Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu

http://journals.cambridge.org/JMJ

Additional services for ***Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu:***

Email alerts: Click here
Subscriptions: Click here
Commercial reprints: Click here
Terms of use : Click here

Théorème de Paley—Wiener pour les fonctions de Whittaker sur un groupe réductif *p*-adique

Patrick Delorme

Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu / Volume 11 / Issue 03 / July 2012, pp 501 - 568
DOI: 10.1017/S1474748011000193, Published online: 06 January 2012

Link to this article: http://journals.cambridge.org/abstract_S1474748011000193

How to cite this article:
Patrick Delorme (2012). Théorème de Paley—Wiener pour les fonctions de Whittaker sur un groupe réductif *p*-adique. Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, 11, pp 501-568 doi:10.1017/S1474748011000193

Request Permissions : Click here

Downloaded from http://journals.cambridge.org/JMJ, IP address: 139.124.6.128 on 30 Jun 2016

Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2012) **11**(3), 501–568
doi:10.1017/S1474748011000193 © Cambridge University Press 2011

THÉORÈME DE PALEY–WIENER POUR LES FONCTIONS DE WHITTAKER SUR UN GROUPE RÉDUCTIF p-ADIQUE

PATRICK DELORME

Institut de Mathématiques de Luminy, UMR 6206 CNRS,
Université de la Méditerranée, 163 Avenue de Luminy,
13288 Marseille Cedex 09, France (delorme@iml.univ-mrs.fr)

(Reçu le 1 mai 2009 ; révisé le 16 juillet 2010 ; accepté le 5 mars 2011)

Résumé Soit G un groupe réductif p-adique et U_0 le radical unipotent d'un sous-groupe parabolique minimal de G. Nous introduisons une transformation de Fourier pour l'espace des fonctions de Whittaker lisses sur G et à support compact modulo U_0. Nous en déterminons l'image. La preuve suit celle d'Heiermann pour les fonctions sur le groupe.

Au cours de la preuve, une formule d'inversion est prouvée. Celle-ci permet de montrer qu'une représentation lisse irréductible de G, qui possède modèle de Whittaker dans les fonctions de Whittaker à support compact modulo U_0, est cuspidale.

Ce travail nous a donné l'opportunité de préparer un cadre pour l'analyse harmonique sur les espaces symétriques réductifs p-adiques : B-matrices et terme constant, propriétés des paquets d'ondes.

Abstract Let G be a p-adic reductive group and let U_0 be the unipotent radical of a minimal parabolic subgroup of G. We introduce a Fourier transform defined on the space of smooth Whittaker functions on G which are compactly supported modulo U_0. We determine its image. The proof follows the proof of Heiermann for the functions on the group.

During the proof, we establish an inversion formula. This formula allows us to prove that an irreducible smooth representation of G, which has a Whittaker model in the space of smooth Whittaker functions on G which are compactly supported modulo U_0, is cuspidal.

This work gave us the opportunity to prepare a framework for the study of harmonic analysis on p-adic reductive symmetric spaces: B-matrices and constant term; a study of wave packets.

Mots clés : groupe réductif ; corps local non archimédien ; modèle de Whittaker ; Théorème de Paley–Wiener ; terme constant

Keywords: reductive groups; non-Archimedean local fields; Whittaker models; Paley–Wiener Theorem; constant term

AMS 2010 *Mathematics subject classification:* Primary 22E50

1. Introduction

Soit F un corps local non archimédien et soit G le groupe des points sur F d'un groupe réductif connexe défini sur F. Soit (P_0, P_0^-) un couple de sous-groupes paraboliques minimaux opposés de G. On note M_0 leur sous-groupe de Lévi commun. Soit U_0 le radical unipotent de P_0 et A_0 le plus grand tore déployé de M_0. Soit K un bon sous-groupe compact maximal de G relativement à A_0. Soit ψ un caractère unitaire lisse de

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

U_0 non dégénéré, i.e. tel que pour toute racine P_0-simple de A_0, α, sa restriction au sous-groupe radiciel $(U_0)_\alpha$ soit non triviale.

On note $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ l'espace des fonctions de Whittaker lisses sur G, i.e. des fonctions, f, sur G, invariantes à droite par un sous-groupe compact ouvert de G et telles que :

$$f(u_0 g) = \psi(u_0) f(g), \quad g \in G,\ u_0 \in U_0.$$

On note $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ l'espace des éléments de $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ qui sont à support compact modulo U_0.

Le but de cet article est de définir une transformée de Fourier pour cet espace et d'en caractériser l'image. Ce théorème est l'analogue pour les fonctions de Whittaker du Théorème de Paley–Wiener pour les fonctions sur le groupe, du à Joseph Bernstein [**3**] et dont Heiermann [**15**] a fourni une autre preuve. Ici, c'est le travail d'Heiermann qui sert de fil conducteur à notre preuve.

Noter que pour les fonctions de Whittaker sur un groupe réductif réel, la formule de Plancherel a été établie (Harish-Chandra, non publié ; Wallach [**26**, Chapitre 15]). La formule de Plancherel dans le cas p-adique a également été établie par Harish-Chandra (non publié), comme nous l'a indiqué Laurent Clozel.

Si (π, V) est une représentation lisse de G, on note $\mathrm{Wh}(\pi, U_0)$ ou $\mathrm{Wh}(\pi)$ l'espace des formes linéaires, ξ, sur V telles que :

$$\langle \xi, \pi(u_0) v\rangle = \psi(u_0)\langle \xi, v\rangle, \quad v \in V,\ u_0 \in U_0.$$

Si π est de longueur finie, $\mathrm{Wh}(\pi)$ est de dimension finie (voir [**8**, Théorème 4.2] et [**14**] pour une autre démonstration). Notez que si le groupe n'est pas quasi-déployé, cette dimension n'est pas toujours inférieure ou égale à 1, comme expliqué dans l'introduction de [**8**] (voir aussi le Théorème 1, appliqué à un sous-groupe parabolique minimal de G).

Si $v \in V$, on note $c_{\xi,v}$ le coefficient généralisé défini par :

$$c_{\xi,v}(g) := \langle \xi, \pi(g) v\rangle, \quad g \in G.$$

C'est un élément de $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$.

Dans la suite la phrase « Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G » voudra dire que P contient M_0, que M est son sous-groupe de Lévi contenant M_0 et que U est son radical unipotent. On note $X(M)$ le groupe des caractères non ramifiés de M. C'est un tore complexe. On note δ_P la fonction module de P. Soit (σ, E) une représentation lisse de M. On note $(i_P^G\sigma, i_P^G E)$ l'induite parabolique normalisée de (σ, E). On suppose σ irréductible et on note $\mathcal{O}$ l'ensemble des classes d'équivalences des représentations $\sigma_\chi := \sigma \otimes \chi$, $\chi \in X(M)$, qui est un tore complexe. On utilise dans la suite la notion de fonction sur $\mathcal{O}$, qui dépendent des objets concrets σ_χ, avec des règles de transformations pour tenir compte des équivalences de représentations. On note que $\mathrm{Wh}(\sigma_\chi) := \mathrm{Wh}(\sigma_\chi, U_0 \cap M)$ est indépendant de $\chi \in X(M)$, car χ est trivial sur $U_0 \cap M$. Par restriction des fonctions à K, les représentations $i_P^G\sigma_\chi$ admettent une réalisation dans un espace indépendant de χ, la réalisation compacte.

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Théorème (fonctionnelles de Jacquet pour les sous-groupes paraboliques anti-standard). *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G, i.e. contenant P_0^-, $P^- = MU^-$ le sous-groupe parabolique opposé relativement à M. On note (σ, E) une représentation lisse de longueur finie de M.*

*Il y a un isomorphisme naturel $\mathrm{Wh}(\sigma) \to \mathrm{Wh}(i_P^G\sigma)$ noté $\eta \mapsto \xi(P, \sigma, \eta)$ (Rodier [**20**] ; Casselman et Shalika [**10**] ; Shahidi [**23**, Proposition 3.1]) tel que :*

(i) *pour tout v dans l'espace de la réalisation compacte et $\eta \in \mathrm{Wh}(\sigma)$, $\langle \xi(P, \sigma_\chi, \eta), v\rangle$ est polynomiale en $\chi \in X(M)$;*

(ii) *de plus, si $\chi \in X(M)$ est suffisamment P-dominant, le vecteur distribution $\xi(P, \sigma, \eta)$ est donné par la fonction sur G à valeurs dans E', $\tilde{\xi}(P, \sigma, \eta)$, définie par :*

$$\langle \tilde{\xi}(P, \sigma, \eta)(umu^-), e\rangle = \psi(u^-)^{-1}\langle \eta, \sigma(m^{-1})\delta_P^{1/2}(m)e\rangle, \quad e \in E,$$
$$\tilde{\xi}(P, \sigma, \eta)(g) = 0 \quad \text{si } g \notin UMU^- = PU_0.$$

On définit les fonctionnelles de Jacquet pour un sous-groupe parabolique semi-standard de G, $P = MU$, par transport de structure.

On note $\bar{W}^G$ (respectivement $\bar{W}^M$) le groupe de Weyl de G (respectivement M) relativement à M_0. On fixe un ensemble W^G de représentants dans K de $\bar{W}^G$. Pour un bon choix de $w \in W^G$ tel que $Q := wPw^{-1}$ est anti-standard, on définit

$$\mathrm{Wh}(P, \sigma) := \mathrm{Wh}(w\sigma),$$
$$\xi(P, \sigma, \eta) := \xi(Q, w\sigma, \eta) \circ \lambda(w), \quad \eta \in \mathrm{Wh}(P, \sigma),$$

où $\lambda(w)$ est la translation à gauche par w, qui entrelace $i_P^G\sigma$ et $i_Q^G w\sigma$. Ce choix de w conduit malheureusement à quelques complications et à quelques calculs pénibles, mais que nous n'avons pas su éviter.

Soit P, Q des sous-groupes paraboliques semi-standard de G, possédant le même sous-groupe de Lévi, M, contenant M_0.

On introduit les intégrales d'entrelacement, $A(Q, P, \sigma)$, qui, lorsqu'elles sont définies, entrelacent $i_P^G\sigma$ et $i_Q^G\sigma$.

Les intégrales d'entrelacement transforment les fonctionnelles de Jacquet en des fonctionnelles de Jacquet, ce qui permet d'introduire les matrices B.

Il existe une unique fonction rationnelle sur $X(M)$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathrm{Wh}(Q, \sigma), \mathrm{Wh}(P, \sigma))$, *$\chi \mapsto B(P, Q, \sigma_\chi)$, telle que :*

$$\xi(Q, \sigma_\chi, \eta) \circ A(Q, P, \sigma_\chi) = \xi(P, \sigma_\chi, B(P, Q, \sigma_\chi)\eta).$$

On définit les intégrales de Jacquet par :

$$E_P^G(\sigma, \eta \otimes v) = c_{\xi,v} \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi),$$

où $\xi = \xi(P, \sigma, \eta)$, $v \in i_P^G E$.

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

On note A_G le plus grand tore déployé du centre de G. Soit (π, V) une représentation lisse unitaire irréductible et cuspidale de G, i.e. dont les coefficients lisses sont à support compact modulo A_G. Grâce au Lemme de Schur, on voit qu'il existe un unique produit scalaire sur $\mathrm{Wh}(\pi)$ tel que :

$$\int_{A_G U_0 \backslash G} c_{\xi,v}(g)\overline{c_{\xi',v'}(g)}\,\mathrm{d}g = (\xi,\xi')(v,v'), \quad \xi,\xi' \in \mathrm{Wh}(\pi),\ v,v' \in V.$$

On notera que π cuspidale implique que $c_{\xi,v}$ est à support compact modulo $A_G U_0$ (voir [**14**, Theorème 4.4]) car ξ est U_ψ-cuspidale, donc l'intégrale est bien définie.

On définit maintenant la transformée de Fourier–Whittaker de $f \in C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$, $\hat{f}$, comme suit. Pour tout sous-groupe parabolique semi-standard de G, $P = MU$, et toute représentation lisse unitaire irréductible cuspidale de M, (σ, E), le Théorème de Représentation de Riesz montre qu'il existe un unique élément de $\mathrm{Wh}(\sigma) \otimes i_P^G E$, $\hat{f}(P,\sigma)$, tel que :

$$(\hat{f}(P,\sigma), \eta \otimes v) = \int_{U_0\backslash G} f(g)\overline{E_P^G(\sigma,\eta,v)(g)}\,\mathrm{d}g, \quad \eta \in \mathrm{Wh}(P,\sigma),\ v \in i_P^G E.$$

Notons F au lieu de $\hat{f}$. Alors F vérifie les propriétés suivantes.

(1) (a) L'application $\chi \mapsto F(P, \sigma_\chi)$, définie pour χ élément du groupe des caractères non ramifiés unitaires de M, $X(M)_{\mathrm{u}}$, s'étend en une fonction polynomiale sur $X(M)$. En particulier, dans la réalisation compacte, cette application est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

(b) Si (σ, E) et (σ_1, E_1) sont unitairement équivalentes, $F(P,\sigma)$ et $F(P,\sigma_1)$ vérifient une relation de transport de structure.

(c) On peut définir pour $g \in G$, $\rho_\bullet(g)F(P,\sigma)$, en posant $(\rho_\bullet(g)F)(P,\sigma) = (\mathrm{Id} \otimes i_P^G\sigma(g))F(P,\sigma)$. Alors il existe un sous-groupe compact ouvert de G, H, tel $\rho_\bullet(h)F = F$ pour tout $h \in H$.

On appelle orbite inertielle unitaire, $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$, d'une représentation lisse unitaire irréductible et cuspidale, (σ, E), l'ensemble des classes d'équivalence unitaire des représentations $\sigma \otimes \chi$, $\chi \in X(M)_{\mathrm{u}}$, qui est muni d'une mesure non nulle et $X(M)_{\mathrm{u}}$-invariante, convenablement normalisée.

On résume les propriétés (a)–(c) en disant que pour toute orbite inertielle unitaire, $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$, d'une représentation lisse unitaire irréductible cuspidale de M, (σ, E), $F(P,)$ définit un élément de $\mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh}(P,\cdot) \otimes i_P^G)$ (voir (2.4) pour la notation qui ne fait référence qu'aux foncteurs). Alors $\rho_\bullet$ définit une représentation lisse de G sur cet espace.

(2) Il existe de plus un sous-groupe compact ouvert, H, de G fixant les diverses applications $F(P,\cdot)$, quand P et $\mathcal{O}$ varient.

(3) Si P est semi-standard et w est choisi comme plus haut, on note $w \cdot P := wPw^{-1}$ et l'on a :

$$F(w \cdot P, w\sigma) = (\mathrm{Id} \otimes \lambda(w))F(P,\sigma).$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

(4) Si P est un sous-groupe parabolique anti-standard et Q est un sous-groupe parabolique semi-standard de G admettant M pour sous-groupe de Lévi :

$$(B(Q,P,\sigma)\otimes \mathrm{Id})F(P,\sigma) = (\mathrm{Id}\otimes A(Q,P,\sigma))F(Q,\sigma).$$

Cette relation est loin d'être triviale car elle utilise l'égalité, pour σ représentation lisse unitaire irréductible et cuspidale :

$$B(Q,P,\sigma)^* = B(P,Q,\sigma), \tag{1.1}$$

que l'on établit beaucoup plus loin.

Théorème principal. *Si F satisfait ces propriétés, elle est de la forme $\hat{f}$ pour un unique $f \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U_0\backslash G,\psi)$.*

Donnons une idée de notre preuve.

L'unicité résulte de l'adaptation (voir § 11) d'un résultat de Bernstein (voir [**2**]).

Pour l'existence, on commence par introduire les paquets d'ondes. Avec les notations ci-dessus et en supposant P anti-standard, soit $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh}(P,\,)\otimes i_P^G)$. On définit le paquet d'ondes f_ϕ par :

$$f_\phi(g) := \int_{\mathcal{O}_{\mathrm{u}}} E_P^G(\sigma,\phi(\sigma))(g)\,\mathrm{d}\sigma, \quad g\in G,$$

qui est un élément de $C^\infty(U_0\backslash G,\psi)$. On définit ensuite la notion de ϕ régulière (respectivement très régulière), que nous ne détaillerons pas dans cette introduction. Elle fait intervenir les intégrales d'entrelacement et les matrices B. Il y a beaucoup de ϕ très régulières. En effet, si ϕ est non nulle, il existe un élément, z, du centre de Bernstein, $\mathrm{ZB}(G)$, tel que $\rho_\bullet(z)\phi$ soit très régulière et non nulle.

On montre alors la proposition suivante.

Proposition. *Si ϕ est régulière, alors f_ϕ est un élément de $C_{\mathrm{c}}^{\infty}(U_0\backslash G,\psi)$.*

La preuve passe par le terme constant des éléments de $C^\infty(U_0\backslash G,\psi)$ le long d'un sous-groupe parabolique standard de G, P, qui donne lieu à une application (voir [**14**]) :

$$C^\infty(U_0\backslash G,\psi)\to C^\infty(U_0\cap M\backslash M,\psi), \quad f\mapsto f_P.$$

Sa définition utilise le théorème de deuxième adjonction de Bernstein (voir [**3**, **4**, **7**]). Le terme constant des intégrales de Jacquet se calcule (voir Théorème 3), comme le terme constant faible des coefficients ordinaires (voir [**25**, § V]), avec quelques variantes néanmoins. Plus précisément, soit $P = MU$ (respectivement $P' = M'U'$) un sous-groupe parabolique anti-standard (respectivement standard) de G. Soit (σ,E) une représentation lisse cuspidale irréductible de M et $\phi\in \mathrm{Wh}(P,\sigma)\otimes i_P^G\sigma$.

Soit :

$$\bar{W}(M'|G|M) = \bar{W}^{M'}\backslash\{s\in \bar{W}^G,\ sMs^{-1}\subset M'\}.$$

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

On réalise les représentations $i_P^G \sigma_\chi$ dans un espace indépendant de $\chi \in X(M)$. Alors, pour ϕ dans cet espace, on a une identité de fractions rationnelles sur $X(M)$:

$$E_P^G(\sigma_\chi, \phi)_{P'} = \sum_{s \in \bar{W}(M'|G|M)} E_s(\sigma_\chi, \phi),$$

où $E_s(\sigma_\chi, \phi)$ fait intervenir les intégrales d'entrelacements et les matrices B. La définition de $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_\mathrm{u}, \mathrm{Wh}(P,) \otimes i_P^G)$ régulière comporte notamment le fait que $E_s(\sigma_\chi, \phi(\sigma_\chi))(g)$ est polynomiale en $\chi \in X(M)$, pour tout $g \in G$.

Par des arguments de translation à droite par des éléments de A_0, la preuve de la proposition se ramène à montrer que pour tout ϕ régulière, la restriction à la chambre de Weyl négative, A_0^-, de A_0 relativement à P_0, est à support compact.

On procède ensuite par récurrence sur la dimension de G. On utilise ensuite une partition de A_0^-, $(X_{P'})$ indexée par les sous-groupes paraboliques standard, P', de G telle que sur $X_{P'}$, $E(P, \sigma_\chi, \phi(\sigma_\chi))$ est égale à $E_P^G(\sigma_\chi, \phi(\sigma_\chi))_{P'}$, pour tout $\chi \in X(M)$. Puis on utilise la formule pour le terme constant des intégrales de Jacquet. L'hypothèse que ϕ est régulière permet d'utiliser l'hypothèse de récurrence pour finir la preuve de la proposition.

Ensuite on calcule (voir Théorème 5) $\hat{f}_\phi$ pour ϕ très régulière en utilisant la formule du terme constant des intégrales de Jacquet. On procède comme dans [**25**, § VI], en introduisant la transformée d'Harish-Chandra de $f \in C_\mathrm{c}^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$ relative à $P = MU$, sous-groupe parabolique anti-standard de G, f^P définie par

$$f^P(m) := \delta_P^{1/2}(m) \int_U f(mu)\,\mathrm{d}u, \quad m \in M.$$

On en déduit une formule pour le produit scalaire L^2 de deux paquets d'ondes f_ϕ et $f_{\phi'}$ (voir Proposition 9) :

$$(f_\phi, f_{\phi'}) := \int_{U_0 \backslash G} f_\phi(g) \overline{f_{\phi'}(g)}\,\mathrm{d}g.$$

En échangeant le rôle de ϕ et ϕ', on obtient une autre expression de ce produit scalaire. En faisant varier ϕ et ϕ' dans l'égalité de ces deux expressions de $(f_\phi, f_{\phi'})$, on en déduit la formule d'adjonction (1.1) (voir Théorème 6).

Pour poursuivre, on utilise le résultat suivant d'Heiermann (voir [**15**, Proposition 0.2]). Soit e_H la mesure de Haar normalisée d'un sous-groupe compact ouvert H contenu dans K. Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G et $\mathcal{O}_\mathrm{u}$ l'orbite inertielle unitaire d'une représentation lisse unitaire irréductible cuspidale de M. Alors, il existe $\zeta(P, \cdot) \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_\mathrm{u}, \mathrm{Hom}(i_P^G, i_{P^-}^G))$ tel que, pour $\sigma \in \mathcal{O}$:

$$(i_P^G \sigma)(e_H) = \sum_{w \in W^G,\, w\mathcal{O} = \mathcal{O}} A(P, w^{-1}P^-w, \sigma)\lambda(w^{-1})\zeta(P, w\sigma)\lambda(w)A(w^{-1}Pw, P, \sigma).$$

Pour finir la preuve du théorème principal, soit F satisfaisant les conditions de celui-ci et H-invariant. On définit :

$$\varPhi_\mathcal{O}(\sigma) := (\mathrm{Id} \otimes A(P^-, P, \sigma)^{-1})\zeta(P, \sigma)F(P, \sigma), \quad \sigma \in \mathcal{O}_\mathrm{u},$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

et on introduit le paquet d'onde décalé $f^{sh}_{\Phi_{\mathcal{O}}}$ défini comme le paquet d'ondes ordinaire mais en intégrant sur $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}\Lambda$, où $\Lambda \in X(M)$ est suffisamment P-antidominant. On montre de manière analogue à [**15**, Proposition 2.1] la proposition suivante.

Proposition. *Pour P anti-standard, le paquet d'ondes décalé $f_{\mathcal{O}} := f^{sh}_{\Phi_{\mathcal{O}}}$ est élément de $C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)$.*

Maintenant on définit f comme étant la somme finie sur les classes de conjugaison de couples $(M, \mathcal{O})$ des $f_{\mathcal{O}}$ non nulles. Alors le théorème résulte d'une part du fait que la transformée de Fourier–Whittaker de f est égale à F. Pour montrer cela, on se réduit au cas où $\Phi_{\mathcal{O}}$ est très régulière, auquel cas les paquets d'ondes décalés sont égaux aux paquets d'ondes ordinaires, par holomorphie. Pour effectuer cette réduction on remarque que, si z est un élément du centre de Bernstein de G et ρ est la représentation régulière droite de G sur $C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)$, on a :

$$(\rho(z)f)\hat{} = \rho_\bullet(z)\hat{f}, \qquad \rho(z)f^{sh}_{\Phi} = f^{sh}_{\rho_\bullet(z)\Phi}.$$

On conclut grâce au calcul de la transformation de Fourier des paquets d'ondes mentionné plus haut.

D'autre part l'unicité résulte de l'injectivité de la transformation de Fourier–Whittaker. Celle-ci est une conséquence de résultats de Bernstein sur les espaces homogènes [**2**], que nous rappelons en appendice.

Comme suggéré par le referee, donnons quelques précisions supplémentaires dans le cas de $G = \mathrm{SL}(2, F)$, A_0 étant le tore diagonal.

On s'intéresse aux transformées de Fourier–Whittaker de l'espace $C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)^K$ des fonctions K-invariantes à droite de $C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)$.

On note P le sous-groupe parabolique de G opposé au sous-groupe parabolique standard P_0. On notera aussi P^- au lieu de P_0. Pour χ élément du groupe des caractères non ramifiés de A_0, $X(A_0)$, on note V_χ l'espace de la représentation $\pi_\chi := i^G_P\chi$ et V l'espace de sa réalisation compacte. On note v le vecteur K-invariant de V dont la valeur en l'élément neutre de G est égale à 1 et v_χ l'élément correspondant de V_χ. L'espace $\mathrm{Wh}(\chi)$ est égal à $\mathbb{C}$. Avec les notations du début de l'introduction soit $\xi_\chi := \xi(P, \chi, 1) \in \mathrm{Wh}(\pi_\chi)$ où $1 \in \mathbb{C} = \mathrm{Wh}(\chi)$ et soit E_χ le coefficient généralisé c_{ξ_χ, v_χ}. La transformée de Fourier–Whittaker de $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)^K$ est entièrement déterminée par la fonction polynomiale sur $X(A_0)$, F, définie par :

$$F(\chi) := \int_{U_0\backslash G} f(g)\overline{E_\chi(g)}\,\mathrm{d}g.$$

On notera parfois $\hat{f}$ au lieu de F.

Soit w un représentant dans K de l'élément non trivial du groupe de Weyl de A_0. On a $w\chi = \chi^{-1}$. Par transport de structure, les intégrales d'entrelacement déterminent un opérateur d'entrelacement $A(w, \chi)$ entre π_χ et $\pi_{\chi^{-1}}$.

On définit une fonction rationnelle sur $X(A_0)$, a (respectivement b), à valeurs complexes, par les égalités :

$$A(w, \chi)v_\chi = a(\chi)v_{\chi^{-1}}, \qquad \xi_{\chi^{-1}} \circ A(w, \chi) = b(\chi)\xi_\chi.$$

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

On en déduit l'égalité de fonctions rationnelles sur $X(A_0)$, dite équation fonctionnelle pour E_χ :

$$a(\chi)E_{\chi^{-1}}(g) = b(\chi)E_\chi(g), \quad g \in G.$$

Utilisant l'entrelacement donné à l'aide de w entre $i_P^G\chi$ et $i_{P^-}^G\chi^{-1}$, on a les égalités :

$$\left.\begin{aligned} B(P,P^-,\chi) &= b(\chi), & B(P^-,P,\chi) &= b(\chi^{-1}),\\ A(P^-,P,\chi)v &= a(\chi)v, & A(P,P^-,\chi)v &= a(\chi^{-1})v, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

les dernières étant écrites dans la réalisation compacte.

Par ailleurs, les fonctions a et b satisfont les relations, pour χ unitaire :

$$a(\chi) = \overline{a(\chi^{-1})}, \qquad b(\chi) = \overline{b(\chi^{-1})},$$

la deuxième étant corollaire de notre étude du produit scalaire de paquets d'ondes (voir Théorème 5). Grâce à ses relations et à l'équation fonctionnelle pour E_χ, on montre aisément l'identité de fonctions rationnelles sur $X(A_0)$:

$$a(\chi)F(\chi) = b(\chi)F(\chi^{-1}). \tag{1.3}$$

On va voir que si F est une fonction polynomiale sur $X(A_0)$ qui vérifie cette relation, elle provient de la transformée de Fourier–Whittaker d'un élément f de $C_c^\infty(U_0\backslash G,\psi)^K$. Le résultat d'Heiermann mentionné plus haut signifie ici qu'il existe une fonction, ζ, polynomiale sur $X(A_0)$ telle que l'on ait l'identité :

$$a(\chi^{-1})\zeta(\chi) + a(\chi)\zeta(\chi^{-1}) = 1. \tag{1.4}$$

On note $\mathrm{d}\chi$ la mesure invariante de masse totale 1 sur le groupe $X(A_0)_\mathrm{u}$ des caractères unitaires non ramifiés de A_0. Si $\Lambda \in X(A_0)$, on en déduit une mesure sur $X(A_0)_\mathrm{u}\Lambda$. On fixe un tel Λ suffisamment P-antidominant. On définit

$$\Phi(\chi) := a(\chi)^{-1}\zeta(\chi)F(\chi), \qquad f_\Phi(g) := \int_{X(A_0)_\mathrm{u}\Lambda} \Phi(\chi)E_\chi(g)\,\mathrm{d}\chi, \quad g \in G.$$

Indiquons sommairement pourquoi $f_\Phi \in C_c^\infty(U_0\backslash G,\psi)$ et que F provient de f_Φ. Comme f_Φ est K-invariante et que $G = U_0A_0K$, il suffit, pour montrer qu'elle est à support compact modulo U_0, de voir que sa restriction à A_0 est à support compact. D'après des propriétés générales des fonctions de Whittaker, $f_\Phi(a_0) = 0$ pour $a_0 \in A_0$ suffisamment P_0-dominant. Il reste à voir que, pour a_0 suffisamment P_0-antidominant, $f_\Phi(a_0) = 0$. Pour un tel a_0, $E_\chi(a_0)$ est égal à son terme constant. Le calcul de celui-ci (voir Proposition 6) et les relations (1.2) conduisent à l'égalité :

$$E_\chi(a_0) = b(\chi)\chi(a_0) + a(\chi)\chi^{-1}(a_0),$$

de sorte que, tenant compte de la définition de Φ, on a

$$f_\Phi(a_0) = \int_{\Lambda X(A_0)_\mathrm{u}} b(\chi)a(\chi)^{-1}\zeta(\chi)F(\chi)\chi(a_0)\,\mathrm{d}\chi + \int_{\Lambda X(A_0)_\mathrm{u}} \zeta(\chi)F(\chi)\chi^{-1}(a_0)\,\mathrm{d}\chi.$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Comme Λ a été supposé suffisamment P-antidominant, un déplacement de contour est possible sans rencontrer de pôles pour le premier terme du membre de droite. Alors pour a_0 suffisamment P_0-antidominant, on en déduit, par un passage à la limite, que ce premier terme est nul. Pour le deuxième, on intègre une fonction polynomiale, de sorte qu'on peut déplacer le contour et se ramener à intégrer sur $X(A_0)_{\mathrm{u}}$. En utilisant le fait que la transformée de Fourier d'une fonction polynomiale sur $X(A_0)$ est à support compact, on voit encore que pour a_0 suffisamment P_0-antidominant, ce deuxième terme est nul. Ainsi f_Φ est bien à support compact.

Etudions la transformée de Fourier–Whittaker de f_Φ et notons F_1 la fonction polynomiale sur $X(A_0)$ associée à celle-ci comme ci-dessus. D'abord tenant compte du fait que f_Φ est à support compact modulo U_0, le calcul se ramène, par l'utilisation du centre de Bernstein au cas où Φ est polynomiale. Alors on peut se ramener à une intégrale sur $X(A_0)_{\mathrm{u}}$ dans la définition de f_Φ. Le calcul de la transformée de Fourier–Whittaker est alors très semblable à un calcul de Waldspurger dans sa preuve de la formule de Plancherel pour les groupes [**25**], grâce à notre introduction des sous-groupes paraboliques semi-standard. Tenant compte des relations (1.2), on trouve (voir Théorème 5) :

$$F_1(\chi) = a(\chi)a(\chi^{-1})\Phi(\chi) + a(\chi^{-1})b(\chi)\Phi(\chi^{-1}).$$

Soit encore, en tenant compte de la définition de Φ :

$$\hat{f}_\Phi = a(\chi^{-1})\zeta(\chi)F(\chi) + b(\chi)\zeta(\chi^{-1})F(\chi^{-1}).$$

Tenant compte de (1.3), puis de la relation (1.4), on trouve finalement $F = F_1$.

Le traitement de ce cas particulier nous a conduit à une reformulation du théorème principal ne faisant intervenir que les sous-groupes paraboliques anti-standard (voir le corollaire du Théorème 2).

Les sous-groupes paraboliques semi-standard sont utilisés dans les démonstrations qui sont de ce fait proches des preuves de Waldspurger pour la formule de Plancherel d'Harish-Chandra pour les groupes (voir [**25**]).

Outre le résultat principal, l'un des intérêts de ce travail est l'adaptation des techniques de [**25**] aux fonctions de Whittaker. Au delà, il offre un cadre pour l'étude de l'analyse harmonique sur des espaces homogènes comme les espaces symétriques (voir par exemple [**13**] pour le cas réel). Concernant ceux-ci, le calcul du terme constant des intégrales d'Eisenstein semble être l'un des obstacles majeurs à surmonter.

Nous avons également inclus (voir Théorème 9) une réponse positive à une conjecture de Lapid et Mao (voir [**17**, Conjecture 3.5]) sur le spectre discret des fonctions de Whittaker. Matringe (voir [**18**, Corollaire 3.1]), a obtenu indépendamment une réponse positive à cette conjecture pour certains groupes. Nous avons obtenu un analogue de cette conjecture de Lapid et Mao pour les représentations cuspidales (voir Théorème 10).

2. Notations, définitions

2.1.

Voici un système de notations emprunté à [**25**] et [**1**]. Soit F un corps local non archimédien. On considère divers groupes algébriques définis sur F et on utilisera des

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

abus de terminologie du type suivant : « soit A un tore déployé » signifiera « soit A le groupe des points sur F d'un tore défini et déployé sur F ». Avec ces conventions, soit G un groupe algébrique linéaire réductif et connexe. On fixe un tore déployé maximal, A_0, de G et on note M_0 son centralisateur dans G. On fixe P_0 un sous-groupe parabolique minimal de G qui admet M_0 comme sous-groupe de Lévi. On notera U_0 le radical unipotent de P_0.

Si P est un sous-groupe parabolique de G, on dit que P est semi-standard (respectivement standard) si $M_0 \subset P$ (respectivement $P_0 \subset P$). Si P est semi-standard, il possède un unique sous-groupe de Lévi, M, contenant M_0. On dit que M est un sous-groupe de Lévi semi-standard.

L'expression « $P = MU$ est un sous-groupe parabolique semi-standard de G » signifiera que P est un tel sous-groupe, que M est son sous-groupe de Lévi semi-standard et que U est son radical unipotent. On notera $P^- = MU^-$ le sous-groupe parabolique opposé à P de sous-groupe de Lévi M. Un sous-groupe parabolique semi-standard de G, P, sera dit anti-standard si P^- est standard.

Si H est un groupe algébrique, on note $\mathrm{Rat}(H)$ le groupe des caractères algébriques de H définis sur F.

Si V est un espace vectoriel, on note V' son dual et, s'il est réel, on note $V_{\mathbb{C}}$ son complexifié.

On note A_G le plus grand tore déployé dans le centre de G. On note $\mathfrak{a}_G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathrm{Rat}(G), \mathbb{R})$. La restriction des caractères algébriques de G à A_G induit un isomorphisme :

$$\mathrm{Rat}(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} \simeq \mathrm{Rat}(A_G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}. \tag{2.1}$$

On dispose de l'application canonique :

$$H_G \colon G \to \mathfrak{a}_G, \tag{2.2}$$

définie par :

$$\mathrm{e}^{\langle H_G(x), \chi \rangle} = |\chi(x)|_F, \quad x \in G,\ \chi \in \mathrm{Rat}(G), \tag{2.3}$$

où $|\cdot|_F$ est la valuation normalisée de F. Le noyau de H_G, qui est noté G^1, est l'intersection des noyaux des caractères de G de la forme $|\chi|_F$, $\chi \in \mathrm{Rat}(G)$. On notera $X(G) = \mathrm{Hom}(G/G^1, \mathbb{C}^*)$. C'est le groupe des caractères non ramifiés de G.

On a des notations similaires pour des sous-groupes de Lévi semi-standard. Si P est un sous-groupe parabolique semi-standard de G, on notera $\mathfrak{a}_P = \mathfrak{a}_{M_P}$, $H_P = H_{M_P}$. On note $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_{M_0}$, $H_0 = H_{M_0}$. On note $\mathfrak{a}_{G,F}$, respectivement $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F}$, l'image de G, respectivement A_G, par H_G. Alors G/G^1 est un réseau isomorphe à $\mathfrak{a}_{G,F}$. Soit M un sous-groupe de Lévi semi-standard. Alors les inclusions $A_G \subset A_M \subset M \subset G$ déterminent un morphisme surjectif $\mathfrak{a}_{M,F} \to \mathfrak{a}_{G,F}$, respectivement un morphisme injectif $\tilde{\mathfrak{a}}_{G,F} \to \tilde{\mathfrak{a}}_{M,F}$, qui se prolonge de manière unique en une application linéaire surjective entre $\mathfrak{a}_M$ et $\mathfrak{a}_G$, respectivement injective entre $\mathfrak{a}_G$ et $\mathfrak{a}_M$. La deuxième application permet d'identifier $\mathfrak{a}_G$ à un sous-espace de $\mathfrak{a}_M$ et le noyau de la première, $\mathfrak{a}_M^G$, vérifie :

$$\mathfrak{a}_M = \mathfrak{a}_M^G \oplus \mathfrak{a}_G. \tag{2.4}$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard. On note $\Sigma(A_M)$ (respectivement $\Sigma(P)$) l'ensemble des racines de A_M dans l'algèbre de Lie de G (respectivement P) qui s'identifie à un sous-ensemble de $\mathfrak{a}'_M$. On note $\Delta(P)$ l'ensemble des racines simples de $\Sigma(P)$. Si $\alpha \in \Sigma(A_M)$, on note U_α le sous-groupe radiciel de U correspondant à α. On peut associer à tout $\alpha \in \Sigma(A_M)$ une coracine $\check{\alpha} \in \mathfrak{a}_M$ (voir [**1**, § 3]).

(2.5) *Soit $\lambda \mapsto \chi_\lambda$ l'application $(\mathfrak{a}'_G)_{\mathbb{C}} \to X(G) \to 1$ qui, en utilisant la définition de $\mathfrak{a}_G$ dans (1.1) avec* $\mathrm{Rat}(G)$, *associe à $\chi \otimes s$, le caractère $g \mapsto |\chi(g)|^s$.*

Le noyau est un réseau et cela définit sur $X(G)$ une structure de variété algébrique complexe pour laquelle $X(G) \simeq \mathbb{C}^{*d}$, où $d = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_G$. Pour $\chi \in X(G)$, soit $\lambda \in \mathfrak{a}'_{G,\mathbb{C}}$ un élément se projetant sur χ par l'application (2.5). La partie réelle $\mathrm{Re}\,\lambda \in \mathfrak{a}'_G$ est indépendante du choix de λ. Nous la noterons $\mathrm{Re}\,\chi$. Si $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^*)$, le caractère $|\chi|$ appartient à $X(G)$. On pose $\mathrm{Re}\,\chi = \mathrm{Re}\,|\chi|$. De même, si $\chi \in \mathrm{Hom}(A_G, \mathbb{C}^*)$, le caractère $|\chi|$ se prolonge de façon unique en un élément de $X(G)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{*+}$, que l'on note encore $|\chi|$ et on pose $\mathrm{Re}\,\chi = \mathrm{Re}\,|\chi|$.

Soit $X(G)_{\mathrm{u}} := \{\chi \in X(G) \mid \mathrm{Re}\,\chi = 0\}$ l'ensemble des éléments unitaires de $X(G)$.

Les notations ainsi définies s'appliquent à tous les sous-groupes de Lévi semi-standard de G.

On choisit K un sous-groupe compact maximal de G, dont on suppose qu'il est le fixateur d'un point spécial de l'appartement associé à A_0 dans l'immeuble de G. Pour le résultat suivant, voir [**9**, Proposition 1.4.4].

(2.6) *Il existe une suite décroissante de sous-groupes compacts ouverts de G, K_n, $n \in \mathbb{N}$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H = H_n$ est normal dans $K = H_0$ et pour tout sous-groupe parabolique standard de G, P, on a :*

(1) *$H = H_{U^-} H_M H_U$ où $H_{U^-} = H \cap U^-$, $H_M = H \cap M$, $H_U = H \cap U$.*

(2) *Pour tout $a \in A_M^- := \{a \in A_M \mid |\alpha(a)|_F \leqslant 1,\ \alpha \in \Sigma(P)\}$, $aH_U a^{-1} \subset H_U$, $a^{-1} H_{U^-} a \subset H_{U^-}$.*

(3) *Le groupe H_M vérifie (1) et (2) relativement aux sous-groupes paraboliques de M contenant $P_0 \cap M$.*

(4) *La suite H_n forme une base de voisinages de l'identité de l'élément neutre de G.*

On dit que H possède une factorisation d' Iwahori par rapport à (P, P^-) si (1) et (2) sont satisfaits.

2.2. Choix de mesures

On munit G d'une mesure de Haar, $\mathrm{d}g$. Pour tout sous-groupe fermé, H, de G, on note $\mathrm{d}h$ une mesure de Haar à gauche sur H, dont le choix sera éventuellement spécifié et on note δ_H la fonction module de H. Si K est un sous-groupe compact maximal de G, on le munit de la mesure de Haar de masse totale 1.

Pour tout espace totalement discontinu Z, on note $C_{\mathrm{c}}^\infty(Z)$ (respectivement $C(Z)$, respectivement $C_{\mathrm{c}}(Z)$) l'espace des fonctions localement constantes, à support compact

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

(respectivement continues, respectivement continues à support compact) sur Z à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Alors $G = PK$ et le groupe $M \cap K$ vérifie relativement à M les mêmes propriétés que K relativement à G. Pour $g \in G$, on choisit $u_P(g) \in U$, $m_P(g) \in M$, $k_P(g) \in K$, de sorte que $g = u_P(g)m_P(g)k_P(g)$. On note $\mathrm{d}u^-$ la mesure de Haar sur U^- telle que :

$$\int_{U^-} \delta_P(m_P(u^-))\,\mathrm{d}u^- = 1 \tag{2.7}$$

et de même pour U. On note $\mathrm{d}k$ la mesure de Haar sur K de masse totale 1. Il existe une unique mesure de Haar sur M, $\mathrm{d}m$, telle que pour tout $f \in C_c(G)$ on a (voir [**25**, I (1.2)]) :

$$\left.\begin{aligned} \int_G f(g)\,\mathrm{d}g &= \int_{U\times M\times K} f(umk)\delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}u, \\ \int_G f(g)\,\mathrm{d}g &= \int_{U\times M\times U^-} f(umu^-)\delta_P(m)^{-1}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}u^-. \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

Soit f une fonction continue sur K et invariante à gauche par $K \cap P$. Alors (voir par exemple [**16**, Chapitre V, § 6, Conséquence 7], pour la version réelle) :

$$\int_K f(k)\,\mathrm{d}k = \int_{U^-} f(k_P(u^-))\delta_P(m_P(u^-))\,\mathrm{d}u^-, \tag{2.9}$$

où l'intégrale du membre de droite est absolument convergente. En particulier si f est une fonction continue sur G telle que $f(umg) = \delta_P(m)f(g)$, $u \in U$, $m \in M$, $g \in G$,

$$\int_K f(k)\,\mathrm{d}k = \int_{U^-} f(u^-)\,\mathrm{d}u^-, \tag{2.10}$$

où l'intégrale du membre de droite est absolument convergente.

On fixe la mesure de Haar de mase totale 1 sur $A_G \cap K$ et sur $X(A_G)_{\mathrm{u}}$, qui s'identifie au dual unitaire de $A_G/A_G \cap K$. On fixe sur $A_G/A_G \cap K$ la mesure de Haar duale de celle sur $X(A_G)_{\mathrm{u}}$. Des mesures ainsi choisies, on déduit une mesure sur A_G, notée da_G. L'homomorphisme de restriction détermine un morphisme surjectif de $X(G)_{\mathrm{u}}$ sur $X(A_G)_{\mathrm{u}}$. On fixe sur $X(G)_{\mathrm{u}}$ une mesure de Haar telle que ce morphisme préserve localement les mesures de Haar choisies.

On choisit un ensemble de représentants dans K, W^G, du quotient du normalisateur de M_0 dans G par son centralisateur, $\bar{W}^G$, qui existe parce que K est le fixateur d'un point spécial de l'appartement associé à A_0. On le choisit de telle sorte qu'il contienne l'élément neutre de G, qu'on notera 1_G ou seulement 1 s'il n'y a pas de confusion.

(2.11) *Si $x \in G$ et Y est une partie de G, on notera $x.Y := \{xyx^{-1} \mid y \in Y\}$. De même si H est un sous-groupe de G, et (σ, E) est une représentation de H, on notera $x\sigma$ la représentation de $x.H$ dans $xE := E$ définie par $x\sigma(xhx^{-1}) = \sigma(h)$, $h \in H$.*

On rappelle que le dual d'un espace vectoriel V est noté V'. Si T est une application linéaire entre deux espaces vectoriels complexes, on note T^{t} sa transposée. Si (σ, E)

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

est une représentation de H, on note σ' la représentation de H dans E' définie par $\sigma'(h) = \sigma(h^{-1})^{\mathrm{t}}$, $h \in H$.

Pour toute application définie sur H, f, on note :

$$(\lambda(h)f)(h') = f(h^{-1}h'), \quad (\rho(h)f)(h') = f(h'h), \quad h, h' \in H.$$

2.3. Représentations induites

Les représentations lisses de G et de ses sous-groupes fermés seront toujours à coefficients complexes.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. Si (σ, E) est une représentation lisse de M, on l'étend en une représentation de P triviale sur U. Soit $\chi \in X(M)$. On note E_χ l'espace de la représentation $\sigma \otimes \chi$, qu'on notera σ_χ, et on note $i_P^G E_\chi$ l'espace des fonctions v de G dans E, invariantes à droite par un sous-groupe compact ouvert de G et telles que $v(mug) = \delta_P(m)^{1/2}\sigma_\chi(m)f(g)$ pour tout $m \in M$, $u \in U$, $g \in G$. On note $i_P^G(\sigma_\chi)$ la représentation de G dans $i_P^G E_\chi$ par translations à droite. On note $i_{P\cap K}^K E$ l'espace des fonctions v de K dans E, invariantes à droite par un sous-groupe compact ouvert de K et telles que $f(pk) = \sigma(p)f(k)$ pour tout $k \in K$ et $p \in P \cap K$. La restriction des fonctions à K détermine un isomorphisme de $i_P^G E_\chi$ sur $i_{P\cap K}^K E$. On notera $\bar{\imath}_P^G(\sigma_\chi)$ la représentation de G dans $i_{P\cap K}^K E$ déduite de $i_P^G(\sigma_\chi)$ par transport de structure. Cette représentation sera appelée la réalisation compacte de $i_P^G(\sigma_\chi)$ dans cet espace indépendant de χ. Si $v \in i_{P\cap K}^K E$, on note v_χ l'élément de $i_P^G E_\chi$ dont la restriction à K est égale à v.

Si σ est unitaire, on munit $i_{P\cap K}^K E$ du produit scalaire défini par :

$$(v, v') = \int_K (v(k), v'(k))\,\mathrm{d}k, \quad v, v' \in i_{P\cap K}^K E. \tag{2.12}$$

Alors, muni de ce produit scalaire, la représentation $\bar{\imath}_P^G(\sigma_\chi)$ est unitaire pour χ unitaire et par conséquent, par transport de structure, $i_P^G(\sigma_\chi)$ également. On a alors, grâce à (2.10) :

$$(v_\chi, v'_\chi) = \int_{U^-} (v_\chi(u^-), v'_\chi(u^-))\,\mathrm{d}u^-. \tag{2.13}$$

Soit $H \subset H'$ deux sous-groupe fermés de G. Soit (θ, V) une représentation de H. On note $\mathrm{ind}_H^{H'}\theta$ la représentation de H' par représentation régulière droite dans l'espace $\mathrm{ind}_H^{H'} V$ des fonctions v de H' dans V, invariantes à droite par un sous-groupe compact ouvert de H', à support compact modulo H, et telles que $v(hh') = \theta(h)v(h')$ pour tout $h \in H$ et $h' \in H'$.

On remarque que :

(2.14) *si $(\chi, \mathbb{C}_\chi)$ est une représentation lisse de dimension 1 de H', $(\mathrm{ind}_H^{H'}\theta) \otimes \chi$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{ind}_H^{H'}(\theta \otimes \chi_{|H})$, l'entrelacement étant donné par $v \mapsto \chi v$, $v \in \mathrm{ind}_H^{H'} V$.*

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

On note $H_0(H,V)$ le quotient de V par le sous-espace engendré par l'ensemble des $\rho(h)v - v$, $h \in H$, $v \in V$. D'après [**6**, Lemme 1.11], on a :

(2.15) *si H est union de sous-groupes compacts, le foncteur qui à V associe $H_0(H,V)$ est exact.*

On note $\mathbb{C}_{\delta_{H'}\delta_H^{-1}}$ le H-module de dimension 1 donné par $\delta_{H'}\delta_H^{-1}$. Alors, (voir [**6**, Lemme 1.14 et Proposition 1.15], où, dans la preuve et les énoncés, les fonctions modules se sont égarées) :

(2.16) *$H_0(H', \mathrm{ind}_H^{H'} V)$ est naturellement isomorphe à $H_0(H, V \otimes \mathbb{C}_{\delta_{H'}\delta_H^{-1}})$.*

Explicitons l'isomorphisme, en supposant en outre H et H' unimodulaires, ce qui suffira à nos besoins. Si $v \in V$ on note $p(v)$ son image dans $H_0(H,V)$. Si $v \in \mathrm{ind}_H^{H'} V$, l'application de H' dans $H_0(H,V)$, $h' \mapsto p(v(h'))$ passe au quotient en une application localement constante à support compact sur $H\backslash H'$ et l'on a la propriété suivante.

(2.17) *L'application*

$$v \mapsto \int_{H\backslash H'} p(v(h'))\,\mathrm{d}h'$$

de $\mathrm{ind}_H^{H'} V$ dans $H_0(H,V)$ passe au quotient en un isomorphisme de $H_0(H', \mathrm{ind}_H^{H'} V)$ avec $H_0(H,V)$.

On remarque que, avec les notations précédentes :

$$i_P^G \sigma = \mathrm{ind}_P^G(\sigma \otimes \delta_P^{1/2}). \tag{2.18}$$

2.4. Fonctions dépendant de représentations

Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G (respectivement lisse unitaire irréductible). On rappelle que si $\chi \in X(G)$, π_χ désigne la représentation $\pi \otimes \chi$. On notera $[(\pi, V)]$, ou simplement $[\pi]$, la classe d'équivalence de π. Soit $\mathcal{O} = \{[\pi_\chi] \mid \chi \in X(G)\}$ (respectivement $\mathcal{O}_\mathrm{u} = \{[\pi_\chi] \mid \chi \in X(G)_\mathrm{u}\}$. Les orbites inertielles (respectivement orbites inertielles unitaires) de représentations lisses irréductibles (respectivement unitaires irréductibles) sont par définition les ensembles du type $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{O}_\mathrm{u}$).

On note $\mathcal{C}$ (respectivement $\mathcal{C}_\mathrm{u}$) la catégorie dont les objets sont les représentations lisses (respectivement représentations lisses unitaires) de G équivalentes à l'une des représentations π_χ, $\chi \in X(G)$ (respectivement $X(G)_\mathrm{u}$) et dont les flèches sont les entrelacements bijectifs (respectivement entrelacements unitaires). On appellera, par abus de langage, objet de $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{O}_\mathrm{u}$) les objets de $\mathcal{C}$ (respectivement $\mathcal{C}_\mathrm{u}$).

On veut définir les « fonctions sur $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{O}_\mathrm{u}$) », relativement à un foncteur Ψ entre $\mathcal{C}$ (respectivement $\mathcal{C}_\mathrm{u}$) et la catégorie des espaces vectoriels. Commençons par donner une définition formelle, avant de lui donner un sens plus concret.

On note $\mathcal{E}$ la catégorie dont les objets sont les couples (E, e) où E est un espace vectoriel et e est un élément de E, avec les morphismes induits par les morphismes d'espaces vectoriels. Une « fonction sur $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{O}_\mathrm{u}$) », ou « fonction sur $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{O}_\mathrm{u}$) à valeurs dans Ψ » est la donnée d'un foncteur Φ de $\mathcal{C}$ (respectivement

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

$\mathcal{C}_{\mathrm{u}}$) dans $\mathcal{E}$ tel que, pour tout objet π_1 de $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$), $\Phi(\pi_1)$ est de la forme $(\Psi(\pi_1), \phi(\pi_1))$ et tel que, pour tout T morphisme de $\mathcal{C}$ (respectivement $\mathcal{C}_{\mathrm{u}}$), le morphisme $\Phi(T)$ soit induits par $\Psi(T)$. Dans toutes nos applications le foncteur Ψ sera tel que, si T et T' sont des isomorphismes entre deux objets de $\mathcal{C}$ (respectivement $\mathcal{C}_{\mathrm{u}}$), $\Psi(T) = \Psi(T')$. Par exemple, cette propriété est vérifiée pour le foncteur qui à (π_1, V_1) associe $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_1, V_1)$. On suppose cette propriété vérifiée par Ψ dans la suite. Alors si T est un isomorphisme (respectivement entrelacement unitaire) entre π_1 et π_2, on a la relation :

$$\phi(\pi_2) = \Psi(T)\phi(\pi_1). \tag{2.19}$$

On vérifie aisément que la donnée de Φ équivaut à la donnée d'une fonction qui à tout $\chi \in X(G)$ (respectivement $X(G)_{\mathrm{u}}$) associe $f(\pi \otimes \chi) \in \Psi(\pi \otimes \chi)$ telle que si T est un isomorphisme (respectivement entrelacement unitaire) entre $\pi \otimes \chi$ et $\pi \otimes \chi_1$:

$$f(\chi_1) = \Psi(T)f(\chi). \tag{2.20}$$

Malgré son coté très formel, l'intérêt de notre définition est de montrer que $\Phi(\pi_1)$ et $\phi(\pi_1)$ sont définis pour toute représentation π_1 équivalente à l'une des représentations π_χ, $\chi \in X(G)$ (respectivement $\chi \in X(G)_{\mathrm{u}}$).

En pratique on ne définit pas le foncteur Ψ, qui est implicite, mais on définit ϕ ou f et on vérifie la relation (2.19) (respectivement (2.20)). On écrira alors que cette relation définit ϕ comme fonction sur $\mathcal{O}$, ou, si l'on précise Ψ, comme fonction sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans Ψ.

Si pour tout π objet de $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$), l'espace $\Psi(\pi_\chi)$ s'identifie canoniquement à un espace E_π, indépendant de χ. Définissons les fonctions polynomiales à valeur dans Ψ.

(2.21) *La fonction sur* $\mathcal{O}$ (*respectivement* $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$) *à valeurs dans* Ψ, ϕ, *est polynomiale si pour tout* σ *objet de* $\mathcal{O}$ (*respectivement* $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$), *l'application* $\chi \mapsto \phi(\pi_\chi)$, $\chi \in X(G)$ (*respectivement* $X(G)_{\mathrm{u}}$), *est à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de* E_π *et polynomiale* (*respectivement se prolonge en une application polynomiale sur* $X(G)$). *On notera* $\mathrm{Pol}(\mathcal{O}, \Psi)$ (*respectivement* $\mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \Psi)$) *l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur* $\mathcal{O}$ (*respectivement* $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$) *à valeurs dans* Ψ.

On définit de même les applications rationnelles.

3. Terme constant de fonctions de Whittaker

Un homomorphisme, ψ, de U_0 dans $\mathbb{C}^*$ est un caractère lisse non dégénéré, si et seulement si son noyau est ouvert et pour tout α élément de l'ensemble des racines simples de A_0 dans P_0, $\Delta(P_0)$, la restriction de ψ au sous-groupe radiciel $(U_0)_\alpha$ est non triviale. On fixe un tel caractère ψ dans la suite.

Si (π, E) est un module lisse pour U_0, on notera $(\pi_{\psi^{-1}}, E_{\psi^{-1}})$ la représentation $\pi \otimes \psi^{-1}$ de U_0 dans E.

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

On note $C^\infty(U_0\backslash G,\psi)$ l'espace des fonctions f sur G, invariantes à droite par un sous-groupe compact ouvert et telles que $f(ug)=\psi(u)f(g)$ pour $g\in G$, $u\in U_0$. On note $C_c^\infty(U_0\backslash G,\psi)$ le sous-espace de $C^\infty(U_0\backslash G,\psi)$ formé des éléments de $C^\infty(U_0\backslash G,\psi)$ à support compact modulo U_0.

Soit (π,V) une représentation lisse de G. On note $(\check\pi,\check V)$ la représentation de G dans le dual lisse $\check V$ de V. On note (π',V') la représentation contragrédiente de (π,V). On note $\mathrm{Wh}(\pi)$ l'espace des formes linéaires ξ sur V telles que $\pi'(u_0)\xi=\psi^{-1}(u_0)\xi$ pour tout $u_0\in U_0$. En d'autres termes :

$$\mathrm{Wh}(\pi)=(V_{\psi^{-1}})'^{U_0}\quad\text{ou encore}\quad \mathrm{Wh}(\pi)=(H_0(U_0,V\otimes\mathbb{C}_{\psi^{-1}}))',\tag{3.1}$$

où H_0 désigne l'homologie et $\mathbb{C}_{\psi^{-1}}$ désigne l'espace de la représentation de dimension 1 de U_0 donnée par ψ^{-1}. On appelle les éléments de $\mathrm{Wh}(\pi)$ les fonctionnelles de Whittaker de π.

Si $\xi\in\mathrm{Wh}(\pi)$ et $v\in V$, on note $c_{\xi,v}$ le coefficient généralisé défini par :

$$c_{\xi,v}(g)=\langle\xi,\pi(g)v\rangle,\quad g\in G.\tag{3.2}$$

Alors $c_{\xi,v}$ est un élément de $C^\infty(U_0\backslash G,\psi)$.

On a le résultat suivant du à Bushnell et Henniart [**8**, Théorème 4.2] (voir [**14**, Théorème 5.7] pour une autre preuve).

(3.3) *Si (π,V) est de longueur finie,* $\mathrm{Wh}(\pi)$ *est de dimension finie.*

Soit H un sous-groupe compact ouvert de G. On note e_H la mesure de Haar normalisée de H, qu'on regarde comme un élément de l'algèbre de Hecke de G. On fera dans cette partie référence à [**14**]. Il faut toutefois tenir compte, à chaque fois, de notre changement de point de vue : relations de covariance à gauche et action à droite dans l'induction. On note, pour $\varepsilon>0$,

$$A_0^-(\varepsilon):=\{a\in A_0\mid |\alpha(a)|_F\leqslant\varepsilon,\ \alpha\in\Delta(P_0)\}\quad\text{et}\quad A_0^-=A_0^-(1).$$

Comme dans [**14**, Lemme 3.1], on établit la propriété suivante.

(3.4) *Pour tout sous-groupe compact ouvert H de G, il existe un sous-groupe compact ouvert H' tel que pour toute représentation lisse de G, (π,V), tout $\xi\in\mathrm{Wh}(\pi)$ et tout $v\in V^H$ on ait :*

$$\langle\xi,\pi(a)v\rangle=\langle e_{H'}\xi,\pi(a)v\rangle,\quad a\in A_0^-$$

où $e_{H'}\xi$ est l'élément de $\check V$ définit par $\langle e_{H'}\xi,v\rangle:=\langle\xi,\pi(e_{H'})v\rangle$, $v\in V$.

En effet prenons H' comme dans (2.6), contenu dans H avec $H'_{U_0}\subset\operatorname{Ker}\psi$. Soit $h'\in H'$. On écrit $h'=umu^-$ avec $u\in H'_{U_0}$, $u^-\in H'_{U_0^-}$, $m\in H'_{M_0}$. Alors

$$\langle\xi,\pi(h'a)v\rangle=\langle\xi,\pi(ama^{-1}u^-a)v\rangle.$$

Mais $a^{-1}\in A_0^+$ normalise $H'_{U_0^-}$ et H' fixe v. Donc

$$\langle\xi,\pi(h'a)v\rangle=\langle\xi,\pi(a)v\rangle,\quad h'\in H',\ a\in A_0^-.$$

Ce qui prouve (3.4).

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

On rappelle (voir [**14**, Lemme 5.4]) la propriété suivante.

(3.5) *Soit H un sous-groupe compact ouvert de G. Il existe $C > 0$ tel que, pour tout $f \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$, invariante à droite par H, $f(a) = 0$ si $|a^\alpha|_F > C$ pour au moins un élément α de $\Delta(P_0)$, i.e. pour a élément du complémentaire de $A_0^-(C)$.*

Rappelons la caractérisation du terme constant des éléments de $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ et des fonctionnelles de Whittaker. Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique standard de G. Avec les notations ci-dessus, on note (π_P, V_P) le produit tensoriel entre, d'une part la représentation de M dans le quotient de V par le M-sous-module engendré par les $\pi(u)v - v$, $u \in U$, $v \in V$, et d'autre part la représentation de M sur $\mathbb{C}$ donnée par $\delta_P^{-1/2}$. On appelle (π_P, V_P) module de Jacquet normalisé de V relatif à P. On note, pour $v \in V$, $j_P(v)$ ou v_P sa projection naturelle dans V_P.

Soit Θ_P l'ensemble des éléments de $\Delta(P_0)$ qui sont racines de A_0 dans l'algèbre de Lie de M. On note, pour $\varepsilon > 0$:

$$A_0^-(P, {<}\varepsilon) := \{a \in A_0^- \mid |\alpha(a)|_F < \varepsilon,\ \alpha \in \Delta(P_0) \setminus \Theta_P\}.$$

D'après [**14**, Théorème 3.4, Remarque 3.5 et Proposition 3.6], on dispose d'une unique application linéaire $\mathrm{Wh}(\pi) \mapsto \mathrm{Wh}(\pi_P)$, $\xi \to j_{P^-}(\xi)$, notée aussi $\xi \mapsto \xi_P$ pour plus de commodité, qui vérifie la propriété suivante.

(3.6) *Pour tout sous-groupe compact ouvert H de G, il existe $\varepsilon_H > 0$, indépendant de P, avec les propriétés suivantes.*

Pour toute représentation lisse (π, V) et $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$, on a :

$$\delta_P^{1/2}(a)\langle \xi_P, \pi_P(a)v_P\rangle_P = \langle \xi, \pi(a)v\rangle, \quad a \in A_0^-(P, {<}\varepsilon_H),\ v \in V^H.$$

Le terme constant le long de P d'un élément f de $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ a été défini dans [**14**, Définition 3]. C'est un élément f_P de $C^\infty(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$. Il vérifie, pour tout f invariant à droite par un sous-groupe compact ouvert H de G :

$$\delta_P^{1/2}(a) f_P(a) = f(a), \quad a \in A_0^-(P, {<}\varepsilon_H). \tag{3.7}$$

(3.8) *L'application $f \mapsto f_P$ est un morphisme de P-modules entre $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ et $C^\infty(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$, où P agit par représentation régulière droite sur le premier espace et M (respectivement U) agit par représentation régulière droite tensorisée par $\delta_P^{1/2}$(respectivement trivialement) sur le second.*

Soit (π, V) une représentation lisse de G et $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$. Avec les notations de (3.2), on a :

$$(c_{\xi,v})_P = c_{\xi_P, v_P}, \quad v \in V. \tag{3.9}$$

Lemme 1.

(i) *Si (π, V) est une représentation lisse cuspidale de G, pour tout $v \in V$, le coefficient généralisé $c_{\xi,v}$ est à support compact modulo l'action à gauche de $U_0 A_G$ sur G.*

(ii) *On suppose ici ψ unitaire. Si (π, V) est une représentation lisse et unitaire de G et $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$, pour tout $v \in V$, le coefficient généralisé $c_{\xi,v}$ est borné en module sur G.*

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Démonstration. La partie (i) est donnée par [**14**, Théorème 4.4 (ii)].

(ii) L'égalité $G = P_0K$ montre qu'il existe un ensemble fini, I, d'éléments de G tel que $G = U_0A_0IK$. Pour démontrer (i), il suffit donc de montrer que pour tout $v \in V$, $c_{\xi,v}$ est borné sur A_0. Mais si $a_0 \in A_0$,

$$c_{\xi,v}(a_0a) = c_{\xi,\pi(a_0)v}(a), \quad a \in A_0.$$

Tenant compte de (3.5), on voit que pour a_0 bien choisi, $c_{\xi,\pi(a_0)v}$ est nul sur $A_0 \setminus A_0^-$. Ainsi, on est réduit à prouver que pour tout $v \in V$, $c_{\xi,v}$ est borné sur A_0^-. Mais cela résulte de (3.4) et du fait que tout coefficient d'une représentation unitaire est borné. □

4. Fonctionnelles et intégrales de Jacquet

4.1. Sous-groupes paraboliques anti-standard

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G. Soit (σ, E) une représentation lisse de M. On rappelle que pour $\chi \in X(M)$, la représentation (σ_χ, E_χ) désigne la représentation $(\sigma \otimes \chi, E)$ de M. On note $B(M)$ ou B, l'algèbre des fonctions régulières sur $X(M)$: c'est l'algèbre de fonctions sur $X(M)$ engendrée par les applications b_m, $m \in M$, définies par $b_m(\chi) := \chi(m)$, $\chi \in X(M)$. On définit également une structure de (M, B)-module sur $E_B = E \otimes B$ en faisant agir B par multiplication sur le deuxième facteur et $m \in M$ par le produit tensoriel de $\sigma(m)$ avec la multiplication par l'élément b_m de B.

Soit encore :

$$\sigma_B(m)(e \otimes b) = (\sigma(m)e) \otimes b_mb, \quad e \in E,\ b \in B.$$

On étend l'action de M à P en la prenant triviale sur U.

On notera $\bullet$ à la place de χ ou B. On considère $(i_P^G\sigma_\bullet, i_P^GE_\bullet)$ On notera aussi $I_\bullet$ au lieu de $i_P^GE_\bullet$ qui est un (G, B)-module.

Les points (i) à (iv) du théorème suivant sont dus à Rodier [**20**] et Casselman et Shalika [**10**] (voir aussi [**23**, Proposition 3.1]). Nous en donnons une preuve qui permet de montrer la polynomialité du point (v).

Théorème 1.

(i) *On note $J_\bullet = \{v \in I_\bullet \mid v$ est à support contenu dans $PU_0\}$ qui est un sous-U_0-module lisse de $I_\bullet$. Alors $H_0(U_0, J_\bullet \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}})$ est naturellement isomorphe à $H_0(M \cap U_0, E \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}})$ si $\bullet$ est égal à χ, et à $H_0(M \cap U_0, E \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}}) \otimes B$ comme B-module si $\bullet$ est égal à B.*

(ii) *Passant au dual, cela détermine un isomorphisme entre* $\mathrm{Wh}(\sigma)$ *et* $\mathrm{Wh}(J_\chi)$, $\eta \mapsto \xi^0(P, \sigma_\chi, \eta)$.

La restriction des éléments de J_χ à U_0 sont à support compact modulo $U_0 \cap M$. Alors on a :

$$\langle \xi^0(P, \sigma_\chi, \eta), v\rangle = \int_{U^-} \langle \eta, v(u^-)\rangle \psi(u^-)^{-1}\,\mathrm{d}u^-, \quad v \in J_\chi.$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

(iii) *L'injection naturelle de $J_\bullet$ dans $I_\bullet$ détermine un isomorphisme :*

$$H_0(U_0, J_\bullet \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}}) \simeq H_0(U_0, I_\bullet \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}}).$$

(iv) *Passant aux duaux dans (iii) et tenant compte de (ii), on dispose d'un isomorphisme :*

$$\mathrm{Wh}(\sigma) \to \mathrm{Wh}(i_P^G \sigma_\chi)$$

qu'on note :

$$\eta \mapsto \xi(P, \sigma_\chi, \eta).$$

La restriction de $\xi(P, \sigma_\chi, \eta)$ à J_χ est égale à $\xi^0(P, \sigma_\chi, \eta)$ et elle détermine entièrement $\xi(P, \sigma_\chi, \eta)$.

(v) *On dispose de la réalisation compacte de $i_P^G \sigma_\chi$ dans un espace indépendant de χ, I. On note $\bar{\xi}(P, \sigma_\chi, \eta)$ la forme linéaire obtenue sur I déduite de $\xi(P, \sigma_\chi, \eta)$ par transport de structure. Alors pour tout $v \in I$, l'application $\chi \mapsto \langle \bar{\xi}(P, \sigma_\chi, \eta), v \rangle$ est une fonction polynomiale sur $X(M)$, i.e. un élément de B. En d'autres termes, pour tout $v \in I$, notant pour $\chi \in X(M)$, v_χ l'élément de I_χ dont la restriction à K est égale à v, l'application $\chi \mapsto \langle \xi(P, \sigma_\chi, \eta), v_\chi \rangle$ définit un élément de B.*

Démonstration. On commence par étudier $I_\bullet$ comme U_0-module. D'après la décomposition de Bruhat, il n'y a qu'un un nombre fini de (P, U_0)-doubles classes et on peut choisir un ensemble de représentants de celles-ci dans W^G, $\Omega = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, contenant 1. On introduit les ensembles $O_0 = PU_0 \subset O_1 \subset \cdots \subset O_n = G$ tels que $O_{i+1} \backslash O_i = Px_{i+1}U_0$. Un bon choix de l'ordre des x_i permet de supposer les O_i ouverts. On note $I_i = \{v \in I_\bullet \mid \operatorname{supp} v \subset O_i\}$ de sorte que $I_0 = J_\bullet$ et $\{0\} \subset I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = I_\bullet$. On montre (voir par exemple [**6**, Proposition 1.17] ; voir aussi [**5**, Théorème 5.2]) que :

$$\left.\begin{array}{c} I_i/I_{i-1} \simeq \operatorname{ind}_{U_0 \cap x_i \cdot P}^{U_0} x_i \sigma_{\bullet | U_0 \cap x_i \cdot P} \\ \text{où, pour } i = 0, \ldots, n,\ x_i\sigma_\bullet \text{ est la représentation de } x_i \cdot P \text{ dans } E_\bullet \text{ définie par :} \\ x_i \sigma_\bullet (x_i p x_i^{-1}) = \sigma_\bullet(p), \quad p \in P. \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

Remarquons que notre définition des induites paraboliques différe de celle de [**6**] (voir (2.18)). Cela implique qu'il devrait plutot apparaitre $\tilde{\sigma} = \sigma \otimes \delta_P^{1/2}$ au lieu de σ dans le second membre de la dernière équation. Mais $\delta_P^{1/2}$ étant triviale sur les sous-groupes compacts et $U_0 \cap x_i \cdot P$ étant réunion de tels sous-groupes, on peut ignorer ce facteur.

Ce qui précède montre en particulier la propriété suivante.

(4.2) *La restriction des fonctions à U_0 détermine un isomorphisme de U_0-modules entre $J_\bullet$ et $\operatorname{ind}_{U_0 \cap P}^{U_0}(E_\bullet)$.*

Comme U_0 et ses sous-groupes fermés sont réunion de sous-groupes compacts, ils sont unimodulaires. Le lemme de Shapiro (voir (2.17)) et (2.14) impliquent donc la propriété suivante.

(4.3) *Il existe un isomorphisme canonique T entre $H_0(U_0, J_\bullet \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}})$ et $H_0(U_0 \cap P, E_\bullet \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}})$.*

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Mais $U_0 \cap P = U_0 \cap M$ car P est anti-standard. D'autre part si $\chi \in X(M)$ et $u_0 \in U_0 \cap M$, $\chi(u_0) = 1$ et $b_{u_0} = 1$. On en déduit (i) immédiatement.

Pour (ii), l'assertion sur le support des restrictions des éléments de J à U_0 résulte de l'explicitation de (4.2). Il en résulte que l'intégrale de (ii) est bien définie, et qu'elle définit un élément de $\mathrm{Wh}(J_\chi)$. On remarque que $(U_0 \cap M)\backslash U_0$ s'identifie canoniquement à U^-. L'explicitation de l'isomorphisme de (i), grâce à (2.14), (2.17), (4.2), conduit à (ii).

Maintenant on choisit $x = x_i$ avec $i > 0$. On pose $P_1 = x \cdot P$, $M_1 = x \cdot M$, $\chi_1 = x\chi$, etc. On note $(E_1)_\bullet$ l'espace de $(\sigma_1)_\bullet := x\sigma_\bullet$. On veut calculer $H_0(U_0, I_i/I_{i-1} \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}})$. D'après (2.17) et (4.1), cet espace est isomorphe à $H_0(U_0 \cap P_1, (E_1)_\bullet \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}})$. Comme x_i normalise M_0, P_1 est un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $U_0 \cap P_1$ est égal à $(U_0 \cap M_1)(U_0 \cap U_1)$. Alors, d'après [**6**, Proposition 1.12], $H_0(U_0 \cap P_1, (E_1)_\bullet \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}})$ est isomorphe à $H_0(U_0 \cap M_1, H_0(U_0 \cap U_1, (E_1)_\bullet \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}}))$.

Montrons que $H_0(U_0 \cap U_1, (E_1)_\bullet \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}})$ est réduit à zéro. L'action de U_1 étant triviale sur $(E_1)_\bullet$, on est réduit à prouver que

$$H_0(U_0 \cap U_1, \mathbb{C}_{\psi^{-1}}) = \{0\}. \tag{4.4}$$

Comme $x = x_i$ avec $i > 0$, U_0P_1 n'est pas ouvert et en particulier P_1 n'est pas anti-standard. Montrons qu'il existe $\alpha \in \Delta(P_0)$ telle que $(U_0)_\alpha$ soit contenu dans U_1. Si c'était faux, tous les $(U_0)_\alpha$ seraient contenus dans P_1^-, donc P_1^- contiendrait U_0, ce qui voudrait dire que P_1^- est standard, donc que P_1 est anti-standard. On a donc prouvé notre affirmation. Ceci prouve que la restriction de ψ à $U_0 \cap U_1$ est non triviale. L'assertion (4.4) en résulte immédiatement en utilisant la définition. On a donc montré que pour tout $i > 0$, $H_0(U_0, I_i/I_{i-1} \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}})$ est nul.

Par ailleurs, U_0 étant réunion de sous-groupes compacts ouverts, le foncteur qui, à tout U_0-module lisse V, associe $H_0(U_0, V \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}})$ est exact (voir (2.15)). Alors, un argument de suite exacte montre (iii).

La partie (iv) est obtenue par passage au dual dans (iii).

On va prouver (v) essentiellement comme dans [**6**, Théorème 2.8 (iv)]. A l'aide de (i) et (iii), on voit que $\mathrm{Hom}_B(H_0(U_0, I_B \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}}), B)$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{Hom}_B(H_0(U_0 \cap M, E \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}}) \otimes B, B)$. A $\eta \in \mathrm{Wh}(\sigma)$, il correspond un unique élément de cet espace qui à $e \otimes b \in H_0(U_0 \cap M, E \otimes \mathbb{C}_{\psi^{-1}}) \otimes B$ associe $\eta(e)b \in B$. On note $\xi(P, \sigma_B, \eta)$ l'élément correspondant de $\mathrm{Hom}_B(H_0(U_0, I_B), B)$ dans l'isomorphime ci-dessus.

Pour tout B-module, ou morphisme de B-modules, on dispose de la spécialisation en tout élément χ de $X(M)$, qu'on note avec χ en un indice inférieur. Le spécialisé de I_B est I_χ, notamment. Montrons que le spécialisé en χ de $\xi(P, \sigma_B, \eta)$ est $\xi(P, \sigma_\chi, \eta)$. D'après le point (iii), il suffit pour prouver cette égalité, d'étudier la restriction de ces formes linéaires à J_χ. On conclut en explicitant les isomorphismes grâce à (i) et (ii).

La réalisation compacte de I_B se fait dans l'espace $I \otimes B$. Si $v \in I$, $\xi(P, \sigma_B, \eta)(v \otimes 1)$ est un élément de B dont la valeur en χ est égale à $\xi(P, \sigma_\chi, \eta)(v)$, d'après ce que l'on vient de voir. Cela prouve (v). $\square$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Proposition 1. *On suppose σ unitaire. Soit $\eta \in \mathrm{Wh}(\sigma)$.*

Si $\chi \in X(M)$ est tel que $\mathrm{Re}(\chi\delta_P^{-1/2})$ soit strictement P-dominant, pour tout $v \in I_\chi$ on a l'égalité :

$$\xi(P, \sigma_\chi, \eta)(v) = \int_{U^-} \langle \eta, v(u^-)\rangle \psi(u^-)^{-1}\, \mathrm{d}u^-,$$

l'intégrale étant absolument convergente.

Démonstration. Etudions la convergence de l'intégrale. On écrit

$$u^- = u(u^-)m(u^-)k(u^-) \quad \text{avec } u(u^-) \in U,\ m(u^-) \in M,\ k(u^-) \in K.$$

Alors

$$|\langle \eta, v(u^-)\rangle| = |\chi(m(u^-))\delta_P^{1/2}(m(u^-))\langle \eta, \sigma(m(u^-))v(k(u^-))\rangle|.$$

Lorsque u^- varie, $v(k(u^-))$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs dans E. Par ailleurs, pour tout $e \in E$, la fonction sur M, $m \mapsto \langle \eta, \sigma(m)e\rangle$ est bornée d'après le Lemme 1. Donc il existe $C > 0$ tel que

$$|\langle \eta, v(u^-)\rangle| < C|\chi(m(u^-))\delta_P^{1/2}(m(u^-))|, \quad u^- \in U^-.$$

D'après l'hypothèse sur χ et [**24**, Lemme 4.3.1], il existe une constante $C' > 0$ telle que :

$$|\chi(m(u^-))| \leqslant C'\delta_P^{1/2}(m(u^-)), \quad u^- \in U^-.$$

Comme l'intégrale $\int_{U^-} \delta_P(m(u^-))\, \mathrm{d}u^-$ est convergente (voir (2.7)), on en déduit la convergence absolue de l'intégrale étudiée. Le deuxième membre de l'égalité à montrer définit, lorsque v varie, une fonctionnelle de Whittaker sur I_χ, comme le montre de simples changement de variables, en étudiant séparément la transformation selon $U_0 \cap M$ et U^- de cette forme linéaire. Celle-ci possède les propriétés caractéristiques de $\xi(P, \sigma_\chi, \eta)$ (voir Théorème 1 (i) et (ii)). La proposition en résulte. □

Remarque 1. Soit (U_n^-) une suite croissante de sous-groupes compacts ouverts de U^- dont la réunion est égale à U^-. Soit $v \in i_{K\cap P}^K E$ et pour tout $\chi \in X(M)$, soit v_χ l'élément de I_χ dont la restriction à K est égale à v. D'après [**22**, Proposition 3.2], il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $\chi \in X(M)$, l'intégrale

$$\int_{U_n^-} \langle \eta, v_\chi(u^-)\rangle \psi(u^-)^{-1}\, \mathrm{d}u^-$$

ne dépend pas de $n \geqslant n_0$.

Proposition 2. *Soit P un sous-groupe parabolique anti-standard de G.*

(i) *Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse irréductible de M. Si (σ, E) est un objet de $\mathcal{O}$ et $\eta \in \mathrm{Wh}(\sigma)$, on définit $\xi(P, \sigma, \eta)$ en identifiant σ à $\sigma \otimes 1$, où 1 désigne ici le caractère trivial de M. La correspondance $\eta \mapsto \xi(P, \sigma, \eta)$ est une application linéaire bijective entre $\mathrm{Wh}(\sigma)$ et $\mathrm{Wh}(i_P^G\sigma)$, que l'on note $\phi(\sigma)$.*

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Soit (σ, E) *et* (σ_1, E_1) *deux objets de* $\mathcal{O}$ *équivalents. Soit* $T\colon E \mapsto E_1$ *un opérateur d'entrelacement bijectif entre* σ *et* σ_1*. La transposée de* T*,* T^{t}*, détermine une bijection notée encore* T^{t}*, de* $\mathrm{Wh}(\sigma_1)$ *sur* $\mathrm{Wh}(\sigma)$*. On note* $\mathrm{ind}\, T$*, l'opérateur d'entrelacement induit par* T *entre* $i_P^G\sigma$ *et* $i_P^G\sigma_1$*, qui est simplement la composition des applications de* G *dans* E *avec* T*. Alors on a :*

$$\xi(P, \sigma_1, \eta_1) = \xi(P, \sigma, T^{\mathrm{t}}\eta_1) \circ (\mathrm{ind}\, T)^{-1}, \quad \eta_1 \in \mathrm{Wh}(\sigma_1). \tag{4.5}$$

Cela définit ϕ *comme fonction sur* $\mathcal{O}$ *à valeurs dans* $\mathrm{Hom}(\mathrm{Wh}(\cdot), \mathrm{Wh}(i_P^G)(\cdot))$*, noté aussi* $\mathrm{Hom}(Wh, \mathrm{Wh}(i_P^G))$ *(voir (2.19)).*

(ii) *En particulier, on a la propriété suivante.*

(4.6) Si $\sigma_1 = m\sigma$ *avec* $m \in M \cap K$*, l'application* $T = \sigma(m^{-1})$ *entrelace* σ *et* σ_1*,* $T^{\mathrm{t}} = \sigma'(m)$ *est une bijection de* $\mathrm{Wh}(\sigma_1)$ *sur* $\mathrm{Wh}(\sigma)$*. De plus* $\mathrm{ind}\, T$ *est la multiplication par* $\sigma(m^{-1})$*, donc est égal à* $\lambda(m)$ *(voir (2.11) pour les notations), car* $\delta_P^{1/2}$ *est égale à* 1 *sur les éléments de* $M \cap K$*. La formule ci-dessus se lit donc dans ce cas :*

$$\xi(P, m\sigma, \eta_1) = \xi(P, \sigma, \sigma'(m)\eta_1) \circ \lambda(m^{-1}), \quad \eta_1 \in \mathrm{Wh}(\sigma_1),$$

ou bien

$$\xi(P, m\sigma, \sigma'(m^{-1})\eta) = \xi(P, \sigma, \eta) \circ \lambda(m^{-1}), \quad \eta \in \mathrm{Wh}(\sigma).$$

Démonstration. Cela résulte de la caractérisation de $\xi(P, \sigma, \eta)$ donnée par le Théorème 1 (iv). □

Soit (σ, E) un objet de $\mathcal{O}$ et $e \in E$. Soit H un sous-groupe compact ouvert de G contenu dans K possédant une factorisation d'Iwahori par rapport à (P, P^-) (voir (2.6)) et tel que e soit invariant par H_M. On suppose en outre que H est assez petit, de sorte que H_{U^-} soit contenu dans $Ker\psi$. On définit une application de G dans E, $v_{e,\sigma}^{P,H}$, par :

$$\left.\begin{aligned} v_{e,\sigma}^{P,H}(umh_{U^-}) &= \delta_P^{1/2}(m)\sigma(m)e \quad \text{si } h_{U^-} \in H_{U^-} \text{ et } m \in M,\ u \in U, \\ v_{e,\sigma}^{P,H}(g) &= 0 \quad \text{si } g \notin PH = PH_{U^-}. \end{aligned}\right\} \tag{4.7}$$

Comme e est H_M-invariant, $v_{e,\sigma}^{P,H}$ est invariante à droite par H. C'est un élément de $i_P^G E$ et même de J_1, avec les notations du Théorème 1. On remarque que :

$$\text{pour } \chi \in X(M), \text{ la restriction de } v_{e,\sigma_\chi}^{P,H} \text{ à } K \text{ ne dépend pas de } \chi. \tag{4.8}$$

Notons

$$\mathrm{vol}(H_{U^-}) = \int_{H_{U^-}} \mathrm{d}u^-$$

où $\mathrm{d}u^-$ est la mesure de Haar sur U^- choisie en (2.7). En utilisant le Théorème 1 (ii) et (iv), on voit que :

$$\langle \xi(P, \sigma, \eta), v_{e,\sigma}^{P,H} \rangle = \mathrm{vol}(H_{U^-})\langle \eta, e \rangle, \tag{4.9}$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Lemme 2 (induction par étage pour les fonctionnelles de Jacquet). *Soit $P_1 = M_1U_1$ un sous-groupe parabolique de G contenant le sous-groupe parabolique anti-standard P. On note $(\sigma_1, E_1) = (i^{M_1}_{P\cap M_1}\sigma, i^{M_1}_{P\cap M_1}E)$. On identifie $i^G_P\sigma$ à $i^G_{P_1}\sigma_1$. Alors si $\eta \in \mathrm{Wh}(\sigma)$, $\eta_1 := \xi(P\cap M_1, \sigma, \eta)$ est un élément de $\mathrm{Wh}(\sigma_1)$ et on a :*

$$\xi(P, \sigma, \eta) = \xi(P_1, \sigma_1, \eta_1).$$

Démonstration. D'après le Théorème 1 (iv) et (ii), il suffit de voir que pour tout $v \in i^G_PE$ à support dans PU^- on a :

$$\langle \xi(P, \sigma, \eta), v\rangle = \langle \xi(P_1, \sigma_1, \eta_1), v_1\rangle, \tag{4.10}$$

où v_1 est l'élément de $i^G_PE_1$ correspondant à v dans l'identification de i^G_PE à $i^G_{P_1}E_1$. Le premier membre de l'égalité à démontrer est donné par le Théorème 1 (ii) et (iv) :

$$\langle \xi(P, \sigma, \eta), v\rangle = \int_{U^-} \langle \eta, v(u^-)\rangle \psi^{-1}(u^-)^{-1}\, \mathrm{d}u^-.$$

De même v_1 est à support dans $P_1U_1^- = P_1U_0$. Cela permet de calculer le deuxième membre :

$$\langle \xi(P_1, \sigma_1, \eta_1), v_1\rangle = \int_{U_1^-} \langle \eta_1, v_1(u_1^-)\rangle \psi^{-1}(u_1^-)^{-1}\, \mathrm{d}u_1^-.$$

Mais $v_1(u_1^-)$, comme élément de $E_1 = i^{M_1}_{P\cap M_1}E$ est à support dans $(P\cap M_1)(U^-\cap M_1)$. En utilisant à nouveau le Théorème 1 (ii) et (iv), on exprime $\langle \eta_1, v_1(u_1^-)\rangle$. Le théorème de Fubini permet de conclure à l'égalité (4.10). □

4.2. Sous-groupes paraboliques semi-standard

On rappelle que W^G désigne un ensemble de représentants dans K du groupe de Weyl, $\bar{W}^G$, de G par rapport à M_0. Si M est un sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique semi-standard de G, P, on note $W^M = W^G \cap M$ qui est un ensemble de représentants dans M de $\bar{W}^M$. La longueur des éléments de $\bar{W}^G$ est déterminée par le choix de P_0.

On suppose en outre ici P anti-standard. Il existe un ensemble de représentants de $\bar{W}^G/\bar{W}^M$, $\bar{W}_M$, dans $\bar{W}^G$ tel que l'on ait la propriété suivante (voir [**27**, Proposition 1.1.2.13]).

(4.11) *Tout élément w de $\bar{W}^G$ s'écrive sous la forme w_Mw^M, avec $w_M \in \bar{W}_M$, $w^M \in \bar{W}^M$, et tel que la longueur de w soit égale à la somme des longueurs de w_M et w^M.*

(4.12) *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G. On notera w_P ou parfois seulement w, s'il n'y a pas d'ambiguité, l'élément w_P de G tel que $w_P^{-1} \in W^G$, $P' := w_P \cdot P$ soit anti-standard et tel que w_P^{-1} représente l'élément du groupe de Weyl de longueur minimum dans $w_P^{-1}\bar{W}^{M'} = \bar{W}^M w_P^{-1}$. L'unicité de w_P résulte du fait que deux sous-groupes paraboliques anti-standard de G conjugués sont égaux.*

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Alors, avec les notations de (2.11), $w_P \cdot M$ est le sous-groupe de Lévi de $w_P \cdot P$.

Soit (σ, E) une représentation lisse de M et $w \in W^G$. On dispose de l'isomorphisme $\lambda(w)\colon i_P^G E \mapsto i_{w\cdot P}^G wE$ entre les représentations $i_P^G\sigma$ et $i_{w\cdot P}^G w\sigma$ qui à v associe v_w, où $v_w(g) = v(w^{-1}g)$ pour $g \in G$. Notons, que comme $w \in K$, pour $v \in i_{P\cap K}^K E$ et tout $\chi \in X(M)$, la restriction de $\lambda(w)v_\chi$ à K est égale à $\lambda(w)v$. On voit aussi que si σ est unitaire, $\lambda(w)$ est unitaire.

Définition 1. On définit :

$$\begin{aligned} &\mathrm{Wh}(P,\sigma) := \mathrm{Wh}(w_P\sigma),\\ &\xi(P,\sigma,\eta) := \xi(w_P\cdot P, w_P\sigma, \eta)\circ\lambda(w_P), \quad \eta\in\mathrm{Wh}(P,\sigma). \end{aligned}$$

Alors on a les propriétés suivantes.

(4.13) *L'application* $\eta \mapsto \xi(P,\sigma,\eta)$ *est une bijection entre* $\mathrm{Wh}(P,\sigma)$ *et* $\mathrm{Wh}(i_P^G\sigma)$ $(\subset (i_P^G E)')$.

(4.14) *Pour tout* $v \in i_{P\cap K}^K E$*, l'application* $\chi \mapsto \langle \xi(P,\sigma_\chi,\eta), v_\chi\rangle$ *est polynomiale en* $\chi \in X(M)$*, où* v_χ *est l'élément de l'espace de* $i_P^G\sigma_\chi$ *dont la restriction à* K *est égale à* v.

En effet cela résulte de la Définition 1 et du Théorème 1 (iv).

Soit (σ, E) et (σ_1, E_1) des représentations lisses équivalentes de M. Soit $T\colon E \to E_1$ un opérateur d'entrelacement bijectif entre σ et σ_1. Comme T entrelace aussi $w_P\sigma$ et $w_P\sigma_1$, la transposée de T, T^{t} détermine une bijection, notée encore T^{t}, de $\mathrm{Wh}(P,\sigma_1)$ sur $\mathrm{Wh}(P,\sigma)$. Alors, on déduit de la Définition 1 et de la Proposition 2 que :

$$\xi(P,\sigma_1,\eta_1) = \xi(P,\sigma,T^{\mathrm{t}}\eta_1)\circ(\mathrm{ind}\,T)^{-1}, \quad \eta_1\in\mathrm{Wh}(P,\sigma_1). \tag{4.15}$$

Reformulons la Définition 1 en posant $s = w_P^{-1}$, $Q = w_P \cdot P$, de sorte que Q est anti-standard et $P = s\cdot Q$, et en changeant σ en $s\sigma$.

(4.16) *Si* Q *est un sous-groupe parabolique anti-standard de* G*, de sous-groupe de Lévi* M_Q*, et si* $s \in W^G$ *est de longueur minimum dans* sW^{M_Q}*, on a :*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Wh}(s\cdot Q, s\sigma) = \mathrm{Wh}(Q,\sigma),\\ &\xi(s\cdot Q, s\sigma,\eta) = \xi(Q,\sigma,\eta)\circ\lambda(s^{-1}). \end{aligned}$$

4.3. Intégrales de Jacquet

Définition 2. Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et (σ, E) une représentation lisse de M. Avec les notations précédentes, on définit une application linéaire de $\mathrm{Wh}(P,\sigma)\otimes i_P^G E$ dans $C^\infty(U_0\backslash G,\psi)$, $\phi\mapsto E_P^G(\sigma,\phi)$ par :

$$E_P^G(\sigma,\eta\otimes v)(g) = \langle \xi(P,\sigma,\eta), i_P^G\sigma(g)v\rangle, \quad v\in i_P^G E,\ \eta\in\mathrm{Wh}(P,\sigma).$$

On notera, pour $\phi \in \mathrm{Wh}(P,\sigma)\otimes i_P^G E$, $E_P^G(\phi)$ au lieu de $E_P^G(\sigma,\phi)$.

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

On déduit de (4.14) la propriété suivante.

(4.17) *Si $\chi \in X(M)$, $v \in i_{K\cap P}^{K}\sigma$, on rappelle que v_χ est l'élément de $i_P^G\sigma_\chi$ dont la restriction à K est v.*

Alors, pour tout $g \in G$ et $\eta \in \mathrm{Wh}(P,\sigma)$, l'application $\chi \mapsto E_P^G(\sigma_\chi, \eta \otimes v_\chi)(g)$ est polynomiale en $\chi \in X(M)$.

5. Fonctionnelles de Jacquet et intégrales d'entrelacement

5.1. Intégrales d'entrelacement

Soit $P = MU$, $P' = MU'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G de sous-groupe de Lévi M. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse irréductible de M.

(5.1) *Il existe une fonction rationnelle définie sur $\mathcal{O}$, $A(P',P,\cdot)$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}_G(i_P^G.,i_{P'}^G.)$ avec les propriétés suivantes :*

- *pour tout (σ,E) objet de $\mathcal{O}$, il existe $R \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $\chi \in X(M)$ vérifiant $\langle \mathrm{Re}\,\chi, \alpha\rangle > R$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P) \cap \Sigma(P'^-)$ on ait :*

$$\langle (A(P',P,\sigma_\chi)v)(g), \check{e}\rangle = \int_{U\cap U'\backslash U'} \langle v(u'g), \check{e}\rangle \,\mathrm{d}u', \quad v \in i_P^G V_\chi,\ \check{e} \in \check{E},$$

l'intégrale étant absolument convergente;

- *si σ est tempérée, on peut prendre $R = 0$ (voir [**25**, Proposition IV.2.1]).*

La rationalité s'entend dans le sens suivant.

(5.2) *Il existe une fonction polynôme sur $X(M)$ non nulle, b, telle que pour tout $v \in i_{K\cap P}^K V$, l'application qui à $\chi \in X(M)$ satisfaisant la condition ci-dessus associe la restriction à K de $b(\chi)A(P',P,\sigma_\chi)(v_\chi)$ est à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie de $i_{P\cap K}^K E$ et se prolonge de façon polynomiale en $\chi \in X(M)$ (voir [**25**, Théorème IV.1.1]).*

Il existe une application rationnelle sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, j, telle que pour tout sous-groupe parabolique semi-standard de G, P, de sous-groupe de Lévi M, on ait la propriété suivante (voir [**25**, IV.3 (1)] et [**21**, Théorème 3.2] pour le théorème d'irréductibilité générique).

(5.3) *Pour σ objet de $\mathcal{O}$ tel que $A(P,P^-,\sigma)A(P^-,P,\sigma)$ soit défini, cet opérateur est l'homothétie de rapport $j(\sigma)$.*

On a la propriété suivante (voir [**25**, IV.3 (3)]).

(5.4) *Si $w \in W^G$, $j(w\sigma) = j(\sigma)$.*

De plus l'assertion suivante est vraie (voir [**25**, IV.3 (6)]).

(5.5) *j est non identiquement nulle sur $\mathcal{O}$ si σ est de carré intégrable, i.e. si elle est unitaire et ses coefficients lisses sont de carré intégrable modulo le centre de M.*

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

D'autre part, on obtient facilement un analogue de [**25**, IV.1 (11)] pour les adjoints des intégrales d'entrelacement. Cela conduit à un analogue de [**25**, IV.3 (2)] que l'on exprime sous la forme suivante :

(5.6) *Le nombre $j(\sigma)$ est réel si σ est unitaire.*

Si α est un élément de l'ensemble $\Sigma_{\mathrm{red}}(P)$ des racines réduites de $\Sigma(P)$, on note A_α la composante neutre du noyau de α dans A_M et M_α le centralisateur de A_α. On note $j_\alpha(\sigma)$ le terme analogue à $j(\sigma)$ obtenu en remplaçant G par M_α.

D'après [**25**, IV.3 (4)], si P, P', P'' sont des sous-groupes paraboliques semi-standard de G de sous-groupe de Lévi M, on a l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$:

$$A(P'',P',\sigma)A(P',P,\sigma) = j(P'',P',P,\sigma)A(P'',P,\sigma),$$
$$\text{où } j(P'',P',P,\sigma) \text{ est le produit des } j_\alpha(\sigma) \text{ pour } \alpha \in \Sigma_{\mathrm{red}}(P)\cap\Sigma_{\mathrm{red}}(P'')\cap\Sigma_{\mathrm{red}}(P'^-). \tag{5.7}$$

On a aussi, pour σ de carré intégrable la propriété suivante (voir (5.5) et [**25**, IV.1 (13)]).

(5.8) *Pour $\alpha \in \Sigma_{\mathrm{red}}(P)$, les points où l'application rationnelle sur $X(M)$, $\chi \mapsto j_\alpha(\sigma_\chi)$, a un pôle ou un zéro sont de la forme $\chi = \chi_\lambda$ avec λ élément d'un nombre fini d'hyperplans de $(\mathfrak{a}'_M)_{\mathbb{C}}$ de la forme $\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle = c$.*

Les points où l'application rationnelle sur $X(M)$, $\chi \mapsto A(P',P,\sigma_\chi)$ a un pôle ou bien où $A(P',P,\sigma_\chi)$ n'est pas inversible sont de la forme $\chi = \chi_\lambda$ avec λ élément d'un nombre fini d'hyperplans de $(\mathfrak{a}'_M)_{\mathbb{C}}$ de la forme $\langle\lambda,\check{\alpha}\rangle = c$, avec $\alpha \in \Sigma(P')\cap\Sigma(P^-)$.

Par transport de structure, on a, pour $x \in G$, normalisant M_0 :

$$\lambda(x)A(P',P,\sigma) = A(x\cdot P', x\cdot P, x\sigma)\lambda(x) \tag{5.9}$$

et :

$$\text{si } \alpha \text{ est une racine réduite de } \Sigma(P) \text{ et } w \in W^G, \text{ on a : } j_\alpha(\sigma) = j_{w\alpha}(w\sigma). \tag{5.10}$$

5.2. Matrices *B*

Proposition 3.

(i) *Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse irréductible de M. Il existe une unique application rationnelle définie sur $\mathcal{O}$, $B(P,P',\cdot)$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathrm{Wh}(P',\cdot),\mathrm{Wh}(P,\cdot))$ telle que l'on ait l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$:*

$$\xi(P',\sigma,\eta)\circ A(P',P,\sigma) = \xi(P,\sigma,B(P,P',\sigma)\eta), \quad \eta \in \mathrm{Wh}(P',\sigma).$$

(ii) *La rationalité a ici le sens suivant.*

- *Soit σ un objet de $\mathcal{O}$. Pour tout $\chi \in X(M)$, $\mathrm{Wh}(P,\sigma_\chi) = \mathrm{Wh}(P,\sigma)$, et, avec les notations de (5.2), pour tout $\eta \in \mathrm{Wh}(P',\sigma)$, la fonction $\chi \mapsto b(\chi)B(P,P',\sigma_\chi)\eta$ est une fonction polynomiale sur $X(M)$ à valeurs dans $\mathrm{Wh}(P,\sigma)$.*

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

La relation qui définit $B(P', P, \sigma)$ comme fonction sur $\mathcal{O}$ est la suivante.

- *Soit (σ, E), (σ_1, E_1) deux objets de $\mathcal{O}$ équivalents et T un entrelacement bijectif entre σ et σ_1. La transposée de T, T^{t}, détermine une bijection entre* $\mathrm{Wh}(P, \sigma_1)$ *et* $\mathrm{Wh}(P, \sigma)$ *d'une part,* $\mathrm{Wh}(P', \sigma_1)$ *et* $\mathrm{Wh}(P', \sigma)$ *d'autre part et l'on a :*
$$B(P, P', \sigma_1) = (T^{\mathrm{t}})^{-1} B(P, P', \sigma) T^{\mathrm{t}}.$$

(iii) *La fonction rationnelle sur $X(M)$, $\chi \mapsto B(P, P', \sigma_\chi)$ n'a de pôles qu'en des points ou l'application $\chi \mapsto A(P', P, \sigma_\chi)$ a un pôle.*

Démonstration. Soit (σ, E) un objet de $\mathcal{O}$. Soit b comme dans (5.2). D'après le Théorème 1 (iv), on a :

$$\text{pour tout } \eta \in \mathrm{Wh}(P', \sigma), \text{ il existe un unique } \theta(\chi) \in \mathrm{Wh}(P, \sigma) \text{ tel que :}$$
$$\xi(P', \sigma_\chi, \eta) \circ (b(\chi) A(P', P, \sigma_\chi)) = \xi(P, \sigma_\chi, \theta(\chi)). \tag{5.11}$$

Montrons que l'application $\chi \mapsto \theta(\chi)$ est polynomiale en $\chi \in X(M)$. Soit w comme en (4.12), de sorte que $w \cdot P$ est anti-standard et $\mathrm{Wh}(P, \sigma)$ est égal à $\mathrm{Wh}(w\sigma)$. Il s'agit de montrer que :

$$\text{pour tout } e \in w \cdot E = E,\ \langle \theta(\chi), e \rangle \text{ dépend polynomialement de } \chi \in X(M). \tag{5.12}$$

Avec les notations de (4.7) et (4.9), où on change σ en $w\sigma$, on a :

$$\langle \theta(\chi), e \rangle = \mathrm{vol}(H_{w \cdot U^-})^{-1} \langle \xi(w \cdot P, w\sigma_\chi, \theta(\chi)), v^{w \cdot P, H}_{w\sigma_\chi, e} \rangle.$$

Mais la Définition 1 montre que :

$$\xi(P, \sigma_\chi, \theta(\chi)) = \xi(w \cdot P, w\sigma_\chi, \theta(\chi)) \circ \lambda(w).$$

Donc
$$\langle \theta(\chi), e \rangle = \mathrm{vol}(H_{w \cdot U^-})^{-1} \langle \xi(P, \sigma_\chi, \theta(\chi)), \lambda(w^{-1}) v^{w \cdot P, H}_{w\sigma_\chi, e} \rangle.$$

Comme $w \in K$, on déduit de (4.8) que la restriction à K de $\lambda(w^{-1}) v^{w \cdot P, H}_{w\sigma_\chi, e}$ est indépendante de $\chi \in X(M)$. Alors (5.11) permet d'exprimer $\langle \theta(\chi), e \rangle$ à l'aide de $\xi(P', \sigma_\chi, \eta)$. L'assertion (5.12) résulte de (5.2) et des propriétés des fonctionnelles de Jacquet (voir Théorème 1 (v)).

On vérifie, grâce à la définition de $\mathrm{Wh}(P, \sigma_1)$ et $\mathrm{Wh}(P, \sigma)$, que T^{t} détermine bien un isomorphisme entre ces deux espaces et de même pour P'.

On pose $B(P', P, \sigma_\chi)\eta := b(\chi)^{-1} \theta(\chi)$. On voit grâce à l'unicité dans (5.11) et à (5.12) que cela définit bien une fonction rationnelle sur $\mathcal{O}$, en utilisant par exemple (2.20), et qui a toutes les propriétés voulues. Ceci prouve (ii).

Prouvons (iii). Si $A(P', P, \sigma_\chi)$ n'a pas de pôle en χ_0, pour tout $v \in i^K_{K \cap P}$, l'application $\langle \xi(P, \sigma_\chi, B(P, P', \sigma_\chi))\eta, v_\chi \rangle$ est également sans pôle en χ_0. Mais il résulte de la Définition 1 et (4.9), que ceci suffit à assurer que $B(P, P', \sigma_\chi)\eta$ n'a pas de pôle en χ_0. $\square$

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

5.3. Induction par étage pour les matrices B

Proposition 4. *Soit $P = MU$, $P' = MU'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G de même sous-groupe de Lévi, contenus dans un même sous-groupe parabolique anti-standard de G, $P_1 = M_1U_1$. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse irréductible de M et (σ, E) un objet de $\mathcal{O}$. Alors :*

(i) $\mathrm{Wh}(M_1 \cap P, \sigma) = \mathrm{Wh}(P, \sigma)$, $\mathrm{Wh}(M_1 \cap P', \sigma) = \mathrm{Wh}(P', \sigma)$ *;*

(ii) *on a l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$:*

$$B(P, P', \sigma) = B(P \cap M_1, P' \cap M_1, \sigma).$$

Démonstration. (i) On utilise les notations de (4.12), qu'on utilise aussi pour M_1. Comme W^{M_1} est contenu dans W^G et que P_1 est anti-standard, il résulte des définitions que :

$$w_P = w_{P \cap M_1}, w_{P'} = w_{P' \cap M_1}.$$

Joint à (4.12), ceci prouve la première égalité de (i). On prouve la deuxième égalité de manière identique. Ceci prouve (i).

Prouvons (ii). Par rationalité, il suffit de prouver l'égalité lorsque $T = A(P' \cap M_1, P \cap M_1, \sigma)$ est bijectif. Soit $\eta' \in \mathrm{Wh}(P', \sigma)$ et calculons $\xi = \xi(P, \sigma, B(P, P', \sigma)\eta')$. On a, par définition des matrices B :

$$\xi = \xi(P', \sigma, \eta') \circ A(P', P, \sigma).$$

On identifie, grâce à l'induction par étages, $i_P^G \sigma$ avec $i_{P_1}^G \sigma^-$ et $i_{P'}^G \sigma$ avec $i_{P_1}^G \sigma_1^-$, où $\sigma^- = i_{P \cap M_1}^{M_1} \sigma$ et $\sigma_1^- = i_{P' \cap M_1}^{M_1} \sigma$. Alors, d'après [**25**, IV.1 (14)] :

$$A(P', P, \sigma) = \operatorname{ind} T.$$

On utilise la Définition 1, puis on applique le Lemme 2 à $w_{P'} \cdot P$ et $w_{P'}\sigma$, et à nouveau la Définition 1 pour M_1 et le fait que $w_{P'} \in M_1$ pour voir que :

$$\xi(P', \sigma, \eta') = \xi(P_1, \sigma_1^-, \xi(P' \cap M_1, \sigma, \eta)). \tag{5.13}$$

Joint à ce qui précède et à (4.5), on en déduit :

$$\xi = \xi(P_1, \sigma^-, T^{\mathrm{t}} \xi(P' \cap M_1, \sigma, \eta')).$$

Mais par définition de T et des matrices B, on a :

$$T^{\mathrm{t}} \xi(P' \cap M_1, \sigma, \eta') = \xi(P \cap M_1, B(P \cap M_1, P' \cap M_1, \sigma)\eta').$$

Finalement on a prouvé :

$$\xi(P, \sigma, B(P, P', \sigma)\eta') = \xi(P, \sigma, B(P \cap M_, P' \cap M_1, \sigma)\eta').$$

D'où l'on déduit (ii). $\square$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

5.4. Equation fonctionnelle des intégrales de Jacquet

Lemme 3.

(i) *Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse irréductible de M. Avec les notations de la Définition 2, soit (σ, E) un objet de $\mathcal{O}$. Soit $P = MU$, $P' = MU'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G de sous-groupe de Lévi M. On a l'égalité de fonctions rationnelles sur $X(M)$:*

$$E_P^G(\sigma, B(P, P', \sigma_\chi)\eta \otimes v_\chi)(g) = E_{P'}^G(\sigma, \eta \otimes A(P', P, \sigma_\chi)v_\chi)(g), \\ v \in i_{P\cap K}^K E, \ \eta \in \mathrm{Wh}(P', \sigma).$$

(ii) *Avec les notations de (4.12), on a l'égalité :*

$$E_P^G(\sigma, \eta \otimes v) = E_{w_P \cdot P}^G(w_P\sigma, \eta \otimes \lambda(w_P)v), \quad v \in i_P^G E, \ \eta \in \mathrm{Wh}(P, \sigma).$$

(iii) *On suppose que P est anti-standard. Si (σ_1, E_1) est une représentation de M équivalente à (σ, E) et, si T est un opérateur d'entrelacement bijectif entre σ et σ_1, on a, avec les notations de la Proposition 2 :*

$$E_P^G(\sigma, T^{\mathrm{t}}\eta_1 \otimes v) = E_P^G(\sigma_1, \eta_1 \otimes (\mathrm{ind}\, T)v), \quad v \in i_{P\cap K}^K E, \ \eta \in \mathrm{Wh}(\sigma_1).$$

Démonstration. Le point (i) est une conséquence immédiate de la définition des intégrales de Jacquet (Définition 2) et de celle des matrices B (Proposition 3).

Le point (ii) résulte de (4.12) et de la définition des intégrales de Jacquet.

Le point (iii) résulte de la Proposition 2. □

6. Enoncé du théorème principal

6.1. Formes sesquilinéaires

Hypothèse supplémentaire: on suppose désormais que ψ est en outre unitaire

Si E est un espace vectoriel complexe, on note $\bar{E}$ l'espace vectoriel conjugué : c'est le même groupe additif, mais la multiplication par les scalaires est conjuguée. Soit (π, V) une représentation lisse de G. On rappelle qu'on note $(\check{\pi}, \check{V})$ sa contragrédiente lisse. On note $(\bar{\pi}, \bar{V})$ la représentation conjuguée et (π^*, V^*) la représentation $(\bar{\check{\pi}}, \bar{\check{V}})$. Notez que $\bar{\check{V}}$ s'identifie naturellement à l'espace des formes antilinéaires sur V fixées par un sous-groupe compact ouvert de G.

Dans la suite produit scalaire voudra dire produit scalaire linéaire dans la première variable et antilinéaire dans la seconde. Si π est unitaire, i.e. muni d'un produit scalaire invariant, V^* s'identifie naturellement à V, par l'application $v \mapsto (v, \cdot)$ et π^* à π. Si χ est un élément de $X(G)$ on note χ^{-1} son inverse et $\bar{\chi}$ son complexe conjugué. Alors $(\pi \otimes \chi)^*$ est naturellement isomorphe à $\pi^* \otimes \bar{\chi}^{-1}$. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation unitaire irréductible lisse de G. Si (π, V) est un objet de $\mathcal{O}$, on déduit de ce qui précède que (π^*, V^*) est aussi un objet de $\mathcal{O}$.

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Une représentation lisse irréductible de G est dite cuspidale si ses coefficients lisses sont à support compact modulo le centre de G.

On a la propriété suivante.

(6.1) *Dans l'orbite inertielle $\mathcal{O}$ d'une représentation cuspidale lisse irréductible, il existe une représentation unitaire.*

Lemme 4. *On suppose que (π, V) est une représentation lisse, cuspidale, unitaire et irréductible de G. Alors :*

(i) *il existe un unique produit scalaire hermitien sur* $\mathrm{Wh}(\pi)$ *tel que :*

$$\int_{A_G U_0 \backslash G} c_{\xi,v}(g)\overline{c_{\xi',v'}(g)}\,\mathrm{d}g = (\xi,\xi')(v,v'), \quad \xi,\xi' \in \mathrm{Wh}(\pi),\ v,v' \in V,$$

où la fonction sous le signe intégrale est à support compact d'après le Lemme 1 (i) ;

(ii) *si χ est un caractère unitaire non ramifié de G, le produit scalaire sur* $\mathrm{Wh}(\pi_\chi) = \mathrm{Wh}(\pi)$*, ne dépend pas de χ ;*

(iii) *si T est un opérateur d'entrelacement unitaire avec une autre représentation cuspidale de G, (π_1, V_1), l'opérateur T^{t} détermine un opérateur unitaire entre* $\mathrm{Wh}(\pi)$ *et* $\mathrm{Wh}(\pi_1)$.

Démonstration. (i) Il s'agit d'une simple application du Lemme de Schur.

Le point (ii) résulte immédiatement de la caractérisation du produit scalaire.

Le point (iii) est immédiat. □

On appliquera ces notations aux sous-groupes de Lévi de G.

6.2. Transformée de Fourier–Whittaker

Proposition 5.

(i) *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G et $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse unitaire irréductible et cuspidale de M. Soit (σ, E) un objet de $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$. On munit* $\mathrm{Wh}(P,\sigma)$ *du produit scalaire défini grâce au Lemme 4 et à la définition de* $\mathrm{Wh}(P,\sigma)$*. Par tensorisation avec le produit scalaire d'induite unitaire de $i_P^G(\sigma)$, on en déduit un produit scalaire sur* $\mathrm{Wh}(P,\sigma) \otimes i_P^G E$.

Soit $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(U_0\backslash G, \psi)$. Il existe un unique élément de $\mathrm{Wh}(P,\sigma) \otimes i_P^G E$*, $F(P,\sigma)$, tel que :*

$$(F(P,\sigma), \eta \otimes v) = \int_{U_0\backslash G} f(g)\overline{E_P^G(\sigma, \eta \otimes v)(g)}\,\mathrm{d}g, \quad v \in i_P^G E,\ \eta \in \mathrm{Wh}(P,\sigma). \quad (6.2)$$

(ii) *Utilisant l'égalité* $\mathrm{Wh}(P,\sigma_\chi) = \mathrm{Wh}(P,\sigma)$ *pour tout $\chi \in X(M)$ et la réalisation compacte, on voit que l'application $\chi \mapsto F(P,\sigma_\chi)$ s'étend de $X(M)_{\mathrm{u}}$ à $X(M)$ en une fonction polynomiale notée de même.*

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

(iii) *Soit σ_1 une représentation unitaire équivalente à σ de M et T un opérateur d'entrelacement unitaire entre σ et σ_1. On utilise les notations de la Proposition 3 (ii) et l'unitarité de l'opérateur* $\operatorname{ind} T$. *Alors on a :*

$$F(P, \sigma_1) = ((T^{\mathrm{t}})^{-1} \otimes \operatorname{ind} T) F(P, \sigma). \tag{6.3}$$

Utilisant, les notations de (2.4), pour toute orbite inertielle d'une représentation lisse unitaire irréductible et cuspidale de M, $\mathcal{O}$, $\sigma \mapsto F(P, \sigma)$ est un élément de $\operatorname{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \operatorname{Wh}(P, \cdot) \otimes i_P^G)$.

Démonstration. Notons $\phi(\eta \otimes v)$ le second membre de (6.2). Alors ϕ s'étend en une forme antilinéaire sur $\operatorname{Wh}(P, \sigma) \otimes i_P^G E$. Il est clair que si f est invariante à droite par un sous-groupe ouvert compact H de G, ϕ est invariante par H. Par le théorème de représentation de Riesz, en dimension finie, on en déduit (i).

Prouvons (ii). Il suffit de voir que pour tout $v \in i_{P \cap K}^K E$, $\eta \in \operatorname{Wh}(P, \sigma)$, l'application $\chi \mapsto (F(P, \sigma_\chi), \eta \otimes v_\chi)$ s'étend de façon polynomiale de $X(M)_{\mathrm{u}}$ à $X(M)$. Pour cela il suffit de montrer que l'application qui à $\chi \in X(M)$ associe :

$$\phi_\chi(v) := \int_{U_0 \backslash G} f(g) \overline{E_P^G((\sigma_\chi)^*, \eta \otimes v_\chi)(g)}\, \mathrm{d}g,$$

est polynomiale. Choisissons un sous-groupe compact ouvert, H, de G comme ci-dessus et fixons v. En utilisant le fait que f est à support compact, on voit qu'il existe des constantes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ et $g_1, \ldots, g_n \in G$ telles que :

$$\phi_\chi(v) = \sum_{i=1,\ldots,n} c_i f(g_i) \overline{E_P^G((\sigma_\chi)^*, \eta \otimes v_\chi)(g_i)}, \quad \chi \in X(M).$$

Notre assertion résulte alors de (4.17). Cela prouve (ii). La relation (6.3) résulte de la définition de F en (i), de la définition des intégrales de Jacquet (Définition 2), et de (4.15). Le reste de (iii) résulte alors de (ii). $\square$

On retient les notations du Lemme 3 (ii). L'unitarité de $\lambda(w_P)$ montre que la définition de F implique que, pour σ comme dans (i) :

$$F(P, \sigma) = (\operatorname{Id} \otimes \lambda(w_P)^{-1}) F(w_P \cdot P, w_P \sigma). \tag{6.4}$$

De même, d'après le Lemme 3 (i), on a l'égalité de fonctions rationnelles sur $X(M)_{\mathrm{u}}$:

$$(B(P, P', \sigma_\chi)^* \otimes \operatorname{Id}) F(P, \sigma_\chi) = (\operatorname{Id} \otimes A(P', P, \sigma_\chi)^*) F(P', \sigma_\chi). \tag{6.5}$$

On sait [**25**, preuve du Lemme V.2.2], que l'on a la formule d'adjonction, pour σ unitaire :

$$A(P', P, \sigma)^* = A(P, P', \sigma). \tag{6.6}$$

On admet provisoirement la relation suivante pour P anti-standard et σ unitaire

$$B(P, P', \sigma)^* = B(P', P, \sigma). \tag{6.7}$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Nous montrerons cette relation au prix d'un travail non négligeable, comme conséquence de l'étude des produits scalaires de paquets d'ondes. On déduit alors de la relation(6.5) que :

si $P = MU$ est anti-standard, on a l'identité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$:
$$(B(P', P, \sigma) \otimes \mathrm{Id})F(P, \sigma) = (\mathrm{Id} \otimes A(P, P', \sigma))F(P', \sigma). \tag{6.8}$$

Notation

On notera $\hat{f}(P, \sigma)$ au lieu de $F(P, \sigma)$ et on appellera $\hat{f}$ la transformée de Fourier–Whittaker de f, ou plus simplement sa transformée de Fourier.

6.3. Enoncé du théorème principal

Théorème 2. *On suppose donné pour tout sous-groupe parabolique semi-standard de G, $P = MU$, et pour toute représentation lisse unitaire, irréductible et cuspidale de M, (σ, E), un élément $F(P, \sigma)$ de $\mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_P^G E$. Alors il existe $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$ tel que $\hat{f} = F$ si et seulement si :*

(i) *pour toute orbite inertielle de représentation lisse unitaire irréductible et cuspidale de M, $\mathcal{O}$, $F \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh}(P, \cdot) \otimes i_P^G)$; notamment F vérifie (6.3) ;*

(ii) *faisant agir G sur $\mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_P^G \sigma$ trivialement sur le premier facteur et naturellement sur le deuxième, il existe un sous-groupe compact ouvert fixant $F(P, \sigma)$ pour tout (P, σ) comme ci-dessus ;*

(iii) *pour tout sous-groupe parabolique semi-standard P de G, on a, avec les notations de (4.12) :*
$$F(P, \sigma) = (\mathrm{Id} \otimes \lambda(w_P)^{-1})F(w_P \cdot P, w_P \sigma) \ ;$$

(iv) *si $P = MU$, $P' = MU'$ sont deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G de même sous-groupe de Lévi et si P est anti-standard, on a l'identité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$:*
$$(B(P', P, \sigma) \otimes \mathrm{Id})F(P, \sigma) = (\mathrm{Id} \otimes A(P, P', \sigma))F(P', \sigma) \ ;$$
de plus f est unique.

En d'autres termes la transformation de Fourier–Whittaker détermine un isomorphisme entre $C_{\mathrm{c}}^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$ et l'espace des fonctions F satisfaisant les conditions (i) à (iv) ci-dessus.

Remarquons que modulo la formule d'adjonction (6.7), on a montré la partie seulement si du théorème.

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

6.4. Reformulation du théorème principal

Soit $P = MU$, $Q = LV$ deux sous-groupes paraboliques anti-standard dont les sous-groupes de Lévi sont conjugués par un élément de W^G et soit $s \in W^G$ tel que $s \cdot L = M$ et tel que s soit de longueur minimum dans $s\bar{W}^L = \bar{W}^M s$. Soit $w = s^{-1}$. Alors $P' := w^{-1} \cdot Q$ est un sous-groupe parabolique semi-standard de sous-groupe de Lévi M. Notons, pour σ objet d'une orbite inertielle, $\mathcal{O}$, de représentation irréductible lisse cuspidale de M, $A(w, P, \sigma) := \lambda(w) \circ A(P', P, \sigma)$, qui entrelace, lorsqu'il est défini, $i_P^G \sigma$ et $i_Q^G w\sigma$. Comme dans la Proposition 3, on voit qu'il existe une unique fonction rationnelle sur $\mathcal{O}$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\mathrm{Wh}(w\sigma), \mathrm{Wh}(\sigma))$, $B(w^{-1}, Q, \sigma)$, telle que l'on ait l'identité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$:

$$\xi(Q, w\sigma, \eta) \circ A(w, P, \sigma) = \xi(P, \sigma, B(w^{-1}, Q, w\sigma)\eta), \quad \eta \in \mathrm{Wh}(\sigma). \tag{6.9}$$

On remarque qu'avec nos définitions, $w = w_{P'}$. En utilisant (6.9), la Définition 1 et la Proposition 3, on voit que

$$B(w^{-1}, Q, w\sigma) = B(P, P', \sigma). \tag{6.10}$$

Si $f \in C_c^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$ on note $\hat{f}_{\mathrm{anti}}$ la restriction de $\hat{f}$ aux sous-groupes paraboliques anti-standard.

Corollaire du Théorème 2. *On suppose donné pour tout sous-groupe parabolique anti-standard de G, $P = MU$, et pour toute représentation lisse unitaire, irréductible et cuspidale de M, (σ, E), un élément $F(P, \sigma)$ de $\mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_P^G E$. Alors il existe $f \in C_c^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$ tel que $\hat{f}_{\mathrm{anti}} = F$ si et seulement si F vérifie (i) et (ii) du Théorème 2, pour les sous-groupes paraboliques anti-standard, et si F vérifie la condition suivante.*

Pour tout $P = MU$, $Q = LV$ sous-groupes paraboliques anti-standard de G, pour tout $s \in W^G$ tel que $s \cdot L = M$ et tel que s soit de longueur minimum dans $s\bar{W}^L = \bar{W}^M s$, et pour toute orbite inertielle de représentation irréductible lisse cuspidale de M, on a l'identité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}$:

$$(B(w^{-1}, Q, w\sigma) \otimes \mathrm{Id})F(Q, w\sigma) = (\mathrm{Id} \otimes A(w, P, \sigma))F(\sigma), \quad \text{avec } w = s^{-1}. \tag{6.11}$$

De plus f est alors unique.

Démonstration. On étend F aux sous-groupes paraboliques semi-standard en utilisant la relation (iii) du Théorème 2 comme définition. La fonction $\tilde{F}$ ainsi obtenue vérifie toutes les conditions du Théorème 2 : la condition (iv) résulte immédiatement de la relation ci-dessus satisfaite par F, de (6.10) et (6.11) et de la définition de $\tilde{F}$. On en déduit l'existence de f. Par ailleurs si $f' \in C_c^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$ et si $\hat{f}'_{\mathrm{anti}}$ est nulle, $\hat{f}'$ est nulle. Donc, d'après le Théorème 2, f' est nulle. On en déduit que f est unique. $\square$

7. Terme constant des intégrales de Jacquet

7.1. Fonctionnelles de Jacquet et modules de Jacquet

Soit $P = MU$ et $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques semi-standard de G. On note

$$\mathcal{W}(M'|G|M) = \{s \in W^G \mid s \cdot M \subset M'\}.$$

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

On surligne pour indiquer l'image dans le groupe de Weyl. Soit

$$\bar{W}(M'|G|M) = \bar{W}^{M'} \backslash \bar{\mathcal{W}}(M'|G|M).$$

On remarque que

$$\bar{W}(M'|G|M) := \bar{W}^{M'} \backslash \bar{\mathcal{W}}(M'|G|M)/\bar{W}^{M}.$$

Ceci permet de choisir un ensemble de représentants $W(M'|G|M)$ de $\bar{W}(M'|G|M)$ dans W^G tel que :

$$\text{pour } s \in W(M'|G|M),\ \bar{s} \text{ est de longueur minimum dans } \bar{W}^{M'}\bar{s}. \tag{7.1}$$

De plus, en utilisant un sous-groupe parabolique standard conjugué à P, $x \cdot P$, on voit grâce à [**27**, Proposition 1.2.1.10], que

$$W(M'|G|M) \text{ est un ensemble de représentants d'un sous-ensemble de } P' \backslash G/P. \tag{7.2}$$

Définition 3. Soit M le sous-groupe de Lévi d'un sous-groupe parabolique semi-standard de G et (σ, E) une représentation lisse, irréductible et cuspidale de M. On dit que σ est G-régulière si :

(1) pour tout $s \in W(M|G|M)$ avec $s \neq 1$, les représentations $s\sigma$ et σ sont non équivalentes ;

(2) si P, P' sont des sous-groupes paraboliques de G ayant M pour sous groupe de Lévi, les applications rationnelles sur $X(M)$, $\chi \mapsto A(P, P', \sigma_\chi)$, $\chi \mapsto B(P, P', \sigma_\chi)$ n'ont pas pas de pôles en $\chi = 1$ et leurs valeurs en 1 sont des opérateurs inversibles ;

(3) la représentation $i_P^G \sigma$ est irréductible.

On remarque que si σ est comme ci-dessus, l'ensemble des $\chi \in X(M)$ tel que σ_χ soit G-régulière est un ouvert de Zariski non vide de $X(M)$ (voir [**25**, IV.3]) et si σ est unitaire, l'ensemble des $\chi \in X(M)_{\mathrm{u}}$ tels que σ_χ soit G-régulière est Zariski-dense dans $X(M)$ (voir [**25**, Proposition IV.2.2]).

On introduit, pour $s \in W(M'|G|M)$, les sous-groupes paraboliques de G :

$$P_s = (M' \cap s \cdot P)U', \qquad \tilde{P}_s = (M' \cap s \cdot P)U'^-. \tag{7.3}$$

Soit σ une représentation cuspidale G-régulière de M. Posons $(\pi, V) = (i_P^G \sigma, i_P^G E)$. On définit une application α :

$$\alpha \colon V \to \bigoplus_{s \in W(M'|G|M)} i_{M' \cap s \cdot P}^{M'} sE, \quad v \mapsto (v_s)_{s \in W(M'|G|M)},$$

par

$$v_s(m') = \delta_{P'}^{-1/2}(m')(A(P_s, s \cdot P, s\sigma)\lambda(s)v)(m'), \quad m' \in M'.$$

D'après [**25**], début de la preuve de la Proposition V.1.1, on a les propriétés suivantes.

CAMBRIDGE JOURNALS http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

(7.4) *L'application α se factorise en un isomorphisme de M'-modules entre le module de Jacquet normalisé de V relatif à P', $V_{P'}$, et l'espace d'arrivée, qui est une somme de M'-modules irréductibles non équivalents, réduite à zéro si $W(M'|G|M)$ est vide. On identifie dans la suite $V_{P'}$ à l'aide de α avec l'image cet isomorphisme.*

(7.5) *Si $\eta \in \mathrm{Wh}(P, \sigma)$, comme $\lambda(s)$ entrelace $i_P^G \sigma$ et $i_{s \cdot P}^G s\sigma$, d'après (4.13), il existe un unique $\mathfrak{s}\eta \in \mathrm{Wh}(s \cdot P, s\sigma)$ tel que :*

$$\xi(s \cdot P, s\sigma, \mathfrak{s}\eta) = \xi(P, \sigma, \eta) \circ \lambda(s^{-1}).$$

Théorème 3. *Soit P (respectivement P') un sous-groupe parabolique semi-standard (respectivement standard) de G. Soit σ comme ci-dessus.*

(i) *Pour $s \in W(M'|G|M)$, on a $\mathrm{Wh}(\tilde{P}_s, s\sigma) = \mathrm{Wh}(M' \cap s \cdot P, s\sigma)$.*

(ii) *Soit $\eta \in \mathrm{Wh}(P, \sigma)$. On note $\xi = \xi(P, \sigma, \eta)$. Alors, dans l'isomorphisme α ci-dessus, $\xi_{P'}$ qui est un élément du dual de $V_{P'}$ (voir (3.6)), est nul si $W(M'|G|M)$ est vide et sinon égal à $(\xi_s)_{s \in W(M'|G|M)}$, avec :*

$$\xi_s = \xi(M' \cap s \cdot P, s\sigma, B(\tilde{P}_s, s \cdot P, s\sigma)\mathfrak{s}\eta),$$

l'expression étant bien définie grâce à (i).

(iii) *Si P est anti-standard, $\mathfrak{s}\eta = \eta$.*

Démonstration. (i) On rappelle que, par définition, $W^{M'} = W^G \cap M'$. Si $w^{-1} \in W^{M'}$ et $w \cdot (M' \cap s \cdot P)$ est anti-standard dans M', $w \cdot \tilde{P}_s$ est anti-standard dans G. Si w^{-1} est de longueur minimum dans $W^{s \cdot M} w^{-1}$, on a (voir (4.12)) $w = w_{M' \cap s \cdot P} = w_{\tilde{P}_s}$. Le point (i) en résulte d'après la Définition 1.

(ii) Si $W(M'|G|M)$ est vide, $V_{P'}$ est réduit à zéro, donc $\xi_{P'}$ est nul. Ceci prouve la première assertion de (ii).

On suppose maintenant que $W(M'|G|M)$ est non vide. On écrit :

$$\xi_{P'} = (\xi_s)_{s \in W(M'|G|M)},$$

où ξ_s est de la forme :

$$\xi_s = \xi(M' \cap s \cdot P, s\sigma, \eta_s), \quad \text{pour un élément } \eta_s \text{ de } \mathrm{Wh}(M' \cap s \cdot P, s\sigma). \tag{7.6}$$

ll s'agit donc de montrer :

$$\eta_s = B(\tilde{P}_s, s \cdot P, s\sigma)\mathfrak{s}\eta. \tag{7.7}$$

(a) Montrons d'abord :

$$\text{supposons } P \text{ semi-standard et } P^- \subset P' \text{ ; alors } \eta_{1_G} = \eta. \tag{7.8}$$

Soit $(\sigma^-, E^-) = (i_{P \cap M'}^{M'} \sigma, i_{P \cap M'}^{M'} E)$ de sorte que $\pi = i_P^G \sigma$ s'identifie à $i_{P'^-}^G \sigma^-$. On note $\eta^- = \xi(P \cap M', \sigma, \eta)$. Comme dans la preuve de (5.13), on voit que ξ est égal

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

à $\xi(P'^-, \sigma^-, \eta^-)$. Soit v élément de V identifié $i^G_{P'^-} E^-$, à support dans $P'^- U'$. Soit $a \in A_{M'}$. On calcule $\langle \xi, \pi(a)v\rangle$ en utilisant le Théorème 1 (ii) pour P'. On a :

$$\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \int_{U'} \langle \eta^-, v(u'a)\rangle \psi(u')^{-1}\, du'.$$

En utilisant les relations de covariance satisfaites par v, on voit que la fonction à intégrer est non nulle pour $a^{-1}u'a \in \operatorname{Supp} v$, i.e. $u' \in a(\operatorname{Supp} v)a^{-1}$. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit et $a \in A_{M'} \cap A_0^-(P', <\varepsilon)$, u' est alors tel que $\psi(u') = 1$ et l'on trouve :

$$\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \langle \eta^-, (A(P', P'^-, \sigma^-)v)(a)\rangle. \tag{7.9}$$

Ici on a $\tilde{P}_{1_G} = P$. Mais avec les identifications de l'induction par étages et la définition de P_{1_G}, on a (voir [**25**, IV.1 (14)]) :

$$A(P', P'^-, \sigma^-)v = A(P_{1_G}, P, \sigma)v. \tag{7.10}$$

Alors, tenant compte de la définition de v_{1_G}, (7.9) se réécrit :

$$\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \delta_{P'}^{1/2}(a)\langle \xi(P \cap M', \sigma, \eta), \sigma^-(a)v_{1_G}\rangle. \tag{7.11}$$

Montrons :

$$v_s = 0 \quad \text{si } s \neq 1_G. \tag{7.12}$$

En effet, lorsque les intégrales d'entrelacement sont définies par des intégrales convergentes, $v_s(m')$ est un multiple de l'intégrale sur $U' \cap s \cdot P^-$ de $v(s^{-1}u'm')$. Mais si $u' \in U'$ est tel que $v(s^{-1}u'm')$ est non nul, on doit avoir $s^{-1}u'm' \in P'^-U' \subset PP'$. Comme $s^{-1}u'm'$ appartient à $Ps^{-1}P'$ et que, d'après (7.2), $P'sP \cap P'P$ est vide, on conclut que (7.12) est vrai dans ce cas. On conclut par prolongement rationnel.

De (7.12), on déduit que l'image de v dans $V_{P'}$ est égale à v_{1_G}. Alors, tenant compte de (7.1), (7.11) se réécrit, pour a comme ci-dessus, i.e. $a \in A_{M'} \cap A_0^-(P', <\varepsilon)$:

$$\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \delta_{P'}^{1/2}(a)\langle \xi(P \cap M', \sigma, \eta), \pi_{P'}(a)j_{P'}(v)\rangle.$$

Mais (voir (3.7)), on a, pour un $\varepsilon' > 0$, l'égalité :

$$\langle \xi, \pi(a)v\rangle = \delta_{P'}^{1/2}(a)\langle \xi_{P'}, \pi_{P'}(a)j_{P'}(v)\rangle, \quad a \in A_{M'} \cap A_0^-(P', <\varepsilon').$$

Alors les deux membres de droite des égalités précédentes sont des fonctions $A_{M'}$-finies sur $A_{M'}$, d'après les propriétés du module de Jacquet, et égales sur $A_{M'} \cap A_0(P, < \inf(\varepsilon, \varepsilon'))$, donc égales partout. L'égalité en 1_G, pour tout v comme ci dessus, conduit à (7.8) en tenant compte de l'assertion suivante, que nous allons démontrer.

(7.13) *L'ensemble* $\{v_{1_G} \mid v \in V,\ \operatorname{Supp} v \subset P'^-U'\}$ *est égal à* $i^{M'}_{M' \cap P} E$.

En effet, pour H comme dans (4.7) et $e \in E^-$, $v = v^{P'^-, H}_{\sigma^-, e}$ est à support dans P'^-U'. La définition des intégrales d'entrelacement et (7.10) montrent que v_{1_G} est non nul en 1_G. L'ensemble considéré est clairement un sous-M'-module de $i^{M'}_{M' \cap P} E$, qui est irréductible d'après l'hypothèse de régularité de σ (voir Définition 3) et qui n'est pas réduit à zéro. On en déduit l'assertion précédente, ce qui achève de prouver (7.8).

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

(b) Revenons à la démonstration de (7.7). On fixe $s \in W(M'|G|M)$. Soit t le représentant dans W^G de l'image de s^{-1} dans $\bar{W}^G$. On note P_1 le sous-groupe parabolique semi-standard de G, $\tilde{P}_s$, de sous-groupe de Lévi $M_1 = t^{-1} \cdot M$ et contenu dans P'^-. Soit $(\pi_1, V_1) = (i_{P_1}^G t^{-1}\sigma, i_{P_1}^G t^{-1}E)$. On affecte d'un indice 1 tous les objets relatifs à cette représentation. Soit $v_1 \in V_1$ et $\eta \in \mathrm{Wh}(\sigma)$. Posons :

$$v = A(P, t \cdot P_1, \sigma)\lambda(t)v_1, \qquad \xi_1 = \xi(t \cdot P_1, \sigma, B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta) \circ \lambda(t).$$

Soit $\mathfrak{t}B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta$ l'élément de $\mathrm{Wh}(P_1, t^{-1}\sigma)$ tel que (voir (4.13)) :

$$\xi(t \cdot P_1, \sigma, B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta) \circ \lambda(t) = \xi(P_1, t^{-1}\sigma, \mathfrak{t}B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta). \tag{7.14}$$

On a donc :

$$\xi_1 = \xi(P_1, t^{-1}\sigma, \mathfrak{t}B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta), \tag{7.15}$$

où $\mathfrak{t}$ envoie $\mathrm{Wh}(tP_1, \sigma)$ sur $\mathrm{Wh}(P_1, t^{-1}\sigma)$. On voit que $W(M'|G|t^{-1} \cdot M)$ contient 1_G, car $s \in W(M'|G|M)$. On suppose en outre que $v_{1,u}$ est nul pour tout $u \in W(M'|G|t^{-1} \cdot M)$ distinct de 1_G. Alors (voir [**25**, p. 291]), d'après les propriétés des intégrales d'entrelacement, pour tout $u' \in W(M'|G|M)$, $v_{u'}$ dépend linéairement de $v_{1,su'}$. Donc $v_{u'} = 0$ pour tout $u' \in W(M'|G|M)$ distinct de s. On a, grâce a la définition des matrices B :

$$\langle \xi, \pi(g)v \rangle = \langle \xi_1, \pi_1(g)v_1 \rangle, \quad g \in G.$$

D'après la définition du terme constant et (3.9), on en déduit :

$$\langle \xi_{P'}, v_{P'} \rangle = \langle \xi_{1,P'}, v_{1,P'} \rangle.$$

En tenant compte de la définition de ξ_s et $\xi_{1,1_G}$, on déduit de ce qui précède :

$$\langle \xi_s, v_s \rangle = \langle \xi_{1,1_G}, v_{1,1_G} \rangle. \tag{7.16}$$

On pose :

$$m = st \in M_0 \cap K.$$

Montrons que :

$$v_s = \lambda(m)v_{1,1_G}. \tag{7.17}$$

D'abord, on déduit de (5.7) :

$$A(P_s, s \cdot P, s\sigma)A(s \cdot P, P_1, s\sigma) = A(P_s, P_1, s\sigma).$$

Tenant compte de cette égalité, et utilisant (5.9) avec $x = s^{-1}$, puis $x = m$, on déduit de la définition de v et de celle de v_s :

$$v_s(m') = \delta_{P'}^{1/2}(m')(A(P_s, P_1, s\sigma)\lambda(m)v_1)(m'), \quad m' \in M'.$$

Remarquant que $P_{1,1_G} = P_s$, la définition de $v_{1,1_G}$ montre que :

$$v_{1,1_G}(m') = \delta_{P'}^{1/2}(m')(A(P_s, P_1, t^{-1}\sigma)v_1)(m'), \quad m' \in M'.$$

Comme $m \in M_0 \cap K$, ce qui précède joint à (5.9) conduit à (7.17).

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Etudions maintenant $\langle \xi_s, v_s \rangle$. L'inversibilité de $B(\tilde{P}_s, s \cdot P, s\sigma)$ (voir Définition 3) montre que, avec les notations de (7.1), il existe un unique $\eta' \in \mathrm{Wh}(P, \sigma)$ tel que :

$$\eta_s = B(\tilde{P}_s, s \cdot P, s\sigma,)\mathfