T1(H)}(S\Phi)(X) + \int_0^T e^{(T-t)1(H)}(S\Psi_H)(X + tH) dt. \quad (3.17)$$

Revenons à D élément de $\mathbb{D}(k_M)$. Comme $u_i(D)$ est élément de J_1 , c'est une somme d'opérateurs de la forme $D_p(k_M) D_q(k_M)$ avec $p \in S(\alpha)^{W_M}$, $q \in I$. Comme les éléments de J annulent φ , on a, grâce au lemme 4(ii) et avec ses notations:

$$D_p(k_M) D_q(k_M)(d_p(k) \varphi) = d_p(k) D_p(k_M)(D_q(k_M) - D_q(k))(\varphi). \quad (3.18)$$

Le lemme 6 fournit alors une estimation de Ψ_D , qui joue le rôle de la première inégalité du lemme 22.3 de [HC]. Plus précisément:

Si D est élément de $\mathbb{D}(k_M)$, $S \in \mathcal{U}(M^+)$ et $r > 0$, il existe une partie finie, F , de $S(\alpha)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{temp}, I}(\alpha, k)^W$, tout $X \in W_M(C^-)$, et tout H élément de l'ensemble $\bar{\alpha}_P^+$ des éléments P -dominants de α_P , on ait:

$$\|((S\Psi_D)(\varphi))(X+H)\| \leq s_{F, r}^k(\varphi) \Theta_{k_M}(X) N_r(X) N_r(H) e^{-r \cdot \rho(H)}. \quad (3.19)$$

On a utilisé pour cela le fait que les dérivées partielles de $d_p(k)$ lui sont proportionnelles, l'inégalité: $\beta_p(X+H) > \beta_p(H)$, pour X et H comme ci-dessus, ainsi que l'égalité $\Theta_k(X+H) d_p(k)(X+H) = \Theta_{k_M}(X)$. Cette dernière égalité se prouve aisément en remarquant que l'élément de plus grande longueur de W , w_0 , transforme $\rho(k)$ en son opposé, donc $\rho(k)(Y_+) = -\rho(k)(w_0 Y_+)$.

L'analogue de la seconde inégalité du lemme 22.3 de [HC] résulte des remarques précédentes et du lemme 2(i) et l'on a:

Soit $S \in \mathcal{U}(M^+)$ et $r > 0$. Il existe une partie finie F de $S(\alpha)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{temp}, I}(\alpha, k)^W$, tout $X \in W_M(C^-)$, et tout $H \in \bar{\alpha}_P^+$, on ait:

$$\|(S\Phi)(X+H)\| \leq s_{F, r}^k(\varphi) \Theta_{k_M}(X) N_r(X) N_r(H). \quad (3.20)$$

Alors la démonstration du théorème est analogue à celle du théorème 21.1 de [H-C1], paragraphes 21, 22, 23. Rappelons-en certains faits.

On note $\mathcal{Q} \subset (\alpha_P)_\mathbb{C}^*$ l'ensemble des valeurs propres simultanées des endomorphismes de U , $\Gamma(H)$, $H \in \alpha_P$, qui commutent entre eux. On note $\mathcal{Q}^0$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{Q}$ dont la partie réelle, relativement à α_P , est nulle. On note $\mathcal{Q}^+$ l'ensemble des éléments λ de $\mathcal{Q}$ pour lesquels il existe $H \in \alpha_P^+$ tel que $\text{Re } \lambda(H) > 0$ et soit $\mathcal{Q}^-$ le complémentaire dans $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{Q}^0 \cup \mathcal{Q}^+$. Si λ est un élément de $\mathcal{Q}$, on note $Q(\lambda)$ le projecteur sur le sous espace caractéristique correspondant (sous-espace des vecteurs propres généralisés pour cette valeur propre) parallèlement à la somme des autres, et Q^0 désigne la somme des $Q(\lambda)$, pour λ élément de $\mathcal{Q}^0$. Pour $\lambda \in \mathcal{Q}$, on définit $\Phi_* := Q(\lambda) \Phi$ et si H est élément de α_P , on pose $E(\lambda, H) =$

$Q(\lambda) e^{1(H) - *(H)}$. Il est facile d'établir qu'il existe $C > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, plus petit que la dimension de U tels que pour tout $\lambda \in \mathcal{Q}$:

$$\|E(\lambda, tH)\| \leq C(1 + |t|)^n (1 + \|H\|)^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad H \in \mathfrak{a} \quad (3.21)$$

A noter que:

On peut remplacer, dans (3.17), (3.19),

$$\text{et (3.20), } \Phi \text{ par } \Phi_* \text{ et } \Psi_H \text{ par } Q(\lambda) \Psi_H \quad (3.22)$$

Si λ est un élément de $\mathcal{Q}^0 \cup \mathcal{Q}^+$ et si $H \in \mathfrak{a}_p^+$ vérifie:

$$\operatorname{Re} \lambda(H) + \beta_p(H) > 0 \quad (3.23)$$

on montre, en utilisant l'estimation (3.19) de Ψ_H et (3.21), que l'expression suivante est bien définie:

$$\Phi_*, (X, H) = \Phi_*(X) + \int_0^+ (Q(\lambda) e^{-t1(H)})(\Psi_H(X + tH)) dt, \quad X \in \mathfrak{a}. \quad (3.24)$$

Il faut toutefois se ramener, par W_M -invariance, au cas où X est strictement antidominant relativement à M^+ . Alors, H étant fixé, il existe $C > 0$, et, pour tout X élément de la chambre de Weyl positive C_M^- , relativement à $M^- = -M^+$, il existe $T(X) > 0$ tels que l'on ait:

$$X + tH \in C^-, \quad t > T(X) \quad (3.25)$$

$$T(X) \leq C \|X\| \quad (3.26)$$

Comme les éléments de $\mathcal{U}(M^+)$ commutent à la translation par H , on déduit de (3.19) que, pour tout $S \in \mathcal{U}(M^+)$, on a:

$$S\Phi_*, (X, H) = S\Phi_*(X) + \int_0^+ (Q(\lambda) e^{-t1(H)})(S\Psi_H(X + tH)) dt, \quad X \in \mathfrak{a}. \quad (3.27)$$

De l'équation précédente et de (3.17), (3.22), on déduit que pour $S \in \mathcal{U}(M^+)$

$$S\Phi_*, (X, H) = \lim_{t \rightarrow +} (Q(\lambda) e^{-t1(H)})(S\Phi(X + tH)) \quad (3.28)$$

ce qui admet pour conséquence immédiate:

$$S\Phi_{*,\quad}(X+TH, H) = Q(\lambda) e^{T^1(H)} S\Phi_{*,\quad}(X, H), \quad T \in \mathbb{R}. \quad (3.29)$$

Comme dans [HC1], preuve du lemme 22.7, on montre que:

$$\Phi_{*,\quad}(X, H) \text{ est identiquement nul si } \operatorname{Re} \lambda(H) > 0 \quad (3.30)$$

puis comme dans l.c. Lemme 22.8:

$$\Phi_{*,\quad}(X, H) \text{ ne dépend pas de } H \text{ vérifiant la condition (3.22)} \quad (3.31)$$

On le fait donc disparaître de la notation.

En particulier,

$$\Phi_{*,\quad}(X) \text{ est nul si } \lambda \in \mathcal{Q}^+ \quad (4.32)$$

On pose $\Phi_{*,\quad} \equiv 0$ si $\lambda \in \mathcal{Q}^-$.

La proposition suivante admet une démonstration analogue à celle du théorème 22.1 de l.c., en utilisant ce qui précède et l'analogue des lemmes 22.9 à 22.13 de l.c.

PROPOSITION 9. *Soit $\delta \leq 1/2$, $\delta > 0$, et tel que pour tout $\lambda \in \mathcal{Q}^-$, $H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^+$, on ait:*

$$\operatorname{Re} \lambda(H) \leq -\delta \beta_{\mathfrak{p}}(H)$$

(cf., par exemple l.c. p. 161, pour l'existence de δ).

Soit $\lambda \in \mathcal{Q}$, $H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^+$, $S \in \mathcal{U}(M^+)$. Pour tout $X \in \mathfrak{a}$, $T > 0$, on a:

$$\begin{aligned} & \|S\Phi_{*,\quad}(X+TH) - S\Phi_{*,\quad}(X+TH)\| \\ & \leq e^{-T\mathfrak{s}_{\mathfrak{p}}(H)} \left\{ \|E(\lambda, TH)\| \|S\Phi(X)\| \right. \\ & \quad \left. + \int_0^+ \|E(\lambda, (T-t)H)\| \|S\Psi_H(X+tH)\| e^{t;\mathfrak{p}(H)^2} dt \right\}. \end{aligned}$$

On pose alors:

$$Y(\varphi) := \sum_{* \in \mathcal{Q}^0} \Phi_{*,\quad}. \quad (3.33)$$

On notera parfois Y en abrégé.

Alors, on montre comme dans l.c., lemme 23.2, que:

$$DY = \Gamma(D) Y, \quad D \in \mathbb{D}(k_M). \quad (3.34)$$

Ce qui implique, par une intégration:

$$Y(X + tH) = e^{t1(H)} Y(X), \quad H \in \mathfrak{a}_P, \quad X \in \mathfrak{a} \quad (3.35)$$

De (3.34) on déduit que Y est $\mathbb{D}(k_M)$ -finie.

Il est facile de voir, grâce à la proposition 9, que la fonction définie par:

$$\varphi_P(X) = \langle Y(X), \eta_1 \rangle \quad (3.36)$$

vérifie les propriétés du théorème 1. L'unicité se prouve comme dans l.c., lemme 21.3. Ceci achève de prouver le théorème 1.

3.3. Propriétés du terme constant

On regroupe dans le théorème suivant des propriétés importantes du terme constant.

THÉORÈME 2. (i) Soit δ comme dans la Proposition 9. On fixe $\gamma > 0$. Soit $S \in \mathcal{U}(M^+)$ et $r > 0$. Il existe une partie finie F de $S(\mathfrak{a})$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tout $H \in \mathfrak{a}_P^+$ vérifiant $\beta_P(H) > \gamma \|H\|$, $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{temp}, 1}(\mathfrak{a}, k)^W$, et $X \in W_M(C^-)$, on ait

$$\|(S(\Phi - Y))(X + H)\| \leq s_{F, r}^k(\varphi) \Theta_{k_M}(X) N_r(X) N_r(H) e^{-\$;_P(H)^2}$$

et donc aussi:

$$|(S(d_P \varphi - \varphi_P))(X + tH)| \leq s_{F, r}^k(\varphi) \Theta_{k_M}(X) N_r(X) N_r(H) e^{-\$;_P(H)^2}.$$

(ii) Soit $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k)^W$. On utilise les notations de la Proposition 5. Si $v \in (\mathfrak{a}_P^*)_{\mathbb{C}}$ est un exposant sur le long de P tel que $\text{Re } v = -\rho_P(k)$, c'est un exposant directeur. On a l'égalité:

$$\varphi_P = \sum_{\mathfrak{k} \in (\mathfrak{a}_P^*)_{\mathbb{C}}, \text{Re } \mathfrak{k} = -\rho_P(k)} e^{\backslash_P(k)} \varphi_{\mathfrak{k}}.$$

(iii) Pour $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k)^W$ et $D \in \mathbb{D}(k)$, on a:

$$(D\varphi)_P = \gamma_P^R(D) \varphi_P.$$

(iv) Soit Q une partie parabolique de R contenant P . Alors $P \cap M_Q$ est une partie parabolique de M_Q contenant M_Q^- et pour φ comme ci-dessus, on a:

$$\varphi_P(X) = (\varphi_Q)_{P \cap M_Q}(X), \quad X \in \mathfrak{a}.$$

Démonstration. (i) L'expression (3.33) de Y , joint à la proposition 9 permet d'estimer le premier membre de la première inégalité de (i), en écrivant $H = TH'$ avec $T > 0$ et $\beta_P(H') = 1$, dans l'intégrale de la Proposition 9. Alors, en tenant compte de (3.19), (3.21), de l'inégalité $1 + |T - t| \leq (1 + T)(1 + |t|)$, l'inégalité voulue résulte de notre hypothèse sur H qui implique:

$$\|H'\| \leq \gamma^{-1}. \quad (3.37)$$

A noter que la division par 2 dans l'exponentielle est nécessaire, en raison de l'estimation de $\|E(\lambda, H)\|$ qui fait apparaître un facteur polynomial en $\|H\|$ (cf. (3.21)).

(ii) Soit v un exposant de φ le long de P tel que $\operatorname{Re} v = -\rho_P(k)$. Montrons que c'est un exposant directeur. En effet, supposons que $v' = v + \mu$, avec $\mu \in L_P^+ \setminus \{0\}$, soit un exposant de φ le long de P . Alors, d'après la proposition 5(ii), il existe un exposant $v'' \in \mathfrak{a}_\mathbb{C}^*$ de φ le long de R^- , dont la restriction à $\mathfrak{a}_P$ est égale à v' . Soit X un élément de $\mathfrak{a}_P^+$, donc de l'adhérence de C^- . On a clairement:

$$\operatorname{Re} v''(X) = \operatorname{Re} v'(X) > \operatorname{Re} v(X) = -\rho_P(k)(X) = -\rho(k)(X).$$

Or, d'après le corollaire de la proposition 6, comme v'' est un exposant de φ le long de R^- , on a:

$$\operatorname{Re} v''(X) \leq \rho(k)(X).$$

Une contradiction qui montre notre assertion. Grâce à la proposition 5(i), on en déduit que le membre de droite de l'égalité de (ii) est un élément de $\mathcal{A}(\mathfrak{a}, k_M)$. Son invariance sous W_M résulte de la proposition 4(i). Montrons qu'il vérifie la même propriété asymptotique que φ_P . D'après la tempérance de φ et les propriétés de S (cf. Proposition 2), on voit que pour tout $v \in S$, $\operatorname{Re} v - \rho(k)$ est une combinaison linéaire, à coefficients négatifs ou nuls, de Σ . En effet pour $v \in S$ et $\alpha \in \Sigma$, d'après la définition de S , il existe un exposant de φ de la forme $v + \sum_{n \in \mathbb{N}} n \alpha$, avec $n \in \mathbb{N}$. Tenant compte du corollaire de la proposition 6, on déduit la propriété voulue pour v . Ceci joint à la proposition 4(i) et aux propriétés des séries entières conduit à la propriété asymptotique voulue. Alors (ii) résulte de l'unicité dans le théorème 1; Le point (iii) résulte de (ii) et de la proposition 5(i).

Prouvons (iv). Le point (ii) joint à la proposition 4 permet d'écrire, pour X dans un ouvert non vide de $\mathfrak{a}$, les deux membres de l'égalité à l'aide des développements asymptotiques de φ le long de R^- , ce qui conduit à l'égalité voulue sur cet ouvert. Le résultat s'étend par prolongement analytique. ■

3.4.

DÉFINITION 2. On dit que φ est vecteur propre (resp. vecteur propre généralisé) sous $\mathbb{D}(k)$, pour la valeur propre $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, si et seulement si, pour $n = 1$ (resp., pour un $n \in \mathbb{N}$):

$$(D_p(k) - p(\lambda))^n \varphi = 0, \quad p \in S(\mathfrak{a})^W.$$

On note $\mathcal{A}(\mathfrak{a}, k, \lambda)^W$ l'ensemble des fonctions C^∞ sur $\mathfrak{a}$, W -invariantes, qui sont vecteurs propres sous $\mathbb{D}(k)$, pour la valeur propre $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$.

D'après Opdam (cf. [O2, théorème 5.7]), il existe un sous-ensemble fini, W -invariant, éventuellement vide, $\mathfrak{a}_{\text{disc}}^*(k)$ de $\mathfrak{a}^*$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, on a:

L'espace $\mathcal{A}_2(\mathfrak{a}, k, \lambda)^W := L^2(\mathfrak{a}, \mu_k) \cap \mathcal{A}(\mathfrak{a}, k, \lambda)^W$ est non nul si et seulement si λ appartient à $\mathfrak{a}_{\text{disc}}^*(k)$. Alors cet espace est de dimension 1 (3.38)

DÉFINITION 3. Un sous-espace affine réel de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ est dit k -tempéré si et seulement si il est conjugué sous W à un sous-espace de la forme $\Lambda + i\mathfrak{a}_{\mathbb{P}}^*$, où P est une partie parabolique de R contenant R^- et Λ est un élément de $(\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P})$. Ici on a confondu M_P et l'ensemble de ses restrictions à $\mathfrak{a}^{M_P}$, que l'on regarde comme un système de racines dans $\mathfrak{a}^{M_P}$. Si $(\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P})$ est non vide, on dit que P est k -cuspidale.

PROPOSITION 10. Soit $\varphi \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k)^W$.

(i) Si $\mathfrak{a}_R$ est nul, φ est un élément de $L^2(\mathfrak{a}, \mu_k)$ si et seulement si φ_P est nul pour toute partie parabolique de R contenant R^- et distincte de R^- .

(ii) On suppose φ non nulle et $\mathbb{D}(k)$ -propre généralisée pour la valeur propre λ . Soit P une partie parabolique de R , contenant R^- , minimale parmi celles vérifiant $\varphi_P \neq 0$. Alors P est k -cuspidale et pour tout $Y \in \mathfrak{a}_P$, la fonction définie sur $\mathfrak{a}^{M_P}$ par $X \mapsto \varphi_P(X + Y)$ est un élément de $\mathcal{A}_2(\mathfrak{a}^{M_P}, k_{M_P})^{W_{M_P}}$. Enfin φ_P est la somme de fonctions $\mathbb{D}(k_{M_P})$ -propres généralisées pour des valeurs propres de la forme $\Lambda + \nu$, avec $\Lambda \in (\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P})$ et $\nu \in i\mathfrak{a}_P^*$ tels que $\Lambda + \nu$ et λ soient conjugués par un élément de W . En particulier λ appartient à un sous-espace k -tempéré.

Démonstration. (i) Si φ est élément de $L^2(\alpha, \mu_k)$, d'après la proposition 7, tout exposant directeur ν de φ le long de R^- s'écrit :

$$\operatorname{Re} \nu = \rho(k) + \sum_{: \in 7} m_i \alpha$$

où tous les m_i sont strictement positifs. Montrons que φ_P est nul pour toute partie parabolique de R contenant R^- et distincte de R^- . En effet, si φ_P est non nul, d'après le théorème 2(ii), il existe un exposant directeur de φ le long de P dont la partie réelle est égale à $\rho_P(k)$. Par ailleurs, d'après la proposition 5(ii), tout exposant directeur de φ le long de P est la restriction d'un exposant directeur de φ le long de R^- . Donc P doit être égal à R^- , d'après ce qui précède.

Réciproquement, supposons que φ_P est nul pour toute partie parabolique de R contenant R^- et distincte de R^- . Montrons que tout exposant de φ le long de R^- vérifie :

$$\operatorname{Re} \nu = \rho(k) + \sum_{: \in 7} m_i \alpha$$

où tous les m_i sont strictement positifs. La tempérance de φ implique seulement que les m_i sont positifs ou nuls. Supposons qu'au moins un soit nul et notons P la partie parabolique de R , contenant R^- , tel que Σ_{M_P} soit égal à $\{\alpha \in \Sigma \mid m_i \neq 0\}$. Elle est distincte de R^- . On note ν' la restriction de ν à α_P . Sa partie réelle est égale à $-\rho_P(k)$. Alors $\varphi_{\nu'}$ est non nulle et contribue à φ_P . L'indépendance linéaire des exponentielles-polynômes et le théorème 2(ii) impliquent que φ_P est non nul. Une contradiction qui montre que tous les m_i sont strictement positifs, comme désiré. Grâce à la proposition 7, on en déduit que φ est élément de $L^2(\alpha, \mu_k)$.

(ii) est une conséquence immédiate de (i) et du corollaire de la Proposition 6. ■

Le fait suivant est crucial pour nous et pallie au défaut de régularité des éléments de $\alpha_{\text{disc}}^*(k)$. C'est une conséquence facile du travail de G. Heckman et E. Opdam [HO2] joint à celui de Opdam [O2] (voir plus bas) :

Deux sous espaces tempérés inclus l' un dans l' autre sont égaux

(3.39)

En effet, la définition des espaces résiduels dans [HO2], définition 1.4, coïncide avec celle de [O2, (3.3)]. Il en va de même pour la notion de point distingué. Il résulte de la définition 3.6 et du théorème 5.7 de [O2], qu'un point cuspidal dans notre sens est distingué. Alors, avec les notations

et les hypothèses sur A et P de la définition 3, on voit que $A + \mathfrak{a}_P^*$ est résiduel, ainsi que ses conjugués sous W . La remarque (3.14) de [HO2] permet de conclure.

4. FAMILLES HOLOMORPHES DE FONCTIONS PROPRES SOUS $\mathbb{D}(k)$

Dans toute cette section, on se fixe une partie parabolique de R contenant R^- , P , et on note $M = M_P$ et $N = N_P$.

4.1.

Si $v \in (\mathfrak{a})_{\mathbb{C}}^*$, on note $I_{\&}$ (resp. $J_{\&}^M$), l'idéal de $S(\mathfrak{a})^W$ (resp. $S(\mathfrak{a})^{W_M}$) formé de ses éléments s'annulant en v . On rappelle que H_M désigne l'intersection de l'espace des polynômes W -harmoniques avec $S(\mathfrak{a})^{W_M}$ et que l'on a $S(\mathfrak{a})^{W_M} = S(\mathfrak{a})^W H_M$. On note $\pi_{\&}^M$ la représentation de $S(\mathfrak{a})^{W_M}$ dans H_M , identifié à $S(\mathfrak{a})^{W_M}/S(\mathfrak{a})^{W_M} I_{\&}$, par passage au quotient de l'injection naturelle de H_M dans $S(\mathfrak{a})^{W_M}$.

LEMME 7. (i) Pour tout $p \in S(\mathfrak{a})^{W_M}$, $\pi_{\&}^M(p)$ dépend polynomialement de $v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$.

(ii) Si v est régulier par rapport à W , la représentation $\pi_{\&}^M$ est isomorphe à la somme directe $\bigoplus_{w \in W_M \setminus W} S(\mathfrak{a})^{W_M}/J_{w\&}^M$ de $S(\mathfrak{a})^{W_M}$ -modules de dimension 1.

(iii) On a:

$$\det(zId - \pi_{\&}^M(p)) = \prod_{w \in W_M \setminus W} (zId - p(wv)),$$

$$z \in \mathbb{C}, \quad v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \quad p \in S(\mathfrak{a})^{W_M}.$$

Démonstration. (i) Soit $h_1, \dots, h_r$ une base de H_M . Soit $p \in S(\mathfrak{a})^{W_M}$, $h \in H_M$. On écrit:

$$ph = \sum_{i=1, \dots, r} p_i h_i, \quad \text{où } p_i \in S(\mathfrak{a})^W, \quad i=1, \dots, r.$$

Alors on a:

$$ph = \sum_{i=1, \dots, r} (p_i - p_i(v)) h_i + \sum_{i=1, \dots, r} p_i(v) h_i.$$

Comme $p_i - p_i(v) \in I_{\&}$, on a :

$$\pi(p) h = \sum_{i=1, \dots, r} p_i(v) h_i$$

Ceci prouve (i).

Montrons (ii). Traitons d'abord le cas où $M = \emptyset$. Soit v régulier par rapport à W . La représentation de dimension finie de $S(\alpha)$, $\pi_{\&}^<$ admet au moins un sous-module irréductible, donc de la forme $S(\alpha)/S(\alpha) J_{\&}^<$, pour un $\lambda \in \alpha_{\mathbb{C}}^*$. Comme, pour $p \in S(\alpha)^W$, $\pi_{\&}^<(p)$ est la multiplication par $p(v)$, λ est nécessairement de la forme $w_0 v$, pour un élément w_0 de W . Mais W agit naturellement sur H , de façon compatible avec $\pi_{\&}^<$. On en déduit que pour tout $w \in W$, $S(\alpha)/J_{w\&}^<$ apparaît comme sous-représentation de $\pi_{\&}^<$. Comme v est régulier par rapport à W , les wv sont 2 à 2 distincts. La dimension de H étant égale à $\text{Card}(W)$, on en déduit l'isomorphisme de (ii), pour $M = \emptyset$. On le note $j_{\&}^<$.

Revenons à M quelconque. Pour v comme ci-dessus et $w \in W$, on note $h_{w\&} \in H$ l'image réciproque par $j_{\&}^<$ de la classe de 1 dans $S(\alpha)/S(\alpha) J_{w\&}^<$. Si $x \in W_M$, $j_{\&}^<(xh_{w\&})$ est élément de $S(\alpha)/S(\alpha) J_{xw\&}^<$. On en déduit que la somme $h_{W_M W} := \sum_{x \in W_M} xh_{w\&}$ est un élément non nul de H_M se transformant par $\pi_{\&}^M$ par le caractère de $S(\alpha)^{W_M}$ donné par l'évaluation en wv . La régularité de v montre que la représentation $\pi_{\&}^M$ admet une sous-représentation isomorphe à $\bigoplus_{w \in W_M \setminus W} S(\alpha)^{W_M}/J_{w\&}^M$. Il reste, pour achever de prouver (ii), à s'assurer que H_M est de dimension égale au cardinal de W/W_M .

Le $S(\alpha)^W$ -module $S(\alpha)$ (resp. $S(\alpha)^{W_M}$) est naturellement isomorphe au $S(\alpha)^W$ -module libre $S(\alpha)^W \otimes H$ (resp. $S(\alpha)^W \otimes H_M$), la première affirmation étant classique et la seconde une conséquence immédiate de la première. Joint à [War], proposition 2.1.5.10, cela implique que la dimension de H_M est bien égale au cardinal de W/W_M .

Montrons (iii). Si v est W -régulier, (iii) résulte de (ii). On passe au cas général grâce à (i). ■

4.2. Fonctions H_{hol} , premières propriétés

Soit $\varepsilon > 0$ et $\tau > 0$. On note $(\alpha_M)_{\pm}^* := \{v \in (\alpha_M)_{\mathbb{C}}^* \mid \|\text{Re } v\| < \varepsilon\}$.

Soit $\mathcal{F}_{\text{hol}}(\alpha, k, \varepsilon, \tau)$ l'espace des fonctions φ , C^k sur $(\alpha_M)_{\pm}^* \times \alpha$ telles que, notant pour $v \in (\alpha_M)_{\pm}^*$, $X \in \alpha$, $\varphi_{\&}(X) := \varphi(v, X)$, on ait :

$$v \mapsto \partial_p \varphi_{\&}(X) \quad \text{est holomorphe sur } (\alpha_M)_{\pm}^*, \quad X \in \alpha, \quad p \in S(\alpha). \quad (4.1)$$

$$\text{Pour toute partie finie } F \text{ de } S(\alpha), \text{ il existe } r > 0 \text{ tel que } s_{F, r}^{k, \tau}(\varphi) < +\infty \quad (4.2)$$

où

$$s_{F,r}^{k,\bar{\cdot},\cdot}(\varphi) := \sup_{p \in F, \& \in (\mathfrak{a}_M)^*, X \in \mathfrak{a}} (v: X)^{-r} \Theta_k^{-1}(X) e^{-\{\|\mathbf{Re} \&\| \|X\|\}} |\partial_p \varphi_{\&}(X)| \quad (4.3)$$

avec $(v: X) = (1 + \|v\|)(1 + \|X\|)$.

On a l'analogie du lemme 2:

LEMME 8. Soit $r > 0$. Soit $p \in S(\mathfrak{a})$ (resp. $\alpha \in R^+$). On note T l'opérateur ∂_p (resp., Δ).

(i) Si q est un élément de $S(\mathfrak{a})$, il existe une partie finie, F , de $S(\mathfrak{a})$ telle que, pour tout $\varepsilon' > 0$, vérifiant $\varepsilon' \leq \varepsilon$, et $\varphi \in C^-(\mathfrak{a} \times (\mathfrak{a}_M)^*)$:

$$s_{q,r}^{k,\bar{\cdot},\cdot}(T(\varphi)) \leq s_{F,r}^{k,\bar{\cdot},\cdot}(\varphi).$$

(ii) L'espace $\mathcal{F}_{\text{hol}}(\mathfrak{a}, k, \varepsilon, \tau)$ est invariant par $\mathcal{U}(R^+)$, et en particulier par $\mathbb{T}(k, R^+)$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate des lemmes A.1(ii), (iv) et A.2(ii) joints à:

$$e^{-\{\|\mathbf{Re} \&\| \|X - t\check{\alpha}\|\}} \leq e^{\{t\|\check{\alpha}\|\}} e^{-\{\|\mathbf{Re} \&\| \|X\|\}}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad v \in (\mathfrak{a}_M)^* \quad (4.4)$$

puisque $\|X - t\check{\alpha}\| \geq \|X\| - \|t\check{\alpha}\|$ ■

Soit Q une partie parabolique de R contenant R^- . On définit, pour F partie finie de $S(\mathfrak{a})$, $r > 0$ et $\varphi \in C^-(\mathfrak{a} \times (\mathfrak{a}_M)^*)$:

$$s_{F,r}^{k,\bar{\cdot},\cdot,+,\mathbf{Q}}(\varphi) := \sup_{p \in F, \& \in (\mathfrak{a}_M)^*, X \in W_{M_Q}(C^-)} (v: X)^{-r} \Theta_k^{-1}(X) \times e^{-\mathbf{Q}(X)} e^{-\{\|\mathbf{Re} \&\| \|X\|\}} |\partial_p \varphi_{\&}(X)| \quad (4.5)$$

On note $\mathcal{F}_{\text{hol},+,\mathbf{Q}}(\mathfrak{a}, k, \varepsilon, \tau)$ l'ensemble des éléments φ de $\mathcal{F}_{\text{hol}}(\mathfrak{a}, k, \varepsilon, \tau)$ tels que, pour tout $p \in S(\mathfrak{a})$, il existe $r > 0$ vérifiant:

$$s_{F,r}^{k,\bar{\cdot},\cdot,+,\mathbf{Q}}(\varphi) < +\infty.$$

La démonstration du lemme suivant est analogue à celle du lemme 5, en tenant compte de (4.4):

LEMME 9. Soit $p \in S(\mathfrak{a})$ et $r > 0$.

(i) Si T est élément de $\mathcal{U}(M_Q^+)$, il existe une partie finie F de $S(\mathfrak{a})$, telle que, pour tout ε' vérifiant $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, pour tout $\varphi \in C^-(\mathfrak{a} \times (\mathfrak{a}_M)^*)$, on ait:

$$s_{p,r}^{k,\bar{\cdot},\cdot,+,\mathbf{Q}}(T(\varphi)) \leq s_{F,r}^{k,\bar{\cdot},\cdot,+,\mathbf{Q}}(\varphi)$$

(ii) Si T est égal à Δ , avec $-\alpha \in N_Q$, il existe une partie finie F de $S(\alpha)$, telle que, pour tout ε' vérifiant $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, tout $\varphi \in C(\alpha \times (\alpha_M)^*_{\varepsilon'})$, on ait:

$$s_{p,r}^{k,\varepsilon',\iota,+,\mathcal{Q}}(T(\varphi)) \leq s_{F,r}^{k,\varepsilon',\iota}(\varphi).$$

Le lemme suivant admet une démonstration analogue à celle du lemme 6.

LEMME 10. On reprend les notations du lemme 4. Si q est un élément de $S(\alpha)$, $r > 0$ et T est une combinaison linéaire d'opérateurs de la forme $S(T_p(k, R^+) - T_p(k_{M_Q}, M_Q^+))$, pour $S \in \mathcal{U}(M_Q^+)$, $p \in S(\alpha)^W$, il existe une partie finie, F , de $S(\alpha)$ telle que, pour tout ε' vérifiant $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$, on ait:

$$s_{q,r}^{k,\varepsilon',\iota,+,\mathcal{Q}}(T(\varphi)) \leq s_{F,r}^{k,\varepsilon',\iota}(\varphi), \quad \varphi \in C(\alpha \times (\alpha_M)^*_{\varepsilon'})$$

En particulier si φ est élément de $\mathcal{F}_{\text{hol}}(\alpha, k, \varepsilon', \tau)$, $T(\varphi)$ est élément de $\mathcal{F}_{\text{hol},+,\mathcal{Q}}(\alpha, k, \varepsilon', \tau)$.

DÉFINITION 4. Soit $A \in (\alpha^M)_{\text{disc}}^*(k_M)$. On dit qu'une fonction C sur $\alpha \times (\alpha_M)^*_{\varepsilon}$, φ , est une fonction $II_{\text{hol}}(A, k, \varepsilon, \tau)$ si et seulement si φ est un élément de $\mathcal{F}_{\text{hol}}(\alpha, k, \varepsilon, \tau)$ qui vérifie, pour tout $v \in (\alpha_M)^*_{\varepsilon}$:

$$\varphi_{\&} \text{ est invariante par } W \text{ et propre sous } \mathbb{D}(k) \text{ pour la valeur propre } A + v \quad (4.6)$$

Notez que si $v \in i\alpha_M^*$, $\varphi_{\&}$ est un élément de $\mathcal{A}_{\text{temp}}(\alpha, k, A + v)$.

Soit $v \in (\alpha_M)_{\mathbb{C}}^*$. On s'intéresse au cas où l'idéal I du paragraphe 3.2 est égal à $I_{4+\&}$. On fixe Q une partie parabolique de R contenant R^- et on remplace P par Q dans le paragraphe 3.2. On prend V égal à $\mathbb{C}1$, de sorte que U_1 est égal à H_{M_Q} et U est indépendant de v . On note, pour $D \in \mathbb{D}(k_{M_Q})$, $\Gamma_{\&}(D)$ l'endomorphisme de U^* noté $\Gamma(D)$ dans 3.2. Il résulte du lemme 7:

LEMME 11. Pour $D \in \mathbb{D}(k_{M_Q})$, $\Gamma_{\&}(D)$ est polynomial en $v \in (\alpha_M)_{\mathbb{C}}^*$. De plus:

$$\det(zId - \Gamma_{\&}(D_p(k_{M_Q}))) = \prod_{w \in W_{M_Q} \setminus W} (z - p(w(A + v))),$$

$$z \in \mathbb{C}, \quad v \in (\alpha_M)_{\mathbb{C}}^*, \quad p \in S(\alpha)^{W_{M_Q}}$$

On remarque que, si H est un élément de α_Q , $D_H(k_{M_Q}) = H$. On peut fixer un sous-ensemble de W , $\mathcal{W}$, tel que, pour tout $w \in W$, il existe un

unique $w' \in \mathcal{W}$ tel que $w(\lambda + v)|_{\mathfrak{a}_Q} = w'(\lambda + v)|_{\mathfrak{a}_Q}$, pour tout $v \in \mathfrak{a}_M^*$. Alors, il existe des entiers naturels non nuls n_w , $w \in \mathcal{W}$, vérifiant:

$$\det(zId - \Gamma_{\&}(H)) = \prod_{w \in \mathcal{W}} (z - (w(\lambda + v))(H))^{n_w}, \quad (4.7)$$

$$z \in \mathbb{C}, \quad v \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*, \quad H \in \mathfrak{a}_Q.$$

On note:

$$\mathcal{W}^0 := \{w \in \mathcal{W} \mid w\lambda|_{\mathfrak{a}_Q} = 0\}. \quad (4.8)$$

On utilise les notations de l'appendice B. On prend $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_Q$. On note, pour $w \in \mathcal{W}$, $Q_{\&}(w)$ le projecteur $P_{\&}(w(\lambda + v)|_{\mathfrak{a}_Q})$ et on pose $E_{\&}(w, H) := Q_{\&}(w) e^{1_{\&}(H) - w(4 + \&)(H)}$. On note $Q_{\&}^0$ le projecteur sur la somme des sous-espaces caractéristiques de $\Gamma_{\&}$ regardé comme représentation de $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_Q$, pour les valeurs propres simultanées $(w(\lambda + v))|_{\mathfrak{a}_Q}$, $w \in \mathcal{W}^0$, parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques.

LEMME 12. Soit $\varepsilon_0 := 1/5 \inf_{w \in \mathcal{W} \setminus \mathcal{W}^0} \|w\lambda|_{\mathfrak{a}_Q}\|$.

(i) Il existe un polynôme non nul, q , sur $(\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*$ tel que, pour tout $w \in \mathcal{W}$, l'application $v \rightarrow q(v) Q_{\&}(w)$ soit polynomiale en $v \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*$, de même que $v \rightarrow q(v) Q_{\&}^0$, avec en outre l'égalité:

$$q(v) Q_{\&}^0 = \sum_{w \in \mathcal{W}^0} q(v) Q_{\&}(w), \quad v \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*$$

(ii) L'application $v \rightarrow Q_{\&}^0$ est holomorphe sur $(\mathfrak{a}_M)_{2=0}^*$.

(iii) Il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $w \in \mathcal{W}$,

$$\|q(v) Q_{\&}(w)\| \leq C(1 + \|v\|)^m, \quad v \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*,$$

et

$$\|q(v) Q_{\&}(w) e^{1_{\&}(H)}\| \leq C(1 + \|v\|)^m (1 + \|H\|)^m e^{\operatorname{Re} w(4 + \&)(H)},$$

$$v \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*, \quad H \in \mathfrak{a}_Q.$$

(iv) Il existe $C > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que:

$$\|Q_{\&}^0\| \leq C(1 + \|v\|)^m, \quad v \in (\mathfrak{a}_M)_{=0}^*$$

et:

$$\|Q_{\&}^0 e^{1_{\&}(H)}\| \leq C(1 + \|v\|)^m (1 + \|H\|)^m e^{\sup[\operatorname{Re} w\&(H) \mid w \in \mathcal{W}^0]},$$

$$v \in (\mathfrak{a}_M)_{=0}^*, \quad H \in \mathfrak{a}_Q.$$

Démonstration. Soit p_0 un polynôme non nul sur $(\alpha_M)_{\mathbb{C}}^*$ tel que, pour tout $v \in (\alpha_M)_{\mathbb{C}}^*$, l'égalité $w(A+v)|_{\alpha_Q} = w'(A+v)|_{\alpha_Q}$ pour deux éléments distincts, w, w' , de $\mathcal{W}$, implique la nullité de $p_0(v)$ (on peut prendre un produit de fonction affines bien choisies). Donc, si $p_0(v)$ est non nul les $w(A+v)|_{\alpha_Q}$, $w \in \mathcal{W}$, sont deux à deux distincts et l'on a: $Q_{\&}^0 = \sum_{w \in \mathcal{W}^0} Q_{\&}(w)$. On déduit de la proposition 3 de l'appendice B, l'existence d'un multiple de p_0 satisfaisant (i). Montrons (ii). Soit $v_0 \in (\alpha_M)_{2_{-0}}^*$ et montrons l'holomorphie de $Q_{\&}^0$ au voisinage de v_0 . On écrit $\{wv_0|_{\alpha_Q} \mid w \in \mathcal{W}^0\} = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, qui est inclus dans l'ouvert $(\alpha_M)_{2_{-0}}^*$. On choisit $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$ tels que les boules U_i de centre λ_i et de rayon ε_1 , dans $(\alpha_M)_{\mathbb{C}}^*$, soient contenues dans $(\alpha_M)_{2_{-0}}^*$ et deux à deux disjointes. En utilisant les notations et le résultat de la proposition 1 de l'appendice B et en tenant compte du lemme 11 on voit que les Q^{U_i} sont holomorphes au voisinage v_0 . Il suffit donc, pour prouver (ii), de voir que la somme de ces projecteurs est égale à $Q_{\&}^0$, pour $v \in (\alpha_M)_{2_{-0}}^*$, vérifiant $\|v - v_0\| < \varepsilon_1$. Comme les U_i sont deux à deux disjointes cette somme est égale à:

$$\sum_{* \in \cup_{i=1, \dots, n} U_i \cap \text{Sp}(1_{\&})} P_{\&}(\lambda).$$

Si $\lambda \in U_i \cap \text{Sp}(\Gamma_{\&})$, on a $\lambda = w(A+v)|_{\alpha_Q}$, pour un $w \in \mathcal{W}$, avec $\|w(A+v)|_{\alpha_Q} - \lambda_i\| < \varepsilon_1$. En séparant partie réelle et imaginaire, en tenant compte des propriétés de v et λ_i , et en utilisant l'inégalité triangulaire, on voit que l'on a:

$$\|wA|_{\alpha_Q}\| < 4\varepsilon_0 + \varepsilon_1 < 5\varepsilon_0, \quad \text{car } v \in (\alpha_M)_{2_{-0}}^*.$$

D'après la définition de ε_0 , cela implique $w \in \mathcal{W}^0$.

Réciproquement si $w \in \mathcal{W}^0$, et $\|v - v_0\| < \varepsilon_1$, écrivant $wv_0|_{\alpha_Q} = \lambda_i$ pour un i , on a $\|wv|_{\alpha_Q} - \lambda_i\| < \varepsilon_1$, donc $wv|_{\alpha_Q}$ est un élément de U_i . On en déduit l'égalité cherchée, ce qui achève de prouver (ii).

La première inégalité de (iii) résulte de (i). On a: $Q_{\&}(w) e^{1_{\&}(H)} = Q_{\&}(w) e^{Q_{\&}(w) 1_{\&}(H)}$ et $Q_{\&}(w) \Gamma_{\&}(H)$ admet $(w(A+v))(H)$ comme seule valeur propre. De plus $q(v)(Q_{\&}(w) \Gamma_{\&}(H))^k = q(v) Q_{\&}(w)(\Gamma_{\&}(H))^k$ et cette expression est polynomiale en v et H . Alors, la seconde inégalité de (iii) résulte de la première, grâce au lemme suivant de N. Wallach, qui généralise un résultat de Harish-Chandra (cf. [Wal], lemme 12.A.2.4):

On munit l'espace des matrices carrées complexes d'ordre p de la norme de Hilbert-Schmidt. Si A est une telle matrice et $z_1, \dots, z_r$ ses valeurs propres, on a:

$$\|e^A\| \leq p^{1/2} e^{\text{Max}_{i=1, \dots, r} \text{Re } z_i} (1 + \|A\|)^{p-1}. \quad (4.9)$$

Prouvons (iv). Il résulte de (iii), qu'il existe des constantes $C' > 0$ et $m' \in \mathbb{N}$ telles que:

$$\|q(v) Q_{\&}^0\| \leq C'(1 + \|v\|)^{m'}, \quad v \in (\mathfrak{a})_{\mathbb{C}}^*.$$

On utilisera aussi le résultat suivant (appelé "argument de division" dans la suite) (cf. [E, théorème 1.4, p. 8]):

Soit Q un polynôme à valeurs complexes dans les variables $z_1, \dots, z_n$. Il existe des constantes α, β , telles que pour tout $z^0 = (z_1^0, \dots, z_n^0) \in \mathbb{C}^n$, pour tout $\rho > 0$, pour toute fonction holomorphe au voisinage de $B = \{z = (z_1, \dots, z_n) \mid |z_j - z_j^0| \leq \rho, \text{ pour tout } j\}$, on ait la propriété suivante:

Si $|Q(z) F(z)| \leq C, z \in B$, on a $|F(z^0)| \leq \alpha C \rho^{-\beta}$.

On prend ici $\rho = \varepsilon_0$. Si $v_0 \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et $\|v - v_0\| < \rho_{\&}$, on a $v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et $1 + \|v\| \leq (1 + \|v_0\|)(1 + \rho)$. D'où l'on déduit le résultat voulu. ■

Pour une fonction $II_{\text{hol}}(A, k, \varepsilon, \tau)$, φ , et $v \in (\mathfrak{a}_{\mathbb{M}})^*$, $D \in \mathbb{D}(k_{\mathbb{M}_Q})$, on introduit les fonction $\Phi(\varphi_{\&})$ (cf. (3.10), (3.11)) et $\Psi_D(\varphi_{\&})$ (cf. (3.14)). On a l'analogue des équations (3.15), (3.16), (3.17), où φ est remplacé par $\varphi_{\&}$, équations qu'on notera respectivement (3 bis.15), (3 bis.16), (3 bis.17). On a également l'analogue (3 bis.19) (resp. (3 bis.20)), de (3.19) (resp. (3.20)) où φ est remplacé par $\varphi_{\&}$, v décrit $(\mathfrak{a}_{\mathbb{M}})^*$, $s_{F,r}^k$ est remplacé, dans le membre de droite de l'inégalité, par $s_{F,r}^k \cdot \{(\varphi) e^{\{\|\text{Re } \&\| \|X\| e^{\{\|\text{Re } \&\| \|H\|}\}}$. On a aussi l'analogue (3 bis.22) de (3.22).

On notera:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^+ &= \{w \in \mathcal{W} \mid \text{il existe } H \in \mathfrak{a}_Q^+ \text{ avec } w(A)(H) > 0\}, \\ \mathcal{W}^- &:= \mathcal{W} \setminus (\mathcal{W}^0 \cup \mathcal{W}^+) \end{aligned} \quad (4.10)$$

Il est clair qu'on peut choisir $\varepsilon_1 > 0$, plus petit que ε_0 et, pour tout $w \in \mathcal{W}^0 \cup \mathcal{W}^+$, on peut choisir $H \in \mathfrak{a}_Q^+$ tels que:

$$\text{Re}(w(A + v))(H) + \beta_Q(H) > \tau \|\text{Re } v\| \|H\|, \quad v \in (\mathfrak{a}_{\mathbb{M}})_{\mathbb{C}}^* \quad (4.11)$$

On remarque qu'en prenant ε_1 assez petit, on peut choisir $H \in \mathfrak{a}_Q^+$ qui convient pour tout $w \in \mathcal{W}^0$, ce que l'on fait dans la suite. On définit $\Phi_w(\varphi_{\&}) = Q_{\&}(w) \Phi(\varphi_{\&})$. Alors l'expression suivante est bien définie, pour $X \in \mathfrak{a}$, $v \in (\mathfrak{a}_{\mathbb{M}})_{\mathbb{C}}^*$ et w, H satisfaisant (4.11):

$$\begin{aligned} &(\Phi_w, (\varphi_{\&}))(X, H) \\ &= (\Phi_w(\varphi_{\&}))(X) + \int_0^+ (Q_{\&}(w) e^{-t \mathbf{1}_{\&}(H)})(\Psi_H(\varphi_{\&})(X + tH)) dt. \end{aligned} \quad (4.12)$$

On a facilement, pour w , H satisfaisant (4.11), l'analogue (3 bis.27) de (3.27), qui joint à (3 bis.17), implique les analogues (3 bis.28), (3bis.29) de (3.28), (3.29), pour $v \in (\mathfrak{a}_M)_{-1}^*$, où φ est remplacé par $\varphi_{\&}$, λ par w , etc... On choisira en outre ε_1 assez petit pour qu'il existe, pour tout $w \in \mathcal{W}^+$, un élément H de $\mathfrak{a}_Q^+$ vérifiant:

$$\operatorname{Re}(w(A+v))(H) > \tau \|\operatorname{Re} v\| \|H\|, \quad v \in (\mathfrak{a}_M)_{-1}^*. \quad (4.13)$$

On a l'analogue du lemme 22.7 de [HC1] (cf. (3.30)):

$$\begin{aligned} ((\Phi_w, \varphi_{\&})(X, H)) \text{ est identiquement nul si } w \in \mathcal{W}^+ \\ \text{et } H \in \mathfrak{a}_Q^+ \text{ satisfait (4.13)} \end{aligned} \quad (4.14)$$

puis comme dans l.c. Lemme 22.8 (cf. (3.31)):

$$\Phi_w(X, H) \text{ ne dépend pas de } H \in \mathfrak{a}_Q^+ \text{ vérifiant la condition (4.11)}. \quad (4.15)$$

On le fait donc disparaître de la notation.

En particulier

$$(\Phi_w, \varphi_{\&})(X) \text{ est nul si } w \in \mathcal{W}^+. \quad (4.16)$$

On va expliciter l'analogue des lemmes 22.9 à 22.12 de [HC1] pour les familles de fonctions, qui conduiront à l'analogue de la proposition 9 de notre article. Nous avons omis cette explicitation pour le cas d'une seule fonction, car les résultats et preuves sont les mêmes que dans l.c.. Nous traitons de famille holomorphes, dépendant de v dans un ouvert de $(\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*$, à la différence d'Harish-Chandra qui traite de familles dépendant de $v \in i\mathfrak{a}_M^*$. Ceci implique quelques variations dans les énoncés, qui rendent nécessaire, à nos yeux, cette explicitation.

Soit $w \in \mathcal{W}^+$, $H \in \mathfrak{a}_Q^+$ et $v \in (\mathfrak{a}_M)_{-1}^*$ satisfaisant:

$$\operatorname{Re}(w(A+v))(H) + \beta_Q(H)/2 > \tau \|\operatorname{Re} v\| \|H\|. \quad (4.17)$$

On peut appliquer (4.16) que l'on reporte dans (4.12) où l'on change X en $X + TH$. On effectue ensuite le changement de variable $t' = t + T$. Cela conduit, pour $S \in \mathcal{U}(M^+)$ à:

$$(S(\Phi_w(\varphi_{\&}))(X) = - \int_T^+ (\mathcal{Q}_{\&}(w) e^{(T-t)1_{\&}(H)})((S(\Psi_H(\varphi_{\&}))(X + tH)) dt$$

expression que l'on majore grâce à (4.17), en tenant compte du fait que $t - T$ est positif. On obtient, pour $w \in \mathcal{W}^+$, $X \in \mathfrak{a}$, $H \in \mathfrak{a}_Q^+$, $v \in (\mathfrak{a}_M)_{-1}^*$ satisfaisant (4.17) et $T \geq 0$:

$$\begin{aligned} & \| (S(\Phi_w(\varphi_\&)))(X + TH) \| \\ & \leq e^{-(T; Q(H) \ 2) + \{T \ \| \mathbf{Re} \ \& \| \ \| H \|} \times \int_0^+ \| E_\&(w, (T - t) H) \| \\ & \quad \times \| (S(\Psi_H(\varphi_\&)))(X + tH) \| e^{(t; Q(H) \ 2) - \{t \ \| \mathbf{Re} \ \& \| \ \| H \|} dt \end{aligned} \quad (4.18)$$

Soit $w \in \mathcal{W}$, $H \in \mathfrak{a}_Q^+$, et $v \in (\mathfrak{a}_M)_{-1}^*$ satisfaisant:

$$\operatorname{Re}(w(A + v))(H) + (1/2) \beta_Q(H) \leq \tau \| \operatorname{Re} v \| \| H \|. \quad (4.19)$$

On voit, grâce à (3 bis.17), que l'on a, pour $X \in \mathfrak{a}$, $S \in \mathcal{U}(M^+)$, et $T > 0$:

$$\begin{aligned} & \| (S(\Phi_w(\varphi_\&)))(X + TH) \| \\ & \leq e^{-(T; Q(H) \ 2) + \{T \ \| \mathbf{Re} \ \& \| \ \| H \|} \left\{ \| E_\&(w, TH) \| \| (S(\Phi(\varphi_\&)))(X) \| \right. \\ & \quad + \int_0^+ \| E_\&(w, (T - t) H) \| \| (S(\Psi_H(\varphi_\&)))(X + tH) \| \\ & \quad \left. \times e^{(t; Q(H) \ 2) - \{t \ \| \mathbf{Re} \ \& \| \ \| H \|} dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Si $w \in \mathcal{W}^-$, $wA|_{\mathfrak{a}_Q}$ est une combinaison linéaire à coefficients négatifs non tous nuls d'éléments de N_Q restreints à $\mathfrak{a}_Q$. Donc, il existe $\delta_1 > 0$, tels que:

$$\operatorname{Re} wA(H) \leq -\delta_1 \beta_Q(H), \quad H \in \mathfrak{a}_Q^+, \quad w \in \mathcal{W}^-.$$

Soit $\gamma > 0$. On suppose que $H \in \mathfrak{a}_Q^+$ vérifie:

$$\gamma \| H \| < \beta_Q(H). \quad (4.21)$$

On peut donc choisir $\delta, \varepsilon_2 > 0$, ne dépendant que de γ , avec $\delta \leq 1/4$ et $2\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, tels que, pour tout H comme ci-dessus, on ait:

$$\operatorname{Re} w(A + v)(H) \leq -\delta \beta_Q(H), \quad H \in \mathfrak{a}_Q^+, \quad v \in (\mathfrak{a}_M)_{-2}^*, \quad w \in \mathcal{W}^- \quad (4.22)$$

$$\| \operatorname{Re}(wv)(H) \| \leq \delta \beta_Q(H), \quad H \in \mathfrak{a}_Q^+, \quad v \in (\mathfrak{a}_M)_{-2}^*, \quad w \in \mathcal{W}^- \quad (4.23)$$

$$\tau \| \operatorname{Re} v \| \| H \| \leq \beta_Q(H)/4, \quad H \in \mathfrak{a}_Q^+, \quad v \in (\mathfrak{a}_M)_{2-\varepsilon_2}^*. \quad (4.24)$$

Alors, tenant compte de (3 bis.16), et en majorant $t\delta$ par $t/2$, pour $t > 0$, on montre, en partant de (4.12), que, pour $X \in \mathfrak{a}$, $S \in \mathcal{U}(M^+)$, $w \in \mathcal{W}^-$, $H \in \mathfrak{a}_Q^+$ satisfaisant (4.21) et $v \in (\mathfrak{a}_M)_{2^-}^*$, $T > 0$, on a:

$$\begin{aligned} & \| (S(\Phi_w(\varphi_{\&}))(X + TH) \| \\ & \leq e^{-T\mathbb{S};_Q(H)} \left\{ \| E_{\&}(w, TH) \| \| (S(\Phi(\varphi_{\&}))(X) \| \right. \\ & \quad \left. + \int_0^+ \| E_{\&}(w, (T-t)H) \| \| (S(\Psi_H(\varphi_{\&}))(X + tH) \| e^{t;_Q(H)} dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Montrons enfin que, pour $X \in \mathfrak{a}$, $S \in \mathcal{U}(M^+)$, $w \in \mathcal{W}^0$, $H \in \mathfrak{a}_Q^+$ satisfaisant (4.21), $v \in (\mathfrak{a}_M)_{2^-}^*$ et $T > 0$, on a:

$$\begin{aligned} & \| (S(\Phi_w(\varphi_{\&}))(X + TH) - (S(\Phi_{\cdot, w}(\varphi_{\&}))(X + TH) \| \\ & \leq e^{-T\mathbb{S};_Q(H)} \times \int_0^+ \| E_{\&}(w, (T-t)H) \| \\ & \quad \times \| (S(\Psi_H(\varphi_{\&}))(X + tH) \| e^{t;_Q(H)} dt. \end{aligned} \quad (4.26)$$

On obtient une expression du premier membre de l'inégalité en utilisant (3bis.27) en changeant X en $X + TH$, puis en effectuant le changement de variable $t' = t + T$. L'inégalité voulue résulte de (4.22) et du fait que $\delta < 1/2$.

On pose $\Phi_w(\varphi_{\&}) = 0$ si $w \in \mathcal{W}^-$.

On déduit de (4.18), (4.20), (4.23) que, pour $w \in \mathcal{W}$, $X \in \mathfrak{a}$, $H \in \mathfrak{a}_Q^+$ satisfaisant (4.21), $v \in (\mathfrak{a}_M)_{2^-}^*$, $T > 0$, on a:

$$\begin{aligned} & \| (S(\Phi_w(\varphi_{\&}))(X + TH) - (S(\Phi_{\cdot, w}(\varphi_{\&}))(X + TH) \| \\ & \leq e^{-T\mathbb{S};_P(H)} \times \left\{ \| E_{\&}(w, TH) \| \| (S(\Phi_w(\varphi_{\&}))(X) \| \right. \\ & \quad \left. + \int_0^+ \| E_{\&}(w, (T-t)H) \| \| (S(\Psi_H(\varphi_{\&}))(X + tH) \| e^{t;_P(H)} dt \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

THÉOREME 3. *On fixe ε_1 comme ci-dessus. Soit φ une fonction $\Pi_{\text{hol}}(A, k, \varepsilon, \tau)$*

(i) *Soit $X \in \mathfrak{a}$. L'application, définie sur $i\mathfrak{a}_M^*$, $v \mapsto (\varphi_{\&})_Q(X)$, s'étend en une fonction holomorphe sur $(\mathfrak{a}_M)_{\pm 1}^*$, qu'on notera $v \mapsto (\varphi_Q)_{\&}(X)$.*

(ii) L'application $(v, X) \rightarrow \varphi_Q(v, X) := (\varphi_Q)_\&(X)$ est C^∞ sur $(\mathfrak{a}_M)_{-1}^*$ $\times \mathfrak{a}$ et pour tout $p \in S(\mathfrak{a})$ et $X \in \mathfrak{a}$, l'application $v \rightarrow (\partial_p \varphi_Q)(v, X)$ est holomorphe sur $(\mathfrak{a}_M)_{-1}^*$

(iii) On note r_0 , le plus grand des entiers m intervenant dans le lemme 12(iii) et q est le polynôme défini dans ce lemme. On fixe $\gamma > 0$. On choisit $\delta > 0$, ε_2 satisfaisant (4.22), (4.23), (4.24). On fixe q comme dans le lemme 12(i). Soit $S \in \mathcal{U}(M^+)$, $p^* \in S(\mathfrak{a}^*)$.

Il existe une partie finie F de $S(\mathfrak{a})$ tels que, pour tout $H \in \mathfrak{a}_Q^+$ vérifiant $\beta_Q(H) > \gamma \|H\|$, φ fonction $I_{\text{hol}}(A, k, \varepsilon, \tau)$, tout $v \in (\mathfrak{a}_M)_{-2}^*$, on ait pour tout $X \in W_M(C^-)$:

$$|((\partial_{p^*} \circ S)(q(v)(d_Q \varphi_\& - (\varphi_Q)_\&)))(X + H)| \\ \leq s_{F, r}^{k, \tau, \ell}(\varphi) \Theta_{k_M}(X)(v; X)^{r+r_0} e^{-\delta \|Q(H)\|} e^{\ell' \|Re\| \|X\|}$$

et, pour tout $X \in \mathfrak{a}$

$$(iv) \quad |((\partial_{p^*} \circ S)(q(v)(\varphi_Q)_\&))(X)| \leq s_{F, r}^{k, \tau, \ell}(\varphi) \Theta_{k_M}(X)(v; X)^{r+r_0} e^{\ell' \|Re\| \|X\|}$$

Démonstration. (i) D'après la définition de $\mathcal{W}^0$, et de $\mathcal{Q}_\&^0$, on voit, grâce à (3.33) et à l'expression (3.27) pour φ égal à $\varphi_\&$, que l'on a, pour $v \in i\mathfrak{a}^*$,

$$(\varphi_Q)_\& = \langle Y(\varphi_\&), \eta_1 \rangle, \quad (4.28)$$

avec, pour $X \in \mathfrak{a}$ et $H \in \mathfrak{a}_Q^+$,

$$(Y(\varphi_\&))(X) = \mathcal{Q}_\&^0((\Phi_\&)(X)) + \int_0^+ (\mathcal{Q}_\&^0 e^{-t1_\&(H)})(\Psi_H(\varphi_\&)(X + tH)) dt. \quad (4.29)$$

Pour le choix de H précisé après (4.11), le second membre est défini pour $v \in (\mathfrak{a}_M)_{-1}^*$, d'après (4.12). On voit que ce second membre est holomorphe en $v \in (\mathfrak{a}_M)_{-1}^*$, grâce aux propriétés d'holomorphicité de $\varphi_\&(Y)$, de $(\Psi_H(\varphi_\&))(Y)$, $Y \in \mathfrak{a}$ (qui résultent de la définition des fonctions I_{hol}), aux estimations (3 bis.19) et au point (iii) du lemme 12, en tenant compte de (3.25), (3.26). D'où (i). On montre (ii) de façon similaire.

Pour montrer (iii), on suppose d'abord p^* égal à 1. On utilise (4.28) et (4.29). On procède comme dans la preuve du théorème 2(i), en y remplaçant l'utilisation de la proposition 9 par (4.27), (3.19) par (3 bis.19), (3.27), par (3 bis.27) et (3.21) par le lemme 12(iv). Ce qui conduit à l'inégalité cherchée avec $p^* = 1$, et pour $v \in (\mathfrak{a}_M)_{2-2}^*$. Pour passer à p^* quelconque mais pour v seulement dans $(\mathfrak{a}_M)_{-2}^*$, on applique la formule intégrale de Cauchy (cf. [B] preuve du lemme 18.2). D'où l'inégalité voulue.

Pour (iv), comme ci-dessus, on se réduit à établir l'inégalité pour $p^* = 1$ mais pour $v \in (\mathfrak{a}_M)_{2-2}^*$. On part de (4.28) et (4.29). Puis on utilise

le lemme 12(iv), (3 bis.19), pour établir ce que l'on veut pour $X \in W_M(C^-)$. Puis on utilise l'analogie (3 bis.29) de (3.29), et (3.25), (3.26), joints au lemme 12(iv). ■

4.3. Décomposition du terme constant des fonctions Π_{hol}

On note $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$ l'ensemble des restrictions à $\mathfrak{a}_Q$ des éléments s de W qui envoient $\mathfrak{a}_Q$ dans $\mathfrak{a}_M$. On note $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0$ l'ensemble des éléments de $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$ pour lesquels il existe une partie parabolique k -cuspidale de R , contenant R^- , $\tilde{Q}$, contenue dans Q , avec $\dim \mathfrak{a}_Q = \dim \mathfrak{a}_M$ et un élément $\tilde{s}$ de $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$, dont s est la restriction à $\mathfrak{a}_Q$. On établit aisément, comme dans [D3, lemme 2], que $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0$ est non vide seulement si Q contient une partie parabolique k -cuspidale, $\tilde{Q}$, contenant R^- , telle que M_Q et M soient conjugués sous W , et alors on a $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0 = \{w|_{\mathfrak{a}_Q} \mid w \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)\}$.

THÉORÈME 4. Soit φ une fonction $\Pi_{\text{hol}}(k, A, \varepsilon, \tau)$.

(i) Si $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0$ est vide, l'application $v \rightarrow (\varphi_Q)_\&$ est identiquement nulle sur $i\mathfrak{a}_M^*$.

(ii) Si $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0$ est non vide, on fixe $\tilde{Q}$ comme ci-dessus et, pour tout $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0$, on fixe $\tilde{s} \in W$ étendant s et envoyant $\mathfrak{a}_Q$ sur $\mathfrak{a}_M$.

Il existe une fonction polynomiale sur $(\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*$, ω , produit de fonctions affines non nulles et, pour tout $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0$, il existe une fonction C sur $(\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{Z}_2}^* \times \mathfrak{a}$, $\tilde{\varphi}_{Q,s}$ telle que:

(a) Pour tout $p \in S(\mathfrak{a})$, $\partial_p \tilde{\varphi}_{Q,s}$ est holomorphe dans la première variable

(b) On définit une fonction sur $(\mathfrak{a}_Q)_{\mathbb{Z}_2}^* \times \mathfrak{a}$, $\tilde{\varphi}_{Q,s}^{\sim}$ définie par:

$$\tilde{\varphi}_{Q,s}^{\sim}(v, X) := (\tilde{\varphi}_{Q,s})(v \circ \tilde{s}|_{\mathfrak{a}_M}^{-1}, X), \quad v \in (\mathfrak{a}_Q)_{\mathbb{Z}_2}^*, \quad X \in \mathfrak{a}$$

et on pose $q^s(v) = q(v \circ \tilde{s}|_{\mathfrak{a}_M}^{-1})$, $v \in (\mathfrak{a}_Q)^*$. Alors $q^s \tilde{\varphi}_{Q,s}^{\sim}$ est une fonction $\Pi_{\text{hol}}(k_{M_Q}, A \circ \tilde{s}, \varepsilon_2, \tau)$. Ceci implique, en particulier, que, pour $v \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{Z}_2}^*$, $(\tilde{\varphi}_{Q,s})_\&$ se transforme sous $\mathfrak{a}_Q$ par $v^s := v \circ s$ et est $\mathbb{D}(k_{M_Q})$ -propre pour la valeur propre $(A + v)^s$.

(c) On a:

$$\omega(v)(\varphi_Q)_\& = \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0} (\tilde{\varphi}_{Q,s})_\&, \quad v \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{Z}_2}^*$$

Début de la démonstration. On rappelle que $\mathcal{W}$ (resp. $\mathcal{W}^0$) a été défini après le lemme 11 (resp. en (4.8)).

On note $\mathcal{W}$ un sous-ensemble de $\mathcal{W}$ tel que, pour tout $w \in W$, il existe un unique élément $\underline{w}$ de $\mathcal{W}$ tel que:

$$wv|_{\mathfrak{a}_Q} = \underline{w}v|_{\mathfrak{a}_Q}, \quad v \in \mathfrak{a}_M^*.$$

La fonction polynomiale sur $(\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^* \times \mathfrak{a}_Q$, θ , définie par

$$\begin{aligned} \theta(v, H) = & \prod_{w, w' \in \mathcal{W}, w \neq w'} (w(\Lambda + v)(H) - w'(\Lambda + v)(H)) \\ & \times \prod_{x, x' \in \underline{\mathcal{W}}, x \neq x'} (xv(H) - x'v(H)) \end{aligned} \quad (4.30)$$

pour $(v, H) \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^* \times \mathfrak{a}_Q$, est non identiquement nulle, donc il existe un élément H de $\mathfrak{a}_Q$ telle que la fonction ϖ sur $(\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*$, définie par:

$$\varpi(v) := \theta(v, H) \prod_{: \in \mathbb{N}_p} (v, \alpha), \quad v \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*, \quad (4.31)$$

soit non identiquement nulle. On notera Ω le complémentaire de l'ensemble des zéros de ϖ dans $i\mathfrak{a}_M^*$. On fixe $v \in \Omega$. En particulier les $w(\Lambda + v)|_{\mathfrak{a}_Q}$, $w \in \mathcal{W}$, sont deux à deux distincts.

D'après le théorème 2(iii), on a:

$$D_p(k_{M_Q})(\varphi_Q)_{\mathbb{K}} = p(\Lambda + v)(\varphi_Q)_{\mathbb{K}}, \quad p \in S(\mathfrak{a})^W \quad (4.32)$$

Le corollaire de la proposition 6, appliqué à M_Q au lieu de R , et $\varphi(Q)$ au lieu de φ , montre que φ_Q est somme de fonctions qui sont des vecteurs poids généralisés sous l'action de $\mathfrak{a}_Q$, pour des poids imaginaires purs. Par ailleurs (4.32) implique que φ_Q est somme de fonctions $\mathbb{D}(k_{M_Q})$ -propres généralisées pour des valeurs propres de la forme $w'(\Lambda + v)$, où w' est un élément de W , et qui, d'après ce qui précède, vérifie $\operatorname{Re} w'(\Lambda + v)|_{\mathfrak{a}_Q} (= \operatorname{Re} (w'\Lambda)|_{\mathfrak{a}_Q}) = 0$. Tenant compte de la définition de $\mathcal{W}^0$, il en résulte que l'on peut écrire de manière unique

$$(\varphi_Q)_{\mathbb{K}} = \sum_{w \in \mathcal{W}^0} \psi_{w, \mathbb{K}}, \quad (4.33)$$

où $\psi_{w, \mathbb{K}} \in \mathcal{A}_{\text{temp}}(\mathfrak{a}, k_{M_Q})$ est somme de fonctions $\mathbb{D}(k_{M_Q})$ -propres généralisées pour des valeurs propres de la forme $w'(\Lambda + v)$, où w' est un élément de W satisfaisant:

$$w'(\Lambda + v)|_{\mathfrak{a}_Q} = w(\Lambda + v)|_{\mathfrak{a}_Q}. \quad (4.34)$$

En particulier, puisque $w \in \mathcal{W}^0$, on a $w'(\Lambda)|_{\mathfrak{a}_Q} = 0$. On déduit de la Proposition 10(ii), appliquée à $\psi_{w, \mathbb{K}}$, que si $\psi_{w, \mathbb{K}}$ est non nul, il existe

$w' \in W$ satisfaisant (4.34), il existe une partie parabolique k -cuspidale de R , contenant R^- et contenue dans Q , Q_1 , il existe $A_1 \in (\mathfrak{a}^{M_{Q_1}})^*_{\text{disc}}(k_{M_{Q_1}})$, $v_1 \in i\mathfrak{a}^*_{Q_1}$ et $w'' \in W_{M_Q}$, vérifiant:

$$w''w'(A+v) = A_1 + v_1. \quad (4.35)$$

LEMME 13. Soit $w \in \mathcal{W}^0$. L'ensemble Ω_w des éléments v de Ω tels que $\psi_{w, \&}$ soit non nul est un ouvert de Ω .

Démonstration. Raisonnons par l'absurde et supposons Ω_w non ouvert. Alors $\Omega \setminus \Omega_w$ n'est pas fermé dans Ω et il existe une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\Omega \setminus \Omega_w$ convergeant vers un élément v de Ω_w . Comme $\psi_{w, \&}$ est non nul, il résulte du théorème 2(ii), et de (4.34), que $\lambda = wv|_{\mathfrak{a}_Q} - \rho_Q(k)$ est un exposant directeur de $\varphi_{\&}$, le long de Q .

On considère la famille de systèmes différentiels (2.2), lorsque v varie dans $(\mathfrak{a}_M)^*_{\mathbb{C}}$, I est égal à l'idéal de $S(\mathfrak{a})^W$ formé des éléments s'annulant en $A+v$ et $V=\mathbb{C}1$. L'étude de l'algorithme permettant d'écrire le système (2.2) (cf. la preuve de la proposition 1) montre que les fonctions G_* de (2.2) dépendent de façon holomorphe de $v \in (\mathfrak{a}_M)^*_{\mathbb{C}}$. Par ailleurs, le système satisfait la condition de Frobenius et il est complètement intégrable pour tout $v \in (\mathfrak{a}_M)^*_{\mathbb{C}}$ (cf. [HO1] corollaire 3.6). On peut donc appliquer les résultats de l'appendice C.

La proposition C.2(iii), jointe à la proposition 5(ii), montre qu'il existe une suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $(\mathfrak{a}_Q)^*_{\mathbb{C}}$ convergeant vers λ et telle que pour tout n , λ_n est un exposant de $\varphi_{\&_n}$ le long de Q . D'après la proposition 3 et la proposition 5(ii), on a

$$\lambda_n = w_n(A+v_n)|_{\mathfrak{a}_Q} - \rho_Q(k) - \sum_{: \in N_Q} \mu_{:,n} \alpha_{|_{\mathfrak{a}_Q}}$$

où $w_n \in \mathcal{W}$ et les $\mu_{:,n}$ des entiers positifs. Ceux-ci doivent être bornés indépendamment de n , puisque la suite (λ_n) est convergente donc bornée. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que w_n (resp., $\mu_{:,n}$) est égal pour tout n à $w_0 \in \mathcal{W}$ (resp., $\mu_{:} \in \mathbb{N}$). Par passage à la limite et en séparant partie réelle et partie imaginaire, on trouve:

$$w_0 A|_{\mathfrak{a}_Q} - \sum_{: \in N_Q} \mu_{:} \alpha_{|_{\mathfrak{a}_Q}} = 0, \quad w_0 v|_{\mathfrak{a}_Q} = wv|_{\mathfrak{a}_Q} \quad (4.36)$$

Comme $v \in \Omega$, la deuxième égalité montre que w_0 et w ont même représentants dans $\mathcal{W}$. Donc $w_0 v_n|_{\mathfrak{a}_Q} = wv_n|_{\mathfrak{a}_Q}$ pour tout n . Comme $w \in \mathcal{W}^0$, on déduit de la première égalité de (4.36):

$$\lambda_n = w(A+v_n)|_{\mathfrak{a}_Q} - \rho_Q(k).$$

Mais alors $\psi_{w, \&_n}$ est non nul d'après le théorème 2(ii). Ceci contredit l'hypothèse sur les v_n . Donc Ω_w est ouvert. ■

LEMME 14. *Soit $w \in \mathcal{W}^0$ tel que Ω_w soit non vide.*

(i) *Il existe $s \in W^0(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$ tel que, pour tout $v \in \mathfrak{a}_M^*$, on ait: $wv|_{\mathfrak{a}_Q} = v^s$, où $v^s := v \circ s$.*

(ii) *Soit $\tilde{s}$ un élément de W prolongeant s . La fonction $\psi_{w, \&}$ est $\mathbb{D}(k_{M_Q})$ -propre généralisé pour la valeur propre $(\Lambda + v)^s$, $v \in \Omega$*

Démonstration. Comme $\mathfrak{a}$ est muni d'une structure euclidienne, le dual de chaque sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}$ s'identifie à un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{a}^*$.

Si Q' est une partie parabolique de R , contenue dans Q et contenant R^- , et w' un élément de W on note

$$A_{w', Q'} := \{v \in i\mathfrak{a}_M^* \mid w'v \in i\mathfrak{a}_{Q'}^*\}$$

qui est un sous-espace vectoriel de $i\mathfrak{a}_M^*$. On note A la réunion des $A_{w', Q'}$ d'intérieur vide. Son complémentaire est donc dense et rencontre l'ouvert non vide Ω_w . Soit v un élément de cette intersection. D'après la discussion qui précède le lemme 13, et avec les notations de celle-ci, on voit, en séparant partie réelle et partie imaginaire dans (4.35), que v est un élément de $A_{w''w', Q_1}$. Comme v n'est pas élément de A , cela implique que $A_{w''w', Q_1}$ est d'intérieur non vide donc égal à $i\mathfrak{a}_M^*$. En outre, toujours d'après (4.35), on a $w''w'A = A_1$. Il résulte de ce qui précède que les sous espaces tempérés $w''w'(A + i\mathfrak{a}_M^*)$ et $A_1 + i\mathfrak{a}_{Q_1}^*$ sont contenus l'un dans l'autre, donc égaux d'après (3.39). On note $s_1 = (w''w')|_{\mathfrak{a}_{Q_1}}^{-1}$. C'est un élément de W qui conjugue les parties paraboliques k -cuspidales P et Q_1 et sa restriction s à $\mathfrak{a}_Q$ est un élément de $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$. Comme w'' est élément de $W_{M_{Q_1}}$, $w''w'(A + v)|_{\mathfrak{a}_Q}$ est égal à $w'(A + v)|_{\mathfrak{a}_Q}$. Grâce à (4.34), on en déduit que $w''w'v|_{\mathfrak{a}_Q} = wv|_{\mathfrak{a}_Q}$. D'après la définition de Ω , cette égalité implique une égalité semblable en remplaçant v par un élément quelconque de $i\mathfrak{a}_M^*$. Cela implique que s vérifie les propriétés voulues. Ceci prouve (i).

Soit $w', w'_1, w'', w''_1 \in W$ satisfaisant (4.34) et (4.35) pour un $v \in \Omega$. Notons $\tilde{s} = (w''w')^{-1}$, $\tilde{s}_1 = (w''_1w'_1)^{-1}$ qui envoient $\mathfrak{a}_Q$ dans $\mathfrak{a}_M$, d'après la preuve de (i). On a alors $w'v|_{\mathfrak{a}_Q} = w'_1v|_{\mathfrak{a}_Q}$ d'après (4.34). Comme $\varpi(v)$ est non nul, les applications $\lambda \mapsto w'\lambda|_{\mathfrak{a}_Q}$, $\lambda \mapsto w'_1\lambda|_{\mathfrak{a}_Q}$, $\lambda \in i\mathfrak{a}_M^*$ sont égales. Ceci s'écrit encore:

$$\lambda \circ \tilde{s}|_{\mathfrak{a}_Q} = \lambda \circ \tilde{s}_1|_{\mathfrak{a}_Q}, \quad \lambda \in i\mathfrak{a}_M^*.$$

Comme $\tilde{s}, \tilde{s}_1$ envoient $\mathfrak{a}_Q$ dans $\mathfrak{a}_M$, cela implique que la restriction de $\tilde{s}$ à $\mathfrak{a}_Q$ coïncide avec celle de $\tilde{s}_1$. Il en résulte que $\tilde{s}, \tilde{s}_1$ sont dans la même classe

à droite modulo W_{M_Q} , donc $w''w'$ et $w_1''w_1'$ sont dans la même classe à gauche modulo W_{M_Q} , de même que w' et w_1' . Finalement, la discussion qui précède le lemme 13 permet de voir que $\psi_{w, \&}$ est $\mathbb{D}(k_{M_Q})$ -propre généralisé pour la valeur propre $(\lambda + \nu)^s$. Tenant compte de (4.32) et (4.33), on voit que $\psi_{w, \&}$ est propre sous les opérateurs $D_p(k_{M_Q})$, $p \in S(\mathfrak{a})^W$. Pour conclure que $\psi_{w, \&}$ est $\mathbb{D}(k_{M_Q})$ -propre, il suffit, grâce à [D1], proposition A.2, de voir que le stabilisateur de $(\lambda + \nu)^s$ dans W est contenu dans W_{M_Q} . Comme ν est imaginaire et λ réel, le stabilisateur de $\lambda + \nu$ est contenu dans le stabilisateur de ν . Comme $\nu \in \Omega$, $\varpi(\nu)$ est non nul et ce stabilisateur est donc inclus dans W_M , puisqu'il est engendré par les s_i avec $(\nu, \alpha) = 0$. Le résultat voulu s'en déduit par transport de structure par $\tilde{s}$ puisque celui-ci envoie $\mathfrak{a}_Q$ dans $\mathfrak{a}_M$. ■

Suite de la démonstration du théorème 4. Soit $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0$. Comme $A \circ \tilde{s}|_{\mathfrak{a}_Q} = 0$, il résulte de la définition de $\mathcal{W}^0$, il existe un unique $w \in \mathcal{W}^0$, tel que pour tout $\nu \in i\mathfrak{a}_M^*$, $\nu^s = w\nu|_{\mathfrak{a}_Q}$. On pose:

$$\varphi_{Q, s, \&} := \psi_{w, \&}, \quad \nu \in \Omega \quad (4.37)$$

On déduit de (4.33) et (4.37) que:

$$(\varphi_Q)_{\&} = \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0} \varphi_{Q, s, \&}, \quad \nu \in \Omega \quad (4.38)$$

Grâce au lemme précédent, on voit que, pour tout $\nu \in \Omega$, l'action de $H \in \mathfrak{a}_Q$ sur l'espace engendré E par les $\varphi_{Q, \&, s}$ est semi-simple avec pour seules valeurs propres possibles $\nu^s(H)$, $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0$.

Le fait suivant est immédiat.

*Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout endomorphisme semi-simple de $\mathbb{C}^{n+1}$, A , avec q valeurs propres distinctes parmi $\lambda_0, \dots, \lambda_r$, le projecteur spectral P_{*0} sur le sous-espace propre correspondant à la valeur propre λ_0 vérifie:*

$$(\lambda_0 - \lambda_1) \cdots (\lambda_0 - \lambda_r) P_{*0} = (A - \lambda_1) \cdots (A - \lambda_r)$$

Appliqué à l'action de ∂_H sur E , notant

$$\varpi_1(\nu) := \prod_{s, s' \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0, s \neq s'} (\nu^s - \nu^{s'})(H), \quad \nu \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*,$$

et introduisant les polynômes à une indéterminée z :

$$p_{s, \&}(z) := \prod_{s' \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)_k^0, s' \neq s} (z - \nu^{s'}(H)), \quad \nu \in (\mathfrak{a}_M)_{\mathbb{C}}^*$$

on a

$$\varpi_1(v) \varphi_{Q, s, \&} = \partial_{p_{s, \&}(H)}(\varphi_Q)_{\&}, \quad v \in \Omega \quad (4.39)$$

Posons $\omega = \varpi \varpi_1$ et

$$\tilde{\varphi}_{Q, s, \&} := \omega(v) \partial_{p_{s, \&}(H)}(\varphi_Q)_{\&}, \quad v \in i\alpha^* \quad (4.40)$$

D'après le théorème 3(ii) et (iv) la fonction $(v, H) \mapsto q(v) \tilde{\varphi}_{Q, s, \&}(H)$, admet un prolongement qui est un élément de $\mathcal{F}_{\text{hol}}(\alpha, k, \varepsilon_2, \tau)$. Joint au lemme 14(ii), cela implique que $q^s \tilde{\varphi}_{Q, s}^s$ est une fonction $\Pi_{\text{hol}}(k_{M_Q}, A \circ \tilde{s}|_{\alpha^{M_Q}}, \varepsilon_2, \tau)$, comme désiré. Par ailleurs, d'après (4.33), (4.37), (4.39) et (4.40) on a l'égalité de c) pour $v \in \Omega$. Par ailleurs, si $v \notin \Omega$, $\varpi(v)$ est nul, donc aussi $\omega(v)$ et $\tilde{\varphi}_{Q, s, \&}$. L'égalité voulue est encore satisfaite. Ceci achève la démonstration du théorème. ■

4.4. Améliorations des estimations

Soit $\varepsilon, \tau > 0$, $\eta \in \alpha^*$, Q une partie parabolique maximale contenant R^- . On note $\mathcal{E}_{\text{hol}}(\alpha, k, \eta, \varepsilon, \tau)$ (resp., $\mathcal{E}_{\text{hol}, +, Q}(\alpha, k, \eta, \varepsilon, \tau)$), l'espace des fonctions φ, C^∞ sur $(\alpha_M^*)_- \times \alpha$, holomorphes dans la première variable, et telles que, pour tout $p \in S(\alpha)$, il existe $r > 0$ vérifiant

$$\sup_{\& \in (\alpha_M^*)_-, X \in \alpha} |(v; X)^{-r} e^{-\langle X_+ \rangle} e^{-\{\|\text{Re } \&\| \|X\|} (\partial_p \varphi_{\&})(X)| < +\infty,$$

resp.,

$$\sup_{\& \in (\alpha_M^*)_-, X \in W_{M_Q} C^-} |(v; X)^{-r} e^{i\langle Q(X) - \langle X_+ \rangle} e^{-\{\|\text{Re } \&\| \|X\|} (\partial_p \varphi_{\&})(X)| < +\infty$$

où X_+ est l'unique élément de l'adhérence de C^+ conjugué par W à X .

Notez que $\mathcal{F}_{\text{hol}}(\alpha, k, \varepsilon, \tau)$ est égal à $\mathcal{E}_{\text{hol}}(\alpha, k, -\rho(k), \varepsilon, \tau)$.

LEMME 15. (i) Les opérateurs ∂_p , $p \in S(\alpha)$, et $\Delta_\cdot$, $\alpha \in R^+$ (resp., $\alpha \in M_Q$) laissent invariant $\mathcal{E}_{\text{hol}}(\alpha, k, \eta, \varepsilon, \tau)$ (resp., $\mathcal{E}_{\text{hol}, +, Q}(\alpha, k, \eta, \varepsilon, \tau)$).

(ii) Les opérateurs $\Delta_\cdot$, $\alpha \in -N_Q$, envoient $\mathcal{E}_{\text{hol}}(\alpha, k, \eta, \varepsilon, \tau)$ dans $\mathcal{E}_{\text{hol}, +, Q}(\alpha, k, \eta, \varepsilon, \tau)$.

Démonstration. On procède comme dans la démonstration des lemmes 9 et 10 où l'on remplace $-\rho(k)$ par η . ■

On note $\mathcal{M}(A, k, \varepsilon, s)$, l'espace des fonctions φ, C^∞ sur $(\alpha_M^*)_- \times \alpha$, holomorphes dans la première variable, et telles que, pour tout $p \in S(\alpha)$, il existe $r > 0$, $C > 0$ vérifiant:

$$|\partial_p \varphi_{\&}(X)| \leq C(v; X)^r \Theta_k(X) e^{s \|X\|}, \quad (v, X) \in (\alpha_M^*)_- \times \alpha.$$

PROPOSITION 11. Soit φ un élément de $\mathcal{M}_{\text{hol}}(\mathfrak{a}, k, \eta, \varepsilon, s)$ vérifiant (4.6), et telle que, pour tout $v \in i\mathfrak{a}_{\mathbf{M}}^*$, $\varphi_{\&}$ est k -tempéré.

Il existe $\varepsilon' > 0$, $\varepsilon' < \varepsilon$, et $\tau > 0$ tels que φ soit $II_{\text{hol}}(k, A, \varepsilon', \tau)$.

Démonstration. On procède comme dans la preuve du théorème 3 de [D2] en commençant par l'analogue du lemme 23 de l.c. puis en appliquant la technique d'amélioration des majorations étape par étape due à E. van den Ban [B], preuve du théorème 18.3, ce qui est possible grâce au lemme précédent. En effet, grâce à celui-ci, on établit l'analogue du lemme 18.9 de l.c, en procédant comme dans la preuve de (3 bis.19). ■

DÉFINITION 5. On dit qu'une fonction $II_{\text{hol}}(k, A, \varepsilon, \tau)$, φ , est $II'_{\text{hol}}(k, A, \varepsilon', \tau')$ ($II'_{\text{hol}}(k, A)$ en abrégé) si et seulement si on a:

Pour toute partie parabolique, Q , de R , contenant R^- et $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_{\mathbf{M}})_k^0$, on fixe $\tilde{Q}$, $\tilde{s}$ comme dans le théorème 4 et on note $\Omega_{\tilde{s}} := \{v \circ \tilde{s}|_{\mathfrak{a}_Q} \mid v \in \Omega\}$. La fonction $\varphi_{Q, s}^{\sim}$, définie a priori uniquement sur $\Omega_{\tilde{s}} \times \mathfrak{a}$, par $\varphi_{Q, s}^{\sim}(v, X) = \varphi_{Q, s, \& \circ \tilde{s}|_{\mathfrak{a}_{\mathbf{M}}}^{-1}}(X)$ (cf. (4.37) et (4.33)), se prolonge en une fonction $II_{\text{hol}}(k_{\mathbf{M}_Q}, A|_{\mathfrak{a}^{\mathbf{M}_Q}}, \varepsilon', \tau')$.

PROPOSITION 12. Si φ est une fonction $II_{\text{hol}}(k, A, \varepsilon, \tau)$, il existe $\varepsilon' > 0$ avec $\varepsilon' < \varepsilon$, $\tau' > 0$, et un produit de fonctions affines non nulles sur $(\mathfrak{a}_{\mathbf{M}})_{\mathbb{C}}^*$, p , tels que l'application sur $(\mathfrak{a}_{\mathbf{M}})_{\mathbb{C}}^* \times \mathfrak{a}$, $(v, X) \mapsto p(v) \varphi(v, X)$, soit $II'_{\text{hol}}(k, A, \varepsilon', \tau')$.

Démonstration. Le théorème 4 et l'argument de division par $q^{\sim}$ permettent d'appliquer la proposition précédente. ■

Parvenu à ce point on a l'analogue des théorèmes 1 et 2 de [BCD], le premier formant des paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz, le second donnant un critère pour que certaines fonctions soit II'_{hol} .

4.5. Relations de Maass–Selberg

On se donne dans cette section une fonction $II'_{\text{hol}}(k, A, \varepsilon, \tau)$, φ . Si Q est une partie parabolique de R contenant R^- , et $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_{\mathbf{M}})$, $\varphi_{Q, s}$ a déjà été défini si $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_{\mathbf{M}})_k^0$ et on le déclare nul si $s \notin W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_{\mathbf{M}})_k^0$. On a alors:

$$(\varphi_Q)_{\&} = \sum_{s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_{\mathbf{M}})} \varphi_{Q, s, \&}, \quad v \in (\mathfrak{a}_{\mathbf{M}})_{\mathbb{C}}^*. \quad (4.41)$$

Il résulte de la définition de $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_{\mathbf{M}})_k^0$ et de la proposition 10(i), que, si la dimension de $\mathfrak{a}_Q$ est égale à celle de $\mathfrak{a}_{\mathbf{M}}$, on a:

$$(\varphi_{Q, s, \&})|_{\mathfrak{a}^{\mathbf{M}_Q}} \in \mathcal{A}_2(\mathfrak{a}^{\mathbf{M}_Q}, k_{\mathbf{M}_Q}, A|_{\mathfrak{a}^{\mathbf{M}_Q}})^{W_{\mathbf{M}_Q}}, \quad v \in i\mathfrak{a}_{\mathbf{M}}^*.$$

On sait (cf. e.g. [War], proposition 1.1.2.12) que:

Deux parties paraboliques, contenant R^- et conjuguées par W , sont égales (4.42)

Donc, pour toute partie parabolique Q de R , il existe une unique partie parabolique Q' de R , contenant R^- et un élément w de W , unique modulo l'action à droite de W_{M_Q} , tels que: $Q' = w(Q)$. Ceci permet de définir, lorsque la dimension de $\mathfrak{a}_Q$ est égale à celle de $\mathfrak{a}_M$:

$$\varpi_{Q, s, \&} := \|(\varphi_{Q', s w_{|_{\mathfrak{a}_{Q'}}}^{-1}, \&})_{|_{\mathfrak{a}^{M_{Q'}}}}\|_{L^2(\mathfrak{a}^{M_{Q'}}, +_{k_{M_{Q'}}})}, \quad s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M), \quad v \in i\mathfrak{a}_M^*. \quad (4.43)$$

LEMME 16. *On suppose que P est une partie parabolique distincte de R et maximale. Notons $\bar{P} = -P$.*

(i) *On a:*

$$\varpi_{P, 1, \&} = \varpi_{P, 1, \&}, \quad v \in i\mathfrak{a}_M^*.$$

(ii) *Si $W(\mathfrak{a}_P) := W(\mathfrak{a}_P, \mathfrak{a}_P)$ a un élément non trivial, s , on a:*

$$\varpi_{P, 1, \&} = \varpi_{P, s, \&} = \varpi_{P, s, \&}, \quad v \in i\mathfrak{a}_M^*$$

Démonstration. L'analogue du théorème 2 (avec preuve identique) de [D3], donne (i), puis la première égalité de (ii), l'égalité entre le premier et le troisième terme résultant de la définition de $\varpi_{P, s, \&}$ (cf. (4.43)). ■

PROPOSITION 13 (Relations de Maass–Selberg). *On ne fait plus d'hypothèse sur P . Soit Q une partie parabolique de R , contenant R^- , telle que la dimension de $\mathfrak{a}_Q$ est égale à celle de $\mathfrak{a}_M$. On a:*

$$\varpi_{Q, s, \&} = \varpi_{P, 1, \&}, \quad v \in i\mathfrak{a}_M^*, \quad s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M).$$

Démonstration. On fixe un élément s' de W étendant s . Revenant à la définition (4.43), on voit qu'on l'égalité de fonctions sur $i\mathfrak{a}_M^*$:

$$\varpi_{Q, s} = \varpi_{(s')^{-1}(Q), 1}. \quad (4.44)$$

Il suffit donc de démontrer l'égalité $\varpi_{Q, s} = \varpi_{Q', s}$, pour tout Q, Q' vérifiant $M = M_Q = M_{Q'}$, donc aussi $\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_{Q'}$, ce qui se ramène aisément au cas où Q, Q' sont adjacents (avec Q contenant R^- et vérifiant $\mathfrak{a}_Q = \mathfrak{a}_M$), c'est à dire sont inclus dans une partie parabolique S de R , telle que $Q_S = Q \cap M_S$ et $Q' \cap M_S$ soient des parties paraboliques maximales et opposées de M_S . On remarque que $\mathfrak{a}_{Q_S} = \mathfrak{a}_M$. On note $\bar{s}$ la restriction de

s à α_s et $\tilde{s}$ un élément de W prolongeant s . Alors $\bar{s}$ est un élément de $W(\alpha_s, \alpha_M)$. Si c'est un élément de $W(\alpha_s, \alpha_M)_k^0$, on fixe $\tilde{\tilde{s}}$ comme dans le théorème 4. On suppose d'abord que $W_{M_s}(\alpha_{Q_s})$ possède deux éléments 1, t . On dispose de l'écriture (4.41) de φ_Q et φ_s . On peut à nouveau appliquer cette décomposition aux fonctions $(\varphi_{s,s})_{Q_s}$.

On déduit de l'hérédité du terme constant (théorème 2(iv)) et de l'indépendance linéaire des exponentielles que l'on a:

$$(\varphi_{s,s})_{Q_s,1} = \varphi_{Q,s}, \quad (\varphi_{s,s})_{Q_s,t} = \varphi_{Q,st}.$$

Alors $\varpi_{Q,s} = \varpi_{Q,st}$, d'après le lemme précédent appliqué à la fonction $\varphi_{s,s}^{\tilde{s}}$. Mais $\varpi_{Q,st} = \varpi_{Q',s}$ d'après (4.44), d'où l'égalité voulue.

Si $W_{M_s}(\alpha_{Q_s})$ est réduit à un élément, le lemme précédent appliqué à $\varphi_{s,s}^{\tilde{s}}$ conduit, dans ce cas aussi, à l'égalité voulue. ■

5. TRANSFORMATION DE FOURIER HYPERGÉOMÉTRIQUE

5.1. Fonction hypergéométrique

La fonction hypergéométrique attachée à R est une fonction holomorphe de trois variables, $(v, k, X) \mapsto F(v, k)(X)$, définie en particulier sur l'ensemble des $v \in \alpha_{\mathbb{C}}^*$, $k \in \mathcal{K}$, $X \in \alpha_{\mathbb{C}}$ vérifiant:

$$\operatorname{Re}(\rho(k)(\check{\beta}) + k; +1) > 0, \quad \text{si } \beta \text{ est la plus haute racine courte}$$

$$\text{d'une composante irréductible de } R, \quad (5.1)$$

$$|\operatorname{Im} \alpha(X)| < 2\pi, \quad \alpha \in R, \quad (5.2)$$

W invariante en v et X , satisfaisant le système différentiel hypergéométrique:

$$D_p(k) F(v, k) = p(v) F(v, k), \quad p \in S(\alpha)^W, \quad v \in \alpha_{\mathbb{C}}^*, \quad (5.3)$$

et vérifiant

$$F(v, k)(0) \equiv 1, \quad (5.4)$$

les propriétés ci-dessus étant caractéristiques (cf. [HO1] et [O1], voir aussi [O2, théorème 2.4]). Notez que la fonction hypergéométrique est définie sur un domaine plus large (voir plus bas).

On dispose en outre du développement de $F(v, k)$, en dehors de certaines valeurs de (v, k) . Précisons. Pour tout m élément de $\mathbb{N}R^+$, il existe une unique fraction rationnelle $\Delta_m(k, v)$, avec pôles uniquement sur la

famille localement finie d'hyperplans d'équations $(v, m'/2(m', m')) + 1 = 0$, $m' \in \mathbb{N}R^+ \setminus \{0\}$, avec

$$\Delta_0 = 1 \quad (5.5)$$

et telles que, en dehors de ces pôles, pour $X \in C^-$, et $\operatorname{Re}(v(\check{\alpha})) > -1$ pour α élément de R^+ , la série

$$\Phi(v, k)(X) := \sum_{m \in \mathbb{N}R^+} \Delta_m(v, k) e^{(\check{\alpha} + \backslash(k) + \cdot)(X)} \quad (5.6)$$

soit convergente et vérifie le système différentiel hypergéométrique (5.3). De plus les fonctions $\Delta_m(v, k)$ sont déterminées par les relations de récurrence suivantes (cf. [HO1], équation (3.14)):

$$\begin{aligned} & ((v, v) - (v + m, v + m)) \Delta_m(v, k) \\ &= \sum_{\cdot \in R^+} k_{\cdot} \sum_{j \in \mathbb{N}^*, m-j \cdot \in \mathbb{N}R^+} \Delta_{m-j \cdot}(v, k). \end{aligned} \quad (5.7)$$

On note, pour les valeurs de $v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et $k \in \mathcal{K}$ telles que le membre de droite de l'égalité suivante soit bien défini,

$$\tilde{c}(v, k) := \prod_{\cdot \in R^+} \Gamma(v(\check{\alpha}))/\Gamma(v(\check{\alpha}) + k_{\cdot}), \quad (5.8)$$

et de même

$$c(v, k) = \tilde{c}(v, k)/\tilde{c}(\rho(k), k). \quad (5.9)$$

Notez que la condition (5.1) évite les zéros de $\tilde{c}(\rho(k), k)$ (cf. [O2, théorème 2.4] pour des références). Pour k satisfaisant (5.1) et $v \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ régulier vérifiant $(v, m'/2(m', m')) + 1 \neq 0$ pour tout $m' \in \mathbb{Z}R \setminus \{0\}$, on a:

$$F(v, k)(X) = \sum_{w \in W} c(-wv, k) \Phi(wv, k)(X), \quad X \in C^-. \quad (5.10)$$

On va établir un lemme qui va nous permettre d'appliquer la proposition 11. Nous remercions E. Opdam pour nous en avoir donné la démonstration.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des zéros de la fonction méromorphe de k , $\tilde{c}(\rho(k), k)$. La fonction hypergéométrique se prolonge analytiquement à $(\mathcal{K} \setminus \mathcal{S}) \times \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^* \times \mathfrak{a}$ (cf. e.g., [HS, partie 1, chap. 4]).

LEMME 17. *Soit $k \in \mathcal{K} \setminus \mathcal{S}$. Pour $p \in S(\mathfrak{a})$, il existe $C > 0$ et $r > 0$ tels que:*

$$|\partial_p F(\lambda, k)(X)| \leq CN_r(\lambda) e^{\max_{w \in W} \operatorname{Re} w^*(X)}, \quad \lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*, \quad X \in \mathfrak{a}$$

Démonstration. On montre d'abord l'assertion lorsque la partie réelle de la multiplicité est positive. Cela résulte de résultats similaires pour la fonction G dans [O1], proposition 6.1(i) et corollaire 6.2 et de l'expression de F à l'aide de G (cf. la preuve du théorème 3.15 de l.c.). On passe au cas général à l'aide des opérateurs de décalage d'Opdam, comme dans la preuve du théorème 2.5 de [O2]. ■

5.2. Fonctions hypergéométriques tempérées

On suppose désormais que $k_{\cdot} < 0$, pour tout $\alpha \in R$ et que l'élément $\rho(k)$ de $\mathfrak{a}^*$ appartient à l'ensemble convexe et W -invariant $\{\lambda \in \mathfrak{a}^* \mid |\lambda(\check{\alpha})| < 1 + k_{\cdot}, \alpha \in R\}$.

D'après [O2, preuve du lemme 3.3 et proposition 1.1]: Cette condition est équivalente à la condition (5.1), jointe à l'hypothèse $k_{\cdot} < 0$, pour tout $\alpha \in R$.

Cela n'est montré dans [O2] que pour des systèmes irréductibles, mais on remarque que les résultats de [O2] s'étendent aux systèmes non irréductibles. L'intérêt de cette reformulation est que l'on voit facilement que:

Si k satisfait cette hypothèse et si P est une partie parabolique de R , contenant R^- , k_{M_P} vérifie cette hypothèse relativement à M_P .

En effet, d'après la W_{M_P} invariance de $\sum_{\cdot \in N_P} k_{\cdot} \alpha$, la projection orthogonale de $\rho(k)$ sur $\mathfrak{a}^{M_P}$ est égale à $\rho(k_{M_P})$. Mais, si $\lambda \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ vérifie $|\lambda(\check{\alpha})| < 1 + k_{\cdot}$ pour tout $\alpha \in M_P$, il en va de même pour sa projection orthogonale sur $\mathfrak{a}^{M_P}$.

D'après [O2, théorème 5.7], on a:

$$F(A, k) \quad \text{est une base de } \mathcal{A}_2(\mathfrak{a}, k, A)^W, \quad \text{pour } A \in \mathfrak{a}_{\text{disc}}^*(k). \quad (5.11)$$

En fait ceci n'est prouvé dans [O2] que lorsque R est irréductible. Mais on s'y ramène aisément grâce au théorème de Fubini.

En outre, de [O2] on déduit que, si P est une partie parabolique de R contenant R^- et $A \in (\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^*(k)$, on a:

$$F(A + v, k) \text{ est définie et } k\text{-tempérée, pour tout } v \in i\mathfrak{a}_{M_P}^*. \quad (5.12)$$

En effet, pour A comme ci-dessus, on note $L = A + \mathfrak{a}_P$, et on utilise les notations de [O2], théorème 3.4. Il résulte des théorèmes 3.13, 3.18 de [HO2], que la constante $\gamma_L(k)$ est non nulle. Ceci permet d'appliquer les corollaires 3.5 et 3.7 de [O2] et de parvenir à la conclusion souhaitée.

En utilisant l'invariance de la fonction hypergéométrique pour l'action de W sur la variable dans $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, et la proposition 10 on en déduit:

PROPOSITION 14. *Pour tout λ élément de $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, la fonction $F(\lambda, k)$ est k -tempérée si et seulement si λ est élément d'un sous-espace tempéré.*

Il résulte de la proposition 11, des propriétés d'holomorphic de la fonction hypergéométrique, de (5.3), (5.11) et du lemme 17 que l'on a :

PROPOSITION 15. *Si P est une partie parabolique k -cuspidale de R , contenant R^- et $A \in (\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_P})_{\text{disc}}^*(k_{\mathbb{M}_P})$, la fonction $v \mapsto F(A + v, k)$, $v \in (\mathfrak{a}_{\mathbb{M}_P})_{\mathbb{C}}^*$, est une fonction $II_{\text{hol}}(k, A, \varepsilon, \tau)$ pour un $\varepsilon > 0$ et un $\tau > 0$.*

PROPOSITION 16. *On conserve les notations de la proposition précédente. Soit Q une partie parabolique de R , contenant R^- , avec $\mathfrak{a}_{\mathbb{M}_P}$ et $\mathfrak{a}_{\mathbb{M}_Q}$ de mêmes dimensions. Si $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$ est non vide, Q est k -cuspidale.*

Plus précisément si s est un élément de $W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_M)$, on choisit un élément $\tilde{s}$ de W prolongeant s . Si A est un élément de $(\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_P})_{\text{disc}}^(k_{\mathbb{M}_P})$, la fonction $F(A, k_{\mathbb{M}_P}) \circ \tilde{s}|_{\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_Q}}$ est un élément de $\mathcal{A}_2(\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_Q}, k_{\mathbb{M}_Q}, A \circ \tilde{s}|_{\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_Q}})$, égal à $F(A \circ \tilde{s}|_{\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_Q}}, k_{\mathbb{M}_Q})$. On notera cette fonction $F(A^s, k_{\mathbb{M}_Q})$ dans la suite, car elle ne dépend pas du choix de $\tilde{s}$. On notera aussi $A^{s^*} := A \circ \tilde{s}|_{\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_Q}}$, ou A^s lorsque A^{s^*} entre dans la définition d'un objet indépendant du choix de $\tilde{s}$. Enfin, la norme L^2 de $F(A, k_{\mathbb{M}_P})$ par rapport à la mesure $\mu_{k_{\mathbb{M}_P}}$ sur $\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_P}$ est égale à la norme L^2 de $F(A^s, k_{\mathbb{M}_Q})$ par rapport à la mesure $\mu_{k_{\mathbb{M}_Q}}$ sur $\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_Q}$.*

Démonstration. On procède par transport de structure par $\tilde{s}|_{\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_Q}}$. D'abord les mesures sur $\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_P}$ et $\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_Q}$ sont échangées ainsi que $T_p(k_{\mathbb{M}_P}, M_P^+)$ et $T_{s^{-1}(p)}(k_{\mathbb{M}_Q}, s^{-1}(M_P^+))$, $p \in S(\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_P})$. On conclut grâce à (1.8), (5.4) et (5.11). ■

PROPOSITION 17. *On conserve les notations et hypothèses de la proposition précédente.*

(i) *Si A est un élément de $(\mathfrak{a}^{\mathbb{M}_P})_{\text{disc}}^*(k_{\mathbb{M}_P})$, il existe des fonctions méromorphes sur $(\mathfrak{a}_{\mathbb{M}_P})_{\mathbb{C}}^*$ pour un $\varepsilon > 0$, à valeurs complexes $v \mapsto c(k, s, A, v)$, $s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_{\mathbb{M}_P})$ telles que, avec les notations du théorème 4, on ait l'égalité de fonctions méromorphes en $v \in (\mathfrak{a}_{\mathbb{M}_P})_{\mathbb{C}}^*$:*

$$F(A + v, k)_{Q, s} = c(k, s, A, v) F(A^s, k_{\mathbb{M}_Q}) \otimes e^{\otimes s}.$$

(ii) *Notant $c(k, A, v) := c(k, Id_{\mathfrak{a}_{\mathbb{M}_P}}, A, v)$, on a l'identité de fonctions méromorphes en $v \in (\mathfrak{a}_{\mathbb{M}_P})_{\mathbb{C}}^*$:*

$$c(k, s, A, v) \equiv c(k, A^s, v^s), \quad s \in W(\mathfrak{a}_Q, \mathfrak{a}_{\mathbb{M}_P}).$$

(iii) *La fonction méromorphe en $v \in (\mathfrak{a}_{\mathbb{M}_P})_{\mathbb{C}}^*$, $c(k, s, A, v)$, n'est pas identiquement nulle.*

Démonstration. (i) résulte de la proposition 12, du théorème 4 et de (5.4), (5.11). Il résulte de l'identité $F(\lambda \circ \tilde{s}, k) \equiv F(\lambda, k)$ que l'on a:

$$F(A + v, k) = F(A^s + v^s, k), \quad v \in i\mathfrak{a}_{M_P}^*.$$

Joint au théorème 4, cela conduit à deux écritures de $F(A + v, k)_Q$. L'identification de celles-ci conduit à (ii).

Montrons (iii). Raisonnons par l'absurde et supposons $c(k, s, A, v)$ identiquement nulle. D'après les relations de Maass-Selberg et la proposition 12, cela implique que $F(A + v, k)_Q$ est nul pour tout $v \in i\mathfrak{a}_{M_P}^*$. Soit $v \in i\mathfrak{a}_{M_P}^*$. Comme $F(A + v, k)$ est non nul, d'après (5.4), on déduit de la proposition 10(ii) qu'il existe une partie parabolique $Q_\&$, contenant R^- , $A_\& \in (\mathfrak{a}_{Q_\&}^*)_{\text{disc}}^*(k_{M_{Q_\&}})$, $w_\& \in W$ tels que $F(A + v, k)_{Q_\&}$ soit non nul, avec $w_\&(A + v) \in A_\& + i\mathfrak{a}_{Q_\&}^*$. Comme l'ensemble des triplets $(Q_\&, A_\&, w_\&)$ est fini et que l'image réciproque par un élément de W d'un sous-espace affine est fermé, il résulte du théorème de Baire qu'il existe un ouvert O non vide de $i\mathfrak{a}_{M_P}^*$, $v_0 \in i\mathfrak{a}_{M_P}^*$ tels que pour tout $v \in O$, $w_{\&_0}(A + v) \in A_{\&_0} + i\mathfrak{a}_{Q_{\&_0}}^*$. Comme O est ouvert et non vide, cela est vrai pour tout $v \in i\mathfrak{a}_{M_P}^*$. Utilisant (3.39), on conclut à l'égalité:

$$w_{\&_0}(A + i\mathfrak{a}_{M_P}^*) = A_{\&_0} + i\mathfrak{a}_{Q_{\&_0}}^*.$$

En particulier, $\dim \mathfrak{a}_P = \dim \mathfrak{a}_{Q_{\&_0}}$. Alors, les relations de Maass-Selberg jointes à notre hypothèse montrent que $F(A + v, k)_{Q_{\&_0}}$ est nul pour tout $v \in i\mathfrak{a}_{M_P}^*$, ce qui contredit le fait que $F(A + v_0, k)_{Q_{\&_0}}$ est non nul. Cette contradiction achève la preuve de (iii). ■

THÉORÈME 5. Soit $P \in \mathcal{P}$ et $A \in (\mathfrak{a}_{M_P}^*)_{\text{disc}}^*(k_{M_P})$. On a l'égalité de fonctions méromorphes en $v \in (\mathfrak{a}_P)_{\mathbb{C}}^*$:

$$c(k, s, A, v) = \tilde{c}(\rho(k_{M_P}), k_{M_P}) \tilde{c}(\rho(k), k)^{-1} \\ \times \prod_{: \in \mathbb{R}^+, :|_{\mathfrak{a}_P} \neq 0} \Gamma(-(A + v)(\check{\alpha}))/\Gamma(-(A + v)(\check{\alpha}) + k.).$$

Démonstration. Comme la fonction $F(A, k_{M_P})$ est non nulle, il existe $w_0 \in W_{M_P}$ tel que $\mu_0 := w_0 A + \rho(k_{M_P})$ soit un exposant directeur de cette fonction le long de $M_P^- = M_P \cap R^-$ (cf. Proposition 3).

On choisit $\theta \in (\mathfrak{a}_{M_P}^*)^*$ tel que, les nombres (θ, α) , pour α élément de l'ensemble des racines simples de M_P^+ , soient linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. Alors (θ, α) est non nul pour tout $\alpha \in M_P^+ = M_P \cap R^+$. On en déduit que:

$$A + t\theta \text{ est régulier par rapport à } M_P, \text{ pour } t \text{ assez petit et non nul.} \quad (5.13)$$

On a aussi

$$(\theta, m) \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}M_p \setminus \{0\}. \quad (5.14)$$

Grâce à cette non nullité, l'égalité:

$$(A + t\theta, m/2(m, m)) + 1 = 0, \quad m \in \mathbb{Z}M_p \setminus \{0\},$$

équivalent à

$$t = (-(A, m) - 2(m, m))(\theta, m)^{-1}$$

et le deuxième membre ne prend qu'une infinité dénombrables de valeurs lorsque m varie dans $\mathbb{Z}M_p \setminus \{0\}$. Il en résulte l'existence d'une suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels non nuls, assez petits pour vérifier la condition (5.13), tendant vers zéro et telle que

$$(A + t_n \theta, m/2(m, m)) + 1 \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}M_p \setminus \{0\}. \quad (5.15)$$

On fixe maintenant un élément v de $i\mathfrak{a}_p^*$ tels que l'ensemble des nombres complexes (v, α) , lorsque α décrit les racines simples de R^+ qui sont non nulles sur $\mathfrak{a}_p$, soit une partie libre sur $\mathbb{Q}$. En particulier v est régulier par rapport aux éléments de N_p . On note $\tilde{\mu}_0 = w_0(A + v) + \rho(k)$.

On utilise les notations et les résultats de la proposition 3 de l'appendice C appliqué à la fonction hypergéométrique sur $\mathfrak{a}^{M_p}$ (resp. $\mathfrak{a}$), en prenant $\mathcal{V} = (\mathfrak{a}^{M_p})_{\mathbb{C}}^*$ (resp., $\mathcal{V} = \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$) et $T_w(\eta) = w\eta + \rho(k_{M_p})$, $\eta \in (\mathfrak{a}^{M_p})_{\mathbb{C}}^*$, $w \in W_{M_p}$ (resp., $T_w(\eta) = w\eta + \rho(k)$, $\eta \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, $w \in W$). Il en résulte que, pour tout $X \in \mathfrak{a}^{M_p}$, on a:

$$F(A, k_{M_p})_{+0}(X) = \lim_{n \rightarrow} \sum_{+ \in 5_n} F(A + t_n \theta, k_{M_p})_+(X) \quad (5.16)$$

où

Ξ_n est l'ensemble des $\mu \in (\mathfrak{a}^{M_p})^*$ tels qu'il existe $w \in W_{M_p}$, $m \in \mathbb{N}M_p^+$ tels que:

$$\mu = ww_0(A + t_n \theta) + m + \rho(k_{M_p}), \quad \mu_0 = ww_0 A + m + \rho(k_{M_p}) \quad (5.17)$$

On a aussi pour $X \in \mathfrak{a}^{M_p}$ (en fait aussi pour $X \in \mathfrak{a}$):

$$F(A + v, k)_{+0}(X) = \lim_{n \rightarrow} \sum_{+ \in 5_n} F(A + v + t_n \theta, k_{M_p})_{+}(X) \quad (5.18)$$

où

$\tilde{\Xi}_n$ est l'ensemble des $\tilde{\mu} \in \mathfrak{a}^*$ tels qu'il existe $w \in W$, $m \in \mathbb{N}R^+$ tels que:

$$\tilde{\mu} = ww_0(\lambda + t_n\theta + \nu) + m + \rho(k), \quad \tilde{\mu}_0 = ww_0(\lambda + \nu) + m + \rho(k). \quad (5.19)$$

D'après le théorème 2(ii) et la définition des fonctions c (cf. Proposition 17), on voit que le premier membre de (5.18) est égal au produit de $c(k, \lambda, \nu)$ par le premier membre de (5.16).

On va maintenant comparer le second membre de (5.16) avec celui de (5.18).

Nous allons montrer d'abord que l'on a:

$$\tilde{\Xi}_n = \Xi_n + \nu + \rho(k) - \rho(k_{M_p}). \quad (5.20)$$

Il est clair que $\tilde{\Xi}_n$ contient $\Xi_n + \nu + \rho(k) - \rho(k_{M_p})$. Montrons l'inclusion inverse. Soit $\tilde{\mu} \in \tilde{\Xi}_n$. La condition

$$\tilde{\mu}_0 = ww_0(\lambda + \nu) + m + \rho(k) \quad (5.21)$$

se réécrit

$$w_0(\nu) - ww_0(\nu) = -w_0(\lambda) + ww_0(\lambda) + m$$

ce qui implique, en séparant partie réelle et partie imaginaire: $w_0(\nu) = ww_0(\nu)$, i.e., $w_0^{-1}ww_0(\nu) = \nu$. La régularité de ν par rapport aux éléments de N_p montre que $w_0^{-1}ww_0$ est élément de W_{M_p} . Comme w_0 est élément de W_{M_p} , il en va de même de w . Alors, revenant à la condition (5.21), on voit que la restriction de m à $\mathfrak{a}_p$ doit être nulle. En considérant des éléments de $\mathfrak{a}_p$, orthogonaux à toutes les racines simples de R^+ sauf à une (nécessairement dans N_p), on voit que cela implique que m est élément de $\mathbb{N}M_p^+$.

Ceci achève de prouver (5.20).

D'après (5.13) et (5.15) et le lemme 3.2 de [O2], on peut appliquer la formule (5.10) pour la fonction $F(\lambda + t_n\theta, k_{M_p})$ ainsi que (5.6).

Soit μ, w, m satisfaisant (5.17). Supposons que μ s'écrive sous la forme:

$$\mu = w'(\lambda + t_n\theta) + m' + \rho(k_{M_p}), \quad w' \in W_{M_p}, \quad m' \in \mathbb{Z}M_p.$$

On a alors:

$$t_n(ww_0(\theta) - w'(\theta)) = w'(\lambda) - ww_0(\lambda) + m' - m.$$

Le second membre prend ses valeurs dans un ensemble discret, tandis que le premier membre tend vers 0 quand n tend vers l'infini ($t = t_n$). A partir

d'un certain rang les deux membres doivent être nuls. Alors, la régularité de θ par rapport à M_p implique que $w' = ww_0$.

Ce qui précède montre que l'on a, pour n assez grand et $\mu \in \Xi_n$:

$$F(A + t_n \theta, k_{M_p})_+(X) = c(-ww_0(A + t_n \theta), k_{M_p}) \Delta_m(ww_0(A + t_n \theta), k_{M_p}) e^{+(X)}. \quad (5.22)$$

Soit $\tilde{\mu} = \mu + \nu + \rho(k) - \rho(k_{M_p})$. Supposons maintenant que:

$$\tilde{\mu} = w'(A + t\theta + \nu) + m' + \rho(k), \quad w' \in W, \quad m \in \mathbb{Z}R$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire dans cette relation, on voit comme plus haut que w' est élément de W_{M_p} , puis que $m' \in \mathbb{Z}M_p$. Alors, comme ci-dessus, on conclut encore que $w' = ww_0$, au moins si n est assez grand. Etudions la condition:

$$(A + t_n \theta + \nu, m'/2(m', m')) + 1 = 0$$

pour $m' \in \mathbb{Z}R \setminus \{0\}$. En séparant partie réelle et partie imaginaire on voit m' doit être orthogonal à ν . Les propriétés de ν montrent que $m' \in \mathbb{Z}M_p$. On conclut, grâce à (5.15), que la relation ci dessus est impossible. Par ailleurs, la régularité de ν par rapport à N_p et le fait que t_n vérifie (5.13) implique que $A + t_n \theta + \nu$ est régulier par rapport à R . On peut alors utiliser, grâce au lemme 3.2 de [O2], (5.10) et (5.6) et l'on trouve que, pour tout $X \in \mathfrak{a}^{M_p}$, on a:

$$F(A + t_n \theta + \nu, k)_{\sim} = c(-ww_0(A + t_n \theta) + \nu, k) \times \Delta_m(ww_0(A + t_n \theta) + \nu, k) e^{+(X)} \quad (5.23)$$

Si $m' \in \mathbb{N}M_p^+$, $j \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in R^+$, avec $m' - j\alpha \in \mathbb{N}R^+$, on doit avoir $\alpha \in M_p^+$. Ceci, joint à l'orthogonalité de $\mathfrak{a}_p^*$ et $(\mathfrak{a}^{M_p})^*$, montre que l'on a:

$$\Delta_m(ww_0(A + t_n \theta), k_{M_p}) = \Delta_m(ww_0(A + t_n \theta) + \nu, k) \quad (5.24)$$

car les relations de récurrence gouvernant chacun des deux membres sont les mêmes (cf. (5.7)).

Comme N_p est invariant par W_{M_p} , on a $R^+ = M_p^+ \coprod (ww_0)^{-1}(-N_p)$. Joint à l'invariance de k sous W , cela implique:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(-ww_0(A + t\theta) + \nu, k) &= \tilde{c}(-ww_0(A + t\theta), k_{M_p}) \\ &\times \prod_{: \in -N_p} \Gamma(-(A + \nu)(\check{\alpha}))/\Gamma(-(A + \nu)(\check{\alpha}) + k_{:}) \end{aligned}$$

Joint à (5.9), (5.16), (5.18), (5.20) et (5.22) à (5.24), cela implique le résultat voulu. ■

PROPOSITION 18. *On conserve les notations précédentes. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(c(k, A, v))^{-1}$ soit holomorphe en $v \in (\mathfrak{a}_p)_\pm^*$ et borné sur ce domaine.*

Démonstration. Comme $-A \in W_{M_p} A$ d'après [HO2, théorème 3.10], et que l'ensemble des $\alpha \in R^+$ tels que $\alpha|_{\mathfrak{a}_p} \neq 0$ est invariant par W_{M_p} , on voit, grâce au théorème précédent, que:

$$c(k, -A, v) \equiv c(k, A, v), \quad v \in i\mathfrak{a}_p^*.$$

De même on voit que:

$$c(k, -A, \bar{v}) \equiv \overline{c(k, -A, v)}, \quad v \in (\mathfrak{a}_p)_\mathbb{C}^*.$$

D'où l'on déduit:

$$|c(k, -A, -v) c(k, A, v)|^{-1} = |c(k, A, v)|^{-2}, \quad v \in i\mathfrak{a}_p^*.$$

Or, tenant compte du théorème précédent et de l'égalité $R = R^+ \cup R^-$, le premier membre de cette égalité est égal, à une constante multiplicative près, à $f_L(A + v, k)$, où l'on a posé $L = A + \mathfrak{a}_p$ et utilisé les notations de [O2, eq. (3.7)]. Il existe donc $C \in \mathbb{R}^+$ tel que:

$$C |c(k, A, v)|^{-2} = f_L(A + v, k), \quad v \in i\mathfrak{a}_p^*. \quad (5.25)$$

On remarque que, d'après les lemmes 3.2 et 3.3 de l.c., on a:

$$A(\check{\alpha}) > -1, \quad A(\check{\alpha}) + k_{\check{\cdot}} > -1, \quad \alpha \in R. \quad (5.26)$$

Donc si ces quantités sont dans $\mathbb{Z}$ et non nulles, elles sont supérieures ou égales à 1. Ceci assure d'une part que les facteurs constants dans l.c., eq. (3.7), correspondants aux $\alpha \in M_p$, ne correspondent pas à des poles de Γ , donc C est non nul. En effet la fonction Γ ne s'annule jamais, comme on le voit sur sa définition comme produit infini (cf. [WhiWat, chap. 12.1]). Il résulte des propriétés de f_L (cf. [O2, théorème 3.4]), que la fonction méromorphe de $v \in (\mathfrak{a}_p)_\mathbb{C}^*$,

$$c(k, A, v)^{-1} \text{ est bornée sur } i\mathfrak{a}_p^*. \quad (5.27)$$

Ecrivons

$$\underline{c}(k, A, v) = \prod_{\check{\cdot} \in N_p} \Gamma((A + v)(\check{\alpha}) + 1) / \Gamma((A + v)(\check{\alpha}) + k_{\check{\cdot}} + 1)$$

et

$$\varpi_k(A, v) := \prod_{\check{\cdot} \in N_p} ((A + v)(\check{\alpha}) + k_{\check{\cdot}}) / ((A + v)(\check{\alpha})).$$

Comme $k_+ = k_-$ et que N_p est contenu dans $-R^+$, on a :

$$c(k, A, v) = \varpi_k(A, v) \underline{c}(k, A, v) \quad (5.28)$$

Notons que c'est le fait que la fonction F ne s'annule pas, qui justifie le passage de (4.7.31) à (4.7.32) dans [GV]. Grâce à (5.26) et ces propriétés de la fonction F , on voit que :

$$\underline{c}(k, A, v) \text{ et } \underline{c}(A, v)^{-1} \text{ sont holomorphes en } v \in (\alpha_p^*)_- \text{ pour un } \varepsilon > 0, \quad (5.29)$$

la deuxième fonction y étant de plus bornée,

puisque $k_+ < 0$ pour tout $\alpha \in R$. Il en résulte que la fraction rationnelle en $v \in (\alpha_p)_{\mathbb{C}}^*$, $\varpi(\lambda, v)^{-1} = \underline{c}(A, v) c(A, v)^{-1}$ reste localement bornée sur $i\alpha_p^*$. Cela implique que si certains facteurs du numérateur de $\varpi_k(A, \cdot)$ s'annulent en un point de $i\alpha_p^*$, ils se simplifient avec des termes du dénominateur. Il en résulte aisément que $\varpi(A, v)^{-1}$ est holomorphe et bornée sur $(\alpha_p^*)_-$ pour un $\varepsilon' > 0$. D'où (i), grâce à (5.28) et (5.29). ■

PROPOSITION 19. *Soit A un élément de $(\alpha^{M_p})_{\text{disc}}^*(k_{M_p})$. On pose, pour $v \in (\alpha_{M_p})_{\mathbb{C}}^*$ tel que le deuxième membre de l'égalité soit défini*

$$F^0(A, v, k) := c(k, A, v)^{-1} c_{4,k}^{-1} F(A, v, k)$$

où $c_{4,k}$ est la norme de $F(A, k_{M_p})$ dans $L^2(\alpha_{M_p}, \mu_{k_{M_p}})$ et où on a posé $F(A, v, k) := F(A + v, k)$.

Cette application méromorphe en $v \in (\alpha_{M_p})_{\mathbb{C}}^*$ se prolonge en une fonction $II'_{\text{hol}}(A, \varepsilon, \tau)$ pour un $\varepsilon > 0$ et un $\tau > 0$.

Démonstration. D'abord, on a l'analogue du lemme 4(ii) de [CD], grâce aux propositions 12 et 15. Puis, la démonstration est identique à celle de l.c., théorème 3. Elle repose d'une part sur le critère évoqué à la fin de 4.2 (cf. [BCD], théorème 2) et d'autre part sur les relations de Maass-Selberg. ■

On dit que deux parties paraboliques P, P' de R sont associées si M_P et $M_{P'}$ sont conjugués par un élément de W . On note $\mathcal{P}$ un ensemble de représentants des classes d'équivalence modulo association des parties paraboliques de R contenant R^- . On note F^* pour F (resp., F^0), $\mathcal{F}^*$ pour $\mathcal{F}$ (resp., $\mathcal{F}^0$) et $\mathcal{J}^*$ pour $\mathcal{J}$ (resp., $\mathcal{J}^0$). On définit la transformée de Fourier hypergéométrique, $\mathcal{F}_k f$ (resp. transformée de Fourier hypergéométrique normalisée, $\mathcal{F}_k^0 f$), d'un élément f de $\mathcal{C}(\alpha, k)$ comme suit :

$\mathcal{F}_k^* f$ est une fonction sur $\coprod_{P \in \mathcal{P}} (\mathfrak{a}_{M_P})_{\text{disc}}^* (k_{M_P}) \times i\mathfrak{a}_P^*$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie par

$$\mathcal{F}_k^* f(A, v) = (\text{Card } W(\mathfrak{a}_P))^{-1} \int_{\mathfrak{a}} f(X) \overline{F^*(A, v, k)(X)} \delta_k(X) dX,$$

pour $(A, v) \in (\mathfrak{a}_{M_P})_{\text{disc}}^* (k_{M_P}) \times i\mathfrak{a}_P^*$. Ceci est bien défini d'après les propositions 14 et 19 et la proposition A.2. On note que l'égalité $F(\lambda, k) = F(w\lambda, k)$, $w \in W$ implique que, si $\Psi = \mathcal{F}_k f$ pour un $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)$, on a

$$\Psi(wA, wv) \equiv \Psi(A, v), \quad w \in N_W(\mathfrak{a}_P), \quad (5.30)$$

où $N_W(\mathfrak{a}_P)$ est le normalisateur dans W de $\mathfrak{a}_P$, qui agit sur $(\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^* (k_{M_P})$, d'après la proposition 15. On notera, pour $w \in N_W(\mathfrak{a}_P)$, $c^0(k, w, A, v) = c(k, A, v)^{-1} c(k, wA, wv)$. L'analogue de (5.30) pour la transformation de Fourier normalisée s'énonce comme suit. Si $\Psi = \mathcal{F}_k^0 f$ pour un $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)^W$, on a:

$$\Psi(wA, wv) \equiv (c^0(k, w, A, v))^{-1} \Psi(A, v), \quad w \in N_W(\mathfrak{a}_P). \quad (5.31)$$

Si E est un espace vectoriel réel, on note $\mathcal{S}(E)$, l'espace de Schwartz habituel.

On dispose également de l'application paquets d'ondes, $\mathcal{J}_k$, (resp. paquets d'ondes normalisée $\mathcal{J}_k^0$) définie sur $\mathcal{S}_k := \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} \mathbb{C}^{(\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^* (k_{M_P})} \otimes \mathcal{S}(i\mathfrak{a}_P^*)$ à valeurs dans l'espace des fonctions sur $\mathfrak{a}$, définie par

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_k^* \Psi)(X) = & \sum_{P \in \mathcal{P}, 4 \in (\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^* (k_{M_P})} \int_{i\mathfrak{a}_P^*} \Psi(A, v) F^*(A, v, k)(X) \\ & \times |c_{4, k}^* c_*(k, A, v)|^{-2} dv \end{aligned}$$

pour $X \in \mathfrak{a}$, où l'on a posé $c_{4, k}^0 = 1$ et $c_0(k, A, v) \equiv 1$ et où dv est la mesure duale de la mesure de Lebesgue sur $i\mathfrak{a}_P$ déterminée par sa structure euclidienne (cf. e.g. [D3, paragraphe 1]).

THÉOREME 6. (i) *L'image de $\mathcal{J}_k^0$ est contenue dans $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)^W$.*

(ii) *La transformée de Fourier hypergéométrique normalisée réalise un isomorphisme entre $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)^W$ et*

$$\mathcal{S}_k^0 := \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} (\mathbb{C}^{(\mathfrak{a}^{M_P})_{\text{disc}}^* (k_{M_P})} \otimes \mathcal{S}(i\mathfrak{a}_P^*))^{\bullet N_W(\mathfrak{a}_P)}$$

où l'indice supérieur $\bullet N_W(\mathfrak{a}_P)$ indique que l'on prend le sous-espace formé des éléments Ψ vérifiant les conditions (5.31).

Son inverse est donné par la restriction de $\mathcal{J}_k^0$ à $\mathcal{S}_k^0$.

(iii) *La transformée de Fourier hypergéométrique normalisée s'étend en une isométrie bijective entre $L^2(\alpha, \mu_k)^W$ et la somme hilbertienne $\bigoplus_{P \in \mathcal{P}} (L^2((\alpha^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P})) \otimes L^2(i\alpha_P^*, dv))^{\bullet N_W(\alpha_P)}$, où dv est la mesure duale de la mesure de Lebesgue sur $i\alpha_P$ déterminée par sa structure euclidienne.*

Démonstration. (i) se démontre comme le théorème 1 de [BCD].

La surjectivité dans (ii) se prouve comme dans [CD], théorème 5(i). Pour l'injectivité, il est nécessaire de faire appel à la formule de Plancherel d'Opdam ([O] théorème 5.5). D'après la définition des sous-espaces tempérés, les propriétés de symétrie des fonctions hypergéométriques et le fait que toute partie parabolique est associée à un élément de $\mathcal{P}$, la transformation de Fourier définie par Opdam pour les fonctions L^2 est entièrement déterminée par la nôtre, lorsqu'il s'agit d'éléments de $\mathcal{C}(\alpha, k)^W$. A noter que c'est la tempérance des fonctions qui interviennent dans le spectre (cf. [O2], corollaire 3.7), le fait que la densité de la mesure de Plancherel sur chaque sous-espace tempéré soit bornée (l.c. théorème 3.4) et la proposition 14 qui permettent de préciser la transformation de Fourier d'Opdam d'éléments de $\mathcal{C}(\alpha, k)^W$. L'injectivité de notre transformation de Fourier sur $\mathcal{C}(\alpha, k)^W$ résulte de celle de la transformation de Fourier d'Opdam. ■

THÉORÈME 7. (i) *La transformée de Fourier hypergéométrique, $\mathcal{F}_k$, réalise un isomorphisme entre $\mathcal{C}(\alpha, k)^W$ et*

$$\mathcal{S}_k^W := \bigoplus_{P \in \mathcal{P}} (\mathbb{C}^{(\alpha^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P})} \otimes \mathcal{S}(i\alpha_P^*))^{N_W(\alpha_P)}$$

où l'indice supérieur $N_W(\alpha_P)$ indique que l'on prend le sous-espace formé des éléments Ψ vérifiant les conditions (5.30).

(ii) *Son inverse est donné par la restriction à $\mathcal{S}_k^W$ de l'application paquets d'ondes, $\mathcal{J}_k$.*

(iii) *La transformée de Fourier hypergéométrique normalisée s'étend en une isométrie bijective entre $L^2(\alpha, \mu_k)^W$ et la somme hilbertienne:*

$$\bigoplus_{P \in \mathcal{P}} (L^2((\alpha^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P})) \otimes L^2(i\alpha_P^*, c_{4,k}^{-2} |c(k, A, v)^{-2}| dv))^{N_W(\alpha_P)}.$$

Démonstration. (i) On a l'analogue du théorème 4 de [CD], qui se généralise immédiatement aux fonctions Π_{hol} . On en déduit que l'image de $\mathcal{F}_k$ est contenu dans $\mathcal{S}_k^W$ grâce à (5.30) et à la proposition 15.

Si Ψ est un élément de $\mathcal{S}_k$, on définit une fonction, Ψ^0 , sur $\coprod_{P \in \mathcal{P}} (\alpha^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P}) \times i\alpha_P^*$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie par:

$$\Psi^0(A, v) = c_{4,k}^{-1} c(k, A, v)^{-1} \Psi(A, v), \quad (A, v) \in (\alpha^{M_P})_{\text{disc}}^*(k_{M_P}) \times i\alpha_P^*.$$

Il résulte de la proposition 18 et de la formule intégrale de Cauchy, que les dérivées de $c(k, A, \nu)^{-1}$ par des éléments de $S(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*)$ sont bornées sur $i\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^*$. Joint à (5.30), cela implique que Ψ^0 est un élément de $\mathcal{S}_{\mathfrak{k}}^0$. Donc c'est un élément de l'image de $\mathcal{F}_{\mathfrak{k}}^0$, d'après le théorème précédent. La définition de $\mathcal{F}_{\mathfrak{k}}$, $\mathcal{F}_{\mathfrak{k}}^0$ et celle Ψ^0 montre que si $f \in \mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)^{\mathrm{w}}$ vérifie $\mathcal{F}_{\mathfrak{k}}^0 f = \Psi^0$, on a

et

$$|\partial_p(\alpha(X)(1 - e^{-\cdot(X)})^{-1})| \leq C(1 + |\alpha(X)|).$$

(ii) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $X \in \mathfrak{a}$ vérifiant $|\alpha(X)| \geq 1$, et pour tout $\varphi \in C(\mathfrak{a})$ on ait:

$$|\partial_p(\Delta; \varphi)(X)| \leq C \sup_{1 \leq i \leq n} (|(\partial_{p_i} \varphi)(X)| + |(\partial_{p_i} \varphi)(s; X)|).$$

(iii) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $X \in \mathfrak{a}$ vérifiant $\alpha(X) \leq -1$ et pour tout $\varphi \in C(\mathfrak{a})$ on ait:

$$|\partial_p(\Delta; \varphi)(X)| \leq C e^{\cdot(X)} \sup_{1 \leq i \leq n} (|(\partial_{p_i} \varphi)(X)| + |(\partial_{p_i} \varphi)(s; X)|), \quad \varphi \in C(\mathfrak{a}).$$

(iv) Il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $X \in \mathfrak{a}$ vérifiant $|\alpha(X)| \leq 1$ et pour tout $\varphi \in C(\mathfrak{a})$, on ait:

$$|\partial_p(\Delta; \varphi)(X)| \leq C \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{t \in [0, 1]} |(\partial_{p_i} \varphi)(X - t\check{\alpha})|$$

Démonstration. Pour tout $Y \in \mathfrak{a}$, on a:

$$\partial_Y(1 - e^{-\cdot})^{-1} = -\alpha(Y)(-(1 - e^{-\cdot})^{-1} + (1 - e^{-\cdot})^{-2}).$$

On en déduit aisément que $\partial_p(1 - e^{-\cdot})^{-1}$ est une combinaison linéaire de fonctions du type $(1 - e^{-\cdot})^{-k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, donc bornée si $|\alpha(X)| \geq 1$. D'où l'on déduit la première inégalité de (i). Comme $(1 - e^{-\cdot})^{-1} = -e^{\cdot}(1 - e^{\cdot})^{-1}$, la deuxième inégalité en résulte également. Par ailleurs, $\partial_Y \alpha$ étant égal à $\alpha(Y)$, la troisième inégalité de (i) résulte de la première si $|\alpha(X)| \geq 1$, grâce aux règles de différentiation des produits. Enfin la fonction $u \mapsto u(1 - e^u)^{-1}$ est C^∞ sur $[-1, 1]$, donc bornée ainsi que ses dérivées. On en déduit la troisième inégalité de (i) si $|\alpha(X)| \leq 1$. Ceci achève de prouver (i).

En utilisant les règles de différentiation des produits, on déduit (ii) (resp. (iii)) de la première (resp. deuxième) inégalité de (i). A noter que l'on pourrait ici utiliser seulement une base de l'espace des éléments de $S(\mathfrak{a})$ de degré inférieur ou égal au degré de p .

Passons à la démonstration de (iv). Posons $\psi(X) = \int_0^1 \partial_{\check{\alpha}} \varphi(X - t\check{\alpha}(X)) dt$. Par dérivation sous le signe somme, on voit que ψ est un élément de $C(\mathfrak{a})$ et que pour tout $p' \in S(\mathfrak{a})$, $\partial_{p'} \psi$ est une combinaison linéaire de fonctions de la forme $\int_0^1 t^k (\partial_{p''} \varphi)(X - t\check{\alpha}) dt$, où k est inférieur ou égal au degré de p' et le degré de p'' est inférieur ou égal au degré de p' augmenté de 1. Comme $\Delta; \varphi = \alpha(1 - e^{-\cdot})^{-1} \psi$, les règles de différentiation des produits, jointes à la troisième inégalité de (i), impliquent (iv). ■

Si X est un élément de $\mathfrak{a}$, on note X_+ l'unique élément de l'adhérence de la chambre de Weyl positive, C^+ , conjugué sous W à X . L'application $X \mapsto X_+$ est continue. En effet si (X_n) converge vers X , la suite $(X_n)_+$ est bornée et admet donc une valeur d'adhérence Y . Montrons que $Y = X_+$. Pour cela, quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que $(X_n)_+$ converge vers Y et que pour tout n , on a $X_n \in wC^+$. Alors $(X_n)_+ = w^{-1}X_n$ et, par passage à la limite on $Y = w^{-1}X \in C^+$. D'où l'on déduit que $X_+ = w^{-1}X$ puis l'égalité voulue. Donc X_+ est la seule valeur d'adhérence de la suite $(X_n)_+$. C'est sa limite, comme désiré.

LEMME A.2. *Soit B une partie compacte de $\mathfrak{a}$.*

(i) *Soit $\eta \in \mathfrak{a}^*$. Alors il existe une constante $C \geq 0$ telle que:*

$$\eta(X_+) - C \leq \eta((X + Y)_+) \leq \eta(X_+) + C, \quad X \in \mathfrak{a}, \quad Y \in B.$$

(ii) *Pour $k \in \mathcal{K}$ à valeurs réelles, on définit une fonction Θ_k par:*

$$\Theta_k(X) = e^{-\langle k, X_+ \rangle}, \quad X \in \mathfrak{a}.$$

Alors il existe des constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que:

$$C_1 \Theta_k(X) \leq \Theta_k(X + Y) \leq C_2 \Theta_k(X), \quad X \in \mathfrak{a}, \quad Y \in B.$$

Démonstration. Montrons (i). Pour $X \in \mathfrak{a}$, $Y \in B$, la fonction $t \mapsto \eta((X + tY)_+)$ est continue et affine par morceaux sur $\mathbb{R}$. De plus sa dérivée est bornée en module par $\sup_{w \in W} |\eta(wY)|$, donc bornée si Y reste dans B . D'où (i) grâce au théorème des accroissements finis appliqué à cette fonction sur $[0, 1]$. Alors (ii) est une conséquence immédiate de (i) appliqué $\eta = -\rho(k)$. ■

On définit l'espace de Schwartz $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)$ comme l'espace des fonctions φ , C^∞ sur $\mathfrak{a}$, telles que:

$$s_{p, -n}^k(\varphi) := \sup_{X \in \mathfrak{a}} |\Theta_k^{-1}(X) N_n(X) \partial_p \varphi(X)| < +\infty, \quad p \in S(\mathfrak{a}), \quad n \in \mathbb{N},$$

où l'on a noté:

$$N_n(X) = (1 + \|X\|)^n.$$

On munit $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)$ des seminormes $s_{p, -n}^k$, ce qui en fait un espace de Fréchet.

PROPOSITION A.1. (i) *L'espace $C_c(\mathfrak{a})$ est dense dans $\mathcal{C}(\mathfrak{a}, k)$ et l'injection naturelle est continue.*

(ii) Les opérateurs Δ : pour $\alpha \in R^+$ et ∂_p , $T_p(k, R^+)$, pour $p \in S(\alpha)$, opèrent continuellement sur $\mathcal{C}(\alpha, k)$.

Démonstration. La démonstration de (i) est calquée sur celle de [GV, lemme 6.1.7 et corollaire 6.1.8]. On fixe $s > 0$. Pour $t > 0$, on note ε_t l'indicatrice de la boule fermée de rayon $t + (1/2)s$. On fixe $g \in C_c(\alpha)$, positive ou nulle, telle que $g(X) = g(-X)$, $X \in \alpha$, à support contenu dans la boule fermée de rayon $s/4$, et vérifiant $\int_{\alpha} g(X) dX = 1$. On pose $g_t = g * \varepsilon_t * g$. Alors $0 \leq g_t \leq 1$, $g_t = 1$ sur la boule fermée de rayon t , B_t , et est nulle sur le complémentaire de B_{t+s} . De plus, pour tout $p \in S(\alpha)$, il existe $C_p \geq 0$ telle que:

$$|\partial_p g_t(X)| \leq C_p, \quad t > 0, \quad X \in \alpha.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{C}(\alpha, k)$. On pose $\varphi_t = g_t \varphi$. Comme $g_t = g$ sur B_t , on a:

$$s_{p, -n}^k(\varphi_t - \varphi) \leq \sup_{X \notin B_t} \Theta_k(X) N_n(X) |\partial_p(\varphi_t - \varphi)(X)|.$$

Ecrivant $N_n(X) = N_1(X)^{-1} N_{n+1}(X)$, on voit que:

$$s_{p, -n}^k(\varphi_t - \varphi) \leq (1+t)^{-1} (s_{p, -n-1}^k(\varphi_t) + s_{p, -n-1}^k(\varphi)).$$

Chaque dérivée partielle de g_t étant bornée par une constante indépendante de t , on montre (i) en passant à la limite quand t tend vers $+\infty$ dans cette inégalité, la continuité de l'application étant triviale.

L'assertion (ii) résulte du lemme A.1(ii), (iv), joint au lemme A.2(ii).

PROPOSITION A.2. On suppose k réelle. Si δ_k est localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur α , on a:

(i) Il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $N_m^{-1} \Theta_k^2 \in L^1(\alpha, d\mu_k)$.

(ii) L'espace $\mathcal{C}(\alpha, k)$ est un sous-espace de $L^2(\alpha, d\mu_k)$ et l'injection naturelle est continue.

Démonstration. Tenant compte de l'expression de Θ_k et δ_k et de leur invariance sous W , il faut montrer que, pour m assez grand, l'intégrale par rapport à dX sur C^+ de

$$(N_m(X))^{-1} \prod_{\alpha \in R^+} |1 - e^{-\alpha(X)}|^{2k}, \quad (\text{A.1})$$

converge. On note Σ l'ensemble des racines simples de R^+ . Soit $\varepsilon > 0$. On définit pour $\Theta \subset \Sigma$:

$$\alpha(\Theta, \varepsilon) = \{X \in C^+ \mid 0 < \alpha(x) \leq \varepsilon \text{ pour } \alpha \in \Theta \text{ et } \alpha(X) > \varepsilon \text{ pour } \alpha \in \Sigma \setminus \Theta\}$$

Lorsque Θ décrit les parties de Σ , cela définit une partition de C^+ . On est réduit à étudier l'intégrale de (6.1) sur $\alpha(\Theta, \varepsilon)$, intégrale que l'on note I dans la suite. Soit M le sous-système de racines de R engendré par Θ et soit $M^+ = R^+ \cap M$. On note $\alpha_3^R = (\bigcap_{\alpha \in \Sigma} \text{Ker } \alpha) \cap \alpha^R$. Alors on a: $\alpha = \alpha_{7 \setminus 3}^R \oplus \alpha_3^R \oplus \alpha_R$. Si $X \in \alpha$, on note $X = Y + Z + T$ la décomposition correspondante. Ici Y est l'élément de α^R tel que $\alpha(Y) = 0$ pour $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$ et $\alpha(Y) = \alpha(X)$ pour $\alpha \in \Theta$, Z est l'élément de α^R tel que $\alpha(Z) = 0$ pour $\alpha \in \Theta$ et $\alpha(Z) = \alpha(X)$ pour $\alpha \in \Sigma \setminus \Theta$. Dans cette décomposition, $\alpha(\Theta, \varepsilon)$ est égal à $C(\Theta, \varepsilon) \times D(\Theta, \varepsilon)$ où $C(\Theta, \varepsilon) = \{Y \in \alpha_{7 \setminus 3}^R \mid 0 < \alpha(Y) \leq \varepsilon, \alpha \in \Theta\}$ et $D(\Theta, \varepsilon) = \{Z \in \alpha_3^R \mid \alpha(Z) > \varepsilon, \alpha \in \Sigma \setminus \Theta\}$. On remarque que $C(\Theta, \varepsilon)$ est relativement compact. Ceci, joint à la continuité des applications linéaires en dimension finie, implique facilement l'existence d'une constante $C > 0$ telle que:

$$N_m(X)^{-1} \leq C N_m(Z)^{-1} N_m(T)^{-1}, \quad X \in \alpha(\Theta, \varepsilon).$$

Par ailleurs si $\alpha \in R^+ \setminus M$, on a: $1 - e^{-\alpha(X)} \leq 1 - e^{-\alpha(Y)} \leq 1$, $X \in \alpha(\Theta, \varepsilon)$. Alors l'intégrale I est majorée, à une constante multiplicative près, par le produit de

$$J := \int_{C(3, \varepsilon)} \prod_{\alpha \in M^+} |1 - e^{-\alpha(Y)}|^{2k} dY$$

par

$$\int_{D(3, \varepsilon)} (N_m(Z))^{-1} dZ \int_{\alpha_R} (N_m(T))^{-1} dT.$$

Notons $\alpha(\Theta, \varepsilon, \varepsilon')$ l'ensemble $\{X \in \alpha \mid \|T\| \leq 1, 0 \leq \alpha(X) \leq 1 \text{ pour } \alpha \in \Theta \text{ et } \varepsilon \leq \alpha(X) \leq \varepsilon' \text{ pour } \alpha \in \Sigma \setminus \Theta\}$, qui est une partie compacte de α . Comme $|\theta_k|$ est continue et ne s'annule pas, son inverse admet une borne supérieure strictement positive sur ce compact. En considérant l'intégrale de $|\theta_k^{-1} \delta_k|$ sur $\alpha(\Theta, \varepsilon, \varepsilon')$, on en déduit facilement que J est majorée par un multiple de l'intégrale de $|\delta_k|$ sur le compact $\alpha(\Theta, \varepsilon, \varepsilon')$. D'où (i). Alors (ii) en est une conséquence immédiate. ■

APPENDICE B

Quelques faits sur les familles de matrices commutant entre elles

Soit $E, \mathcal{V}$ des espaces vectoriels de dimension finie le premier sur $\mathbb{C}$, l'autre sur $\mathbb{R}$ et $\mathfrak{b}$ une algèbre de Lie complexe, commutative et de dimension finie. Soit Ω un ouvert de $\mathcal{V}$. On dit qu'une famille $\Gamma_\nu, \nu \in \Omega$, de

représentations de $\mathfrak{b}$ dans $\mathcal{V}$ est continue (resp. holomorphe, si $\mathcal{V}$ est en outre un espace vectoriel complexe), si elle vérifie:

$$v \mapsto \Gamma_{\mathfrak{g}}(X) \text{ est continue (resp. holomorphe) sur } \Omega, \text{ pour tout } X \in \mathfrak{b}. \quad (\text{B.1})$$

On dit que $\lambda \in \mathfrak{b}^*$ est un élément du spectre, $Sp(\Gamma_{\mathfrak{g}})$, de $\Gamma_{\mathfrak{g}}$, si et seulement si il existe $v \in E$, non nul, tel que: $\Gamma_{\mathfrak{g}}(X) v = \lambda(X) v$, $X \in \mathfrak{b}$. On note $E_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ le sous-espace de E formé des $v \in E$, pour lesquels il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que: $(\Gamma_{\mathfrak{g}}(X) - \lambda(X))^k v = 0$. Cet espace est appelé sous-espace vectoriel caractéristique relativement à la valeur propre λ . Pour $\lambda \in Sp(\Gamma_{\mathfrak{g}})$, on note $P_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ le projecteur sur $E_{\mathfrak{g}}(\lambda)$ parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques.

LEMME 1. (i) Si $v \mapsto A_{\mathfrak{g}}$ est une famille continue sur Ω d'endomorphismes de E et si U_1 est un ouvert de $\mathbb{C}$, l'ensemble V_1 , des éléments v de Ω tels que le spectre de $A_{\mathfrak{g}}$ soit contenu dans U_1 , est un ouvert de $\mathbb{C}$.

(ii) On suppose que $\Gamma_{\mathfrak{g}}$, $v \in \Omega$ est une famille continue de représentations de $\mathfrak{b}$ dans E . Soit $v_0 \in \Omega$ et U un voisinage de $Sp(\Gamma_{\mathfrak{g}_0})$. Il existe un voisinage ouvert V , de v_0 , telle que, pour tout $v \in V$, $Sp(\Gamma_{\mathfrak{g}})$ est contenu dans U .

Démonstration. Prouvons (i). Soit $v \in V_1$ et montrons que V_1 contient un voisinage ouvert de v . Si c'était faux, il existerait une suite (v_n) d'éléments de Ω , convergeant vers v et telle que $Sp(A_{\mathfrak{g}_n})$ ne soit pas contenu dans U_1 . Il existerait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus U_1$ tel que $A_{\mathfrak{g}_n} - \lambda_n \text{Id}$ soit non inversible. Alors $|\lambda_n| \leq \|A_{\mathfrak{g}_n}\|$. Mais $(A_{\mathfrak{g}_n})$ est une suite bornée d'après la continuité de A et la convergence de v_n . Donc il en va de même pour la suite λ_n . Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que (λ_n) converge vers $\lambda \in \mathbb{C}$. Par continuité du déterminant, on voit que λ est élément du spectre de $A_{\mathfrak{g}}$, qui est contenu dans U_1 . Par ailleurs, comme $\lambda_n \in \mathbb{C} \setminus U_1$ et que U_1 est ouvert, on a aussi $\lambda \notin U_1$. une contradiction qui prouve (i).

Pour (ii), on applique (i) aux familles $\Gamma_{\mathfrak{g}}(X_i)$, où X_i décrit une base de $\mathfrak{b}$. ■

PROPOSITION B.1. On suppose que $\Gamma_{\mathfrak{g}}$, $v \in \Omega$, est une famille holomorphe de représentations de $\mathfrak{b}$ dans E . Soit $v_0 \in \Omega$, $\lambda_0 \in Sp(\Gamma_{\mathfrak{g}_0})$ et U un voisinage ouvert de λ_0 dans $\mathfrak{b}^*$, assez petit pour que:

$$\lambda \in Sp(\Gamma_{\mathfrak{g}_0}) \quad \text{et} \quad \lambda \in U \quad \text{implique} \quad \lambda = \lambda_0.$$

On définit:

$$Q_{\mathfrak{g}}^U = \sum_{* \in Sp(1_{\mathfrak{g}}) \cap U} P_{\mathfrak{g}}(\lambda).$$

L'application $v \mapsto Q_{\mathfrak{g}}^U$ est holomorphe au voisinage de v_0 .

Démonstration. Soit $X_1, \dots, X_p$ une base de $\mathfrak{b}$, ce qui permet d'identifier $\mathfrak{b}^*$ à $\mathbb{C}^p$, en associant à $\lambda \in \mathfrak{b}^*$, $(z_1(\lambda), \dots, z_p(\lambda))$, où $z_i(\lambda) = \lambda(X_i)$. On choisit des disques ouverts de $\mathbb{C}$, D_i , non vides, de centres $z_i(\lambda_0)$, assez petits pour que le produit des D_i soit contenu dans U . En appliquant le lemme précédent à l'ouvert U_1 , réunion du produit des D_i et du complémentaire de l'adhérence, $\bar{U}$, de U , on trouve un voisinage ouvert, V , de v_0 tel que pour tout $v \in V$ et tout $\lambda \in \text{Sp}(\Gamma_{\mathfrak{g}}) \cap \bar{U}$, on a λ élément du produit des D_i . On va montrer l'holomorphie de $Q_{\mathfrak{g}}^U$ sur V .

Si z_0 est un élément de $\mathbb{C}$, on note ${}^iP_{\mathfrak{g}}(z_0)$ le projecteur sur le sous-espace caractéristique de $\Gamma_{\mathfrak{g}}(X_i)$ relativement à la valeur propre z_0 parallèlement à la somme des autres sous-espaces caractéristiques (on convient que ce projecteur est nul si z_0 n'est pas valeur propre). On a :

$${}^iP_{\mathfrak{g}}(z_0) = (2i\pi)^{-1} \int_{\partial D} (zI - \Gamma_{\mathfrak{g}}(X_i))^{-1} dz$$

où ∂D est le bord d'un disque ouvert de centre z_0 assez petit pour que z_0 soit la seule valeur propre de $\Gamma_{\mathfrak{g}}(X_i)$ contenue dans l'adhérence de D . Donc, lorsque v est fixé et que i et z_0 varient, ces projecteurs commutent entre eux puisqu'il en va de même des $\Gamma_{\mathfrak{g}}(X_i)$. On en déduit que :

$$P_{\mathfrak{g}}(\lambda) = {}^1P_{\mathfrak{g}}(z_1(\lambda)) \cdots {}^pP_{\mathfrak{g}}(z_p(\lambda))$$

On note ${}^iQ_{\mathfrak{g}}$ la somme des projecteurs spectraux de $\Gamma_{\mathfrak{g}}(X_i)$ relatifs aux valeurs propres contenues dans D_i . Alors, pour v fixé dans V , les ${}^iQ_{\mathfrak{g}}$ commutent deux à deux et $Q_{\mathfrak{g}}^U$ est égal au produit des ${}^iQ_{\mathfrak{g}}$, d'après notre choix de V . Comme :

$${}^iQ_{\mathfrak{g}} = (2i\pi)^{-1} \int_{\partial D_i} (zI - \Gamma_{\mathfrak{g}}(X_i))^{-1} dz$$

on en déduit l'holomorphie cherchée. ■

PROPOSITION B.2. *On suppose que $\Gamma_{\mathfrak{g}}$, $v \in \Omega$ est une famille continue (resp. holomorphe) de représentations de $\mathfrak{b}$ dans E , et que, pour une base $X_1, \dots, X_p$ de $\mathfrak{b}$, $\Gamma_{\mathfrak{g}}(X_i)$ est inversible pour tout i et tout $v \in \Omega$. Soit $v_0 \in \Omega$.*

Il existe un voisinage ouvert, V , de v_0 dans Ω et pour tout $v \in V$, des endomorphismes de E , ${}^iR_{\mathfrak{g}}$, $i = 1, \dots, p$, commutant deux à deux, pour v fixé et vérifiant, pour $i = 1, \dots, p$.

- (i) *L'application $v \mapsto {}^iR_{\mathfrak{g}}$ est continue (resp. holomorphe) sur V .*
- (ii) *L'exponentielle de ${}^iR_{\mathfrak{g}}$, $\exp {}^iR_{\mathfrak{g}}$ est égale à $\Gamma_{\mathfrak{g}}(X_i)$.*
- (iii) *Tout endomorphisme de E commutant à $\Gamma_{\mathfrak{g}}(X_i)$ commute à ${}^iR_{\mathfrak{g}}$.*

Démonstration. Pour $i = 1, \dots, p$, on choisit un ouvert D_i de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, à bord lisse, connexe, dont l'adhérence est contenue dans un ouvert simplement connexe de $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, D'_i , et tel que $\text{Sp}(\Gamma_{\&_0}(X_i))$ soit contenu dans D_i . On fixe V de telle sorte que:

$$\text{Sp}(\Gamma_{\&}(X_i)) \subset D_i, \quad v \in V, \quad i = 1, \dots, p,$$

ce qui est possible grâce au lemme B.1. On fixe i et on choisit une détermination du logarithme sur D'_i . On vérifie aisément que les endomorphismes de E ,

$${}^i R_{\&} = (2i\pi)^{-1} \int_{\partial D_i} (\text{Log } z)(zI - \Gamma_{\&}(X_i))^{-1} dz,$$

conviennent. ■

LEMME B.2. *On reprend les notations de la proposition précédente. On suppose ici que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel complexe et que $A_{\&}$, $v \in \mathcal{V}$, est une famille polynomiale d'endomorphismes de E , i.e., telle que $v \mapsto A_{\&}$ est polynomiale en v . On suppose en outre qu'il existe des fonctions polynomiales sur $\mathcal{V}$, distinctes deux à deux, $z_1(v), \dots, z_k(v)$, et des entiers positifs $n_1, \dots, n_k$, tels que:*

$$\det(z - A_{\&}) = \prod_{j=1, \dots, k} (z - z_j(v))^{n_j}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad v \in \mathcal{V}.$$

On note ${}^j P_{\&}$, le projecteur spectral de $A_{\&}$ relativement à la valeur propre $z_j(v)$.

Ce projecteur est une fonction rationnelle de v , i.e., il existe un polynôme p_j en v tel que $p_j(v) {}^j P_{\&}$ soit une fonction polynomiale de $v \in \mathcal{V}$.

Démonstration. Soit Ω le complémentaire dans $\mathcal{V}$ de l'ensemble des zéros de $\prod_{j < l} (z_j(v) - z_l(v))$. On fixe j et $v \in \Omega$. Soit $u_{\&}$ (resp. $v_{\&}$) un polynôme à une variable, de degré strictement inférieur à la somme des n_l , $l \neq j$ (resp. n_j) tels que:

$$u_{\&}(z)(z - z_j(v))^{n_j} + v_{\&}(z) \prod_{l \neq j} (z - z_l(v))^{n_l} \equiv 1.$$

Ces polynômes existent et sont uniques (identité de Bezout), et l'algorithme qui permet de les déterminer (suite de divisions euclidiennes) montre que leurs coefficients sont la restriction à Ω de fractions rationnelles en v . Mais ${}^j P_{\&}$ est égal à $v_{\&}(A_{\&}) b(A_{\&})$, pour $v \in \Omega$, où l'on a noté b le polynôme sur $\mathbb{C}$, $\prod_{l \neq j} (z - z_l(v))^{n_l}$. On en déduit l'existence d'un polynôme, non nul q_j sur

$\mathcal{V}$ tel que $v \mapsto q_j(v) {}^jP_{\&}$, $v \in \Omega$, soit la restriction à Ω d'une fonction polynomiale sur $\mathcal{V}$. On pose $p_j(v) = (\prod_{j < 1} (z_j(v) - z_1(v))) q_j(v)$. Alors l'application $p_j(v) {}^jP_{\&}$, qui est nulle en dehors de Ω , est polynomiale et p_j vérifie les propriétés voulues. ■

La proposition suivante est un corollaire facile du lemme précédent (voir le passage de (i) à (ii) dans la preuve du lemme 1 de cet appendice).

PROPOSITION 3. *On suppose que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel complexe, que $\Gamma_{\&}$, $v \in \mathcal{V}$, est une famille de représentations de $\mathfrak{b}$ dans E telle que, pour tout $X \in \mathfrak{b}$, $\Gamma_{\&}(X)$ est polynomiale en v . On suppose de plus qu'il existe des fonctions polynomiales sur $\mathcal{V}$, à valeurs dans $\mathfrak{b}_{\mathbb{C}}^*$, distinctes deux à deux, $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, et des entiers $n_1, \dots, n_k$, tels que:*

$$\det(z \text{Id} - \Gamma_{\&}(X)) = \prod_{j=1, \dots, k} (z - \lambda_j(v)(X))^{n_j}$$

On utilise les notations du début de cet appendice. Alors il existe un polynôme sur $\mathcal{V}$, p , non nul, tel que, pour tout j , $p(v) P_{\&}(\lambda_j(v))$ soit polynomiale en $v \in \mathcal{V}$.

APPENDICE C

Familles de systèmes complètement intégrables

On va d'abord généraliser des résultats de l'appendice de [CassM], dont on utilise la terminologie.

Soit E et $\mathcal{V}$ des espaces vectoriels complexes de dimension finie, Ω un ouvert de $\mathcal{V}$ et X un ouvert de $\mathbb{C}^n$. On se donne des fonctions $F_1, \dots, F_n$, holomorphes sur $\Omega \times X$, à valeurs dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(E)$, et on considère la famille de systèmes d'équations aux dérivées partielles:

$$\partial_i \Phi = F_{i, \&} \Phi, \quad i = 1, \dots, n, \quad v \in \Omega, \quad (\text{C.1})$$

où Φ est une fonction sur X et à valeurs dans E . On suppose que le système est complètement intégrable pour tout $v \in \Omega$. Plus précisément on suppose que, pour tout $x \in X$, $v \in E$, $v \in \Omega$, il existe une solution φ de (8.1) définie au voisinage de x et telle que $\varphi(x) = v$. On considère $\mathcal{S}_{\&}$ le faisceau des germes de solutions de (8.1), qui est un sous-faisceau du faisceau, $\mathcal{O}_X(E)$, des germes de fonctions holomorphes sur X à valeurs dans E . On fixe $x_0 \in X$ et on note $(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ le recouvrement universel de X avec point de base $\tilde{x}_0$. Soit $p: \tilde{X} \rightarrow X$ la projection correspondante. Le groupe d'homotopie $\pi_1(X, x_0)$ agit sur $\tilde{X}$ par des difféomorphismes holomorphes appelés transformation de monodromie. On note $p^* \mathcal{S}_{\&}$ l'image inverse du faisceau $\mathcal{S}_{\&}$.

C'est un sous-faisceau de $\mathcal{O}_X(E)$ dont les sections sont appelées solutions multivaluées de (C.1). La matrice fondamentale de (C.1) est une application holomorphe, $S_{\&}$, de $\tilde{X}$ dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(E)$, telle que $S_{\&}(x_0)$ soit égale à l'identité et telle que, pour tout $v \in E$, la fonction sur $\tilde{X}$, $x \mapsto S_{\&}(x) v$, est une solution multivaluée de (C.1). L'espace $\Gamma(\tilde{X}, p^* \mathcal{S}_{\&})$ de toutes les solutions multivaluées de (C.1) est invariant par les transformations de monodromie, $T_{\#}^*$, $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$, et il existe une unique représentation, $M_{\&}$, dans E , appelée monodromie du système, telle que: $T_{\#}^* v = v \circ M_{\&, \#}$, $\gamma \in \pi_1(X, x_0)$.

Alors, à l'aide du théorème sur la dépendance des solutions par rapport au paramètre v , on voit que la matrice fondamentale du système, $S_{\&}$, dépend de façon holomorphe de v . On en déduit qu'il en va de même de la monodromie. Ici, il est important d'avoir supposé que le système est complètement intégrable pour tout v , car cela assure que la monodromie agit sur un espace fixe, indépendant de v . On fixe $v_0 \in \Omega$.

On suppose en outre que $X = D^n$, où D est le disque unité ouvert de $\mathbb{C}$. On note $D^* = D \setminus \{0\}$. On fixe k entier compris entre 1 et n et l'on pose $X^* = (D^*)^k \times D^{n-k}$.

On considère maintenant le système sur X^* :

$$z_j \partial_j \Phi = F_{j, \&} \Phi, \quad j = 1, \dots, k, \quad (\text{C.2})$$

$$\partial_j \Phi = F_{j, \&} \Phi, \quad i = k + 1, \dots, n, \quad (\text{C.3})$$

où v décrit Ω . On suppose en outre que, pour tout $v \in \Omega$, le système est complètement intégrable. Le groupe $\pi_1(X^*, x_0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^k$. Soit γ_j , $j = 1, \dots, k$, ses générateurs correspondants aux lacets d'indice 1 par rapport à 0 dans le $j^{\text{ème}}$ facteur. On note encore $M_{\&}$ la monodromie du système (C.2), (C.3) et $M_{j, \&} = M_{\&, \#}$. On fixe $v_0 \in \Omega$. D'après la proposition 2 de l'appendice B, on peut supposer que les endomorphismes $M_{j, \&}$, $j = 1, \dots, k$ sont de la forme $\exp(-2\pi R_{j, \&})$, où les $R_{j, \&}$ sont des endomorphismes de E dépendant de façon holomorphe de v , au moins sur un voisinage ouvert de v_0 .

Procédant comme dans la preuve de l.c., preuve du théorème A.1.4, on montre de même:

PROPOSITION C.1. *Il existe un voisinage ouvert Ω_0 de v_0 tel que, pour tout $v \in \Omega_0$, la matrice fondamentale du système (C.2), (C.3) s'écrit*

$$S_{\&} = P_{\&}(z) z^{R_{\&}}, \quad (\text{C.4})$$

où $P_{\&}(z)$ est une fonction holomorphe sur $\Omega_0 \times D^n$ à valeurs dans $\text{End}_{\mathbb{C}}(E)$, et $z^{R_{\&}} = z_1^{R_{1, \&}} \dots z_k^{R_{k, \&}}$, où les $R_{j, \&}$ sont des endomorphismes de E , commutant entre eux, pour v fixé, et dépendant de façon holomorphe de $v \in \Omega_0$.

On écrit

$$P_{\&}(z) = \sum_{m \in \mathbb{N}^n} P_{\&, m} z^m \quad (C.5)$$

où les coefficients $P_{\&, m} \in \text{End}_{\mathbb{C}}(E)$ sont holomorphes en v . Soit $v_0 \in \Omega$. On pose pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathfrak{b} := \mathbb{C}^n$, $\Gamma_{\&}(z) = \sum_{j=1, \dots, n} z_j R_{j, \&}$. On utilise la terminologie et les résultats de l'appendice B. On choisit un voisinage ouvert de $\text{Sp}(\Gamma_{\&})$, V , qui est la réunion disjointe de voisinages ouverts, $V(\lambda_1), \dots, V(\lambda_p)$, des éléments distincts $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ de $\text{Sp}(\Gamma_{\&0})$. D'après la proposition précédente on peut écrire

$$S_{\&}(z) = \sum_{+ \in \mathfrak{b}^*} S_{\&, +}(z) \quad (C.6)$$

où μ est nul s'il n'appartient pas à $\text{Sp}(\Gamma_{\&}) + \mathbb{N}^n$ et

$$S_{\&, +}(z) = \left(\sum_{m \in \mathbb{N}^n} s_{+, m} (\log^m z) \right) z^+ \quad (C.7)$$

la somme étant finie et où les coefficients $s_{+, m}$ sont des éléments de $\text{End}(E)$. Cette écriture est unique (cf. [K, corollaire B.26]). On dispose d'une écriture semblable pour les solutions du système (C.2), (C.3). On appelle exposant d'une solution, φ tout élément μ de $\mathfrak{b}^*$ pour lequel le terme correspondant à z^+ dans ce développement est non nul.

On note, pour $\lambda \in \text{Sp}(\Gamma_{\&})$, $Q_{\&}(\lambda)$, le projecteur sur le sous-espace caractéristique correspondant à λ , parallèlement aux autres.

PROPOSITION C.2. *Avec les notations ci dessus, on a:*

(i) *Pour $\mu \in \mathfrak{b}^*$, on a:*

$$S_{\&, +}(z) = \sum_{* \in \text{Sp}(\Gamma_{\&0}), m \in \mathbb{N}^n, * + m = +} P_{\&, m} Q_{\&}(\lambda) z^{R_{\&}}$$

(ii) *On fixe $\mu_0 \in \mathfrak{b}^*$. La somme sur les $m \in \mathbb{N}^n$, sur les $\lambda_i \in \text{Sp}(\Gamma_{\&0})$ tels que $\lambda_i + m = \mu_0$ de*

$$\sum_{* \in \text{Sp}(\Gamma_{\&0}) \cap V(*_i)} P_{\&, m} z^m Q_{\&}(\lambda) z^{R_{\&}} \quad (C.8)$$

est holomorphe en v au voisinage de v_0 et vaut $S_{\&0, +_0}$ lorsque v est égal à v_0 .

(iii) *Soit $\varphi_{\&}$, $v \in \Omega$, une famille holomorphe en v , de solutions du système (C.2), (C.3), et μ_0 un exposant de $\varphi_{\&0}$. Si $(v_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de Ω convergeant vers v_0 , il existe une suite $(\mu_q)_{q \in \mathbb{N}^*}$, où μ_q est un exposant de $\varphi_{\&q}$, et qui converge vers μ_0 .*

Démonstration. Le point (i) est une conséquence immédiate des formules (C.4) à (C.7).

L'expression (C.8) est clairement holomorphe d'après l'holomorphie au voisinage de v_0 de $P_{\&,m}$, des $R_{j,\&}$ et des sommes:

$$\sum_{* \in \text{Sp}(1_{\&}) \cap V(*_i)} Q_{\&}(\lambda)$$

d'après la Proposition 1 de l'Appendice B. D'où (ii).

En exprimant les solutions à l'aide de la matrice fondamentale, on déduit (iii) de (ii) grâce au principe des zéros isolés. ■

PROPOSITION C.3. *On conserve les notations de la proposition précédente. On suppose qu'il existe des applications holomorphes, deux à deux distinctes, de Ω dans $\mathfrak{b}^*$, T_w , où w décrit un ensemble fini, U , telles que les exposants de $S_{\&}, v \in \Omega$, sont éléments de:*

$$\bigcup_{w \in U} T_w(v) + \mathbb{N}^n.$$

Soit $\varphi_{\&}, v \in \Omega$, une famille holomorphe en v , de solutions du système (C.2), (C.3). Soit μ_0 un exposant de $\varphi_{\&_0}$. On définit $\varphi_{\&,+}$ comme $S_{\&,+}$ (cf. (C.7)).

La somme sur les $\mu \in \mathfrak{b}^$ tels qu'il existe $w \in U, m' \in \mathbb{N}^n$ vérifiant*

$$\mu = T_w(v) + m', \quad \mu_0 = T_w(v_0) + m'$$

des $\varphi_{\&,+}$ est holomorphe en v au voisinage de v_0 et est égale à $\varphi_{\&_0,+}$ en v_0 .

Démonstration. Il est clair qu'il suffit de démontrer un résultat analogue pour $S_{\&}$, i.e., de montrer que la somme, qu'on note S dans la suite, sur les $\mu \in \mathfrak{b}^*$ tels qu'il existe $w \in U, m' \in \mathbb{N}^n$ vérifiant

$$\mu = T_w(v) + m', \quad \mu_0 = T_w(v_0) + m',$$

des $S_{\&,+}$ est holomorphe en v au voisinage de v_0 et est égale à $S_{\&_0,+}$ en v_0 .

On commence par choisir $\varepsilon, \alpha > 0$ tels que, pour $w, w' \in U$ tels que $T_w(v_0) - T_{w'}(v_0)$ ne soit pas élément de $\mathbb{Z}^n$, on ait

$$\|T_w(v) - T_{w'}(v_0) + m\| \geq \alpha, \quad \text{si } m \in \mathbb{Z}^n \text{ et } \|v - v_0\| < \varepsilon,$$

et tels que, au contraire, si $T_w(v_0) - T_{w'}(v_0)$ est élément de $\mathbb{Z}^n$, on ait, pour tout $m \in \mathbb{Z}^n$, l'implication:

$$(\|T_w(v) - T_{w'}(v_0) + m\| < \alpha \text{ et } \|v - v_0\| < \varepsilon) \Rightarrow T_w(v_0) = T_{w'}(v_0) - m.$$

Pour tout $v \in \Omega$, comme $S_{\&}(z)$ est inversible, $P_{\&}(z)$ est inversible. Par suite si $\lambda \in \text{Sp}(\Gamma_{\&})$, il existe $p \in \mathbb{N}^n$ tel que $\lambda + p$ soit un exposant de $S_{\&}$, et grâce à l'hypothèse, cela implique $\lambda = T_w(v) + m$ pour un élément w de U et un élément m de $\mathbb{N}^n$.

Pour chaque $\lambda_i \in \text{Sp}(\Gamma_{\&_0})$, on choisit le voisinage $V(\lambda_i)$ inclus dans la boule ouverte de centre λ_i et de rayon α .

On fixe un voisinage $\Omega_{\&_0}$ de v_0 contenu dans la boule ouverte de centre v_0 et de rayon ε et tel que pour tout $v \in \Omega_{\&_0}$, le spectre de $\Gamma_{\&}$ soit contenu dans la réunion des $V(\lambda_i)$. On choisit $\Omega_{\&_0}$ assez petit pour que l'on ait:

$$\|T_w(v) - T_w(v_0)\| < \alpha, \quad v \in \Omega_{\&_0}, \quad w \in U.$$

Si $v \in \Omega_{\&_0}$ et λ est un élément de $\text{Sp}(\Gamma_{\&}) \cap V(\lambda_i)$, et que:

$$\lambda_i = T_{w_i}(v_0) + m_i, \quad \lambda = T_w(v) + m'', \quad \text{où } w, w_i \in U, \quad m'', m_i \in \mathbb{Z}^n \quad (\text{C.9})$$

on a, d'après notre choix de α et ε :

$$T_w(v_0) + m'' = T_{w_i}(v_0) + m_i. \quad (\text{C.10})$$

On réécrit, pour $v \in \Omega_{\&_0}$ la somme S , grâce à la Proposition 2 de cet Appendice. C'est donc la somme, notée S' , sur les $\mu \in \mathfrak{b}^*$ tels qu'il existe un élément w de U et un élément m' de $\mathbb{N}^n$ tels que:

$$\mu = T_w(v) + m', \quad \mu_0 = T_w(v_0) + m' \quad (\text{C.11})$$

et sur les $m \in \mathbb{N}^n$, les $\lambda \in \text{Sp}(\Gamma_{\&})$ tels que:

$$\lambda + m = \mu \quad (\text{C.12})$$

de:

$$P_{\&, m}(Q_{\&}(\lambda) z^{\mathbf{R}_{\&}}.$$

On va voir que chaque terme de la somme ainsi formée intervient exactement une fois dans la somme de la Proposition C.2(ii).

En effet, on alors:

$$\lambda = T_w(v) + m'', \quad \text{avec } m'' = m' - m, \quad (\text{C.13})$$

et si λ est élément de $V(\lambda_i)$, λ et λ_i satisfont (C.9) et donc aussi (C.10). Jointes à (C.11) et (C.13), ces relations impliquent que:

$$\lambda_i + m = \mu_0$$

Ceci achève de prouver que chaque terme de la somme S' intervient exactement une fois dans la somme de la Proposition 2 de cet Appendice.

Montrons enfin que chaque terme de la somme de la Proposition C.2(ii) intervient dans la somme ci-dessus. On voit, comme précédemment que λ et λ_i , sont liés par les relations (C.9) et (C.10), ce qui permet de voir que $\mu := \lambda + m$ est égal à $T_w(v) + m'$ avec $m' = m + m''$ et $\mu_0 = T_w(v_0) + m'$. Mais m' n'est pas nécessairement élément de $\mathbb{N}^n$. Toutefois si la contribution de μ à la somme est non nulle, c'est un exposant de $S_\&$, donc de la forme $T_w(v) + n$ avec $n \in \mathbb{N}^n$ et $w' \in U$. Les deux écritures de μ montrent que:

$$T_w(v) - T_{w'}(v) + m' - n = 0$$

Ceci implique, grâce aux propriétés de $\Omega_{\&_0}$, que l'on a:

$$\|T_w(v) - T_{w'}(v_0) + m' - n\| < \alpha$$

Alors, on déduit des propriétés de ε et α , l'égalité:

$$T_w(v_0) + m' = T_{w'}(v_0) + n.$$

On a donc:

$$\mu_0 = T_{w'}(v_0) + n, \quad \mu = T_w(v) + n,$$

avec $n \in \mathbb{N}^n$, i.e., μ à la forme voulue.

On vient de prouver que notre somme est identique à celle de la Proposition 5(ii) qui a les propriétés voulues. ■

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement E. Opdam pour les réponses qu'il a apporté à toutes mes questions.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] E. van den Ban, The principal series for a reductive symmetric space II, *J. Funct. Anal.* **109** (1992), 331–441.
- [BD] E. van den Ban et P. Delorme, Quelques propriétés des représentations sphériques pour les espaces symétriques réductifs, *J. Funct. Anal.* **80** (1988), 284–307.
- [BCD] E. van den Ban, J. Carmona, et P. Delorme, Paquets d'ondes dans l'espace de Schwartz d'un espace symétrique réductif, *J. Funct. Anal.* **139** (1996), 225–243.
- [Be] J. N. Bernstein, On the support of the Plancherel measure, *J. Geom. Phys.* **5** (1988), 663–710.
- [Bou] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, in “Eléments de Mathématique,” Chaps. 4, 5, et 6, Hermann, Paris, 1968.

- [BrHO] R. Brussee, G. Heckman, et E. Opdam, Variations on a theme of MacDonald, *Math. Z.* **208** (1991), 1–10.
- [C] J. Carmona, Terme constant des fonctions tempérées sur un espace symétrique réductif, *J. Reine Angew. Math.* **491** (1997), 17–63.
- [CD] J. Carmona et P. Delorme, Transformation de Fourier pour les espaces symétriques réductifs, *Invent. Math.* **134** (1998), 59–99.
- [CassM] W. Casselman et D. Millicic, Asymptotic behaviour of matrix coefficients of admissible representations, *Duke Math. J.* **49** (1982), 869–930.
- [D1] P. Delorme, Homomorphismes de Harish-Chandra liés aux K-types minimaux des séries principales généralisées des groupes de Lie réductifs connexes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* **17** (1984), 117–156.
- [D2] P. Delorme, Intégrales d'Eisenstein pour les espaces symétriques réductifs. Tempérance. Majorations. Petite matrice B, *J. Funct. Anal.* **136** (1996), 422–509.
- [D3] P. Delorme, Troncature pour les espaces symétriques réductifs, *Acta Math.* **179** (1997), 41–77.
- [D4] P. Delorme, Formule de Plancherel pour les espaces symétriques réductifs, *Ann. of Math.* **147** (1998), 417–452.
- [GV] R. Gangolli et V. S. Varadarajan, “Harmonic Analysis of Spherical Functions on Real Reductive Groups,” *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, Vol. 101, Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1988.
- [HC1] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups, I, *J. Funct. Anal.* **36** (1976), 1–35.
- [HC2] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups, II, *Inventiones Math.* **36** (1976), 1–35.
- [HC3] Harish-Chandra, Harmonic analysis on real reductive groups, III, *Ann. of Math.* **104** (1976), 117–201.
- [H] G. Heckman, “Dunkl Operators,” Exposé au Séminaire Bourbaki, No. 828, 1997.
- [HO1] G. Heckman et E. Opdam, Root systems and hypergeometric functions, I, *Compositio Math.* **64** (1987), 329–352.
- [HO2] G. Heckman et E. Opdam, Yang system of particles and Hecke algebras, *Ann. of Math.* **145** (1997), 139–173.
- [HS] G. Heckman et H. Schlichtkrull, “Harmonic Analysis and Special Functions on Symmetric Spaces,” *Perspectives in Math.*, Vol. 16, Academic Press, New York, 1994.
- [K] A. Knapp, “Representation Theory of Semisimple Lie Groups. An Overview Based on Examples,” *Princeton Mathematical Series*, Vol. 36, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1986.
- [O1] E. Opdam, Harmonic analysis for certain representations of graded Hecke algebras, *Acta Math.* **175** (1995), 75–121.
- [O2] E. Opdam, Cuspidal hypergeometric functions, preprint.
- [Wal] N. Wallach, “Real Reductive Groups,” *Pure and Applied Mathematics*, Vol. 132, II, Academic Press, New York, 1992.
- [War] G. Warner, “Harmonic Analysis on Semisimple Lie Groups,” Vol. I, Springer-Verlag, New York, 1972.
- [WhiWat] E. T. Whittaker et G. N. Watson, “A Course of Modern Analysis,” 4ème éd., Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980.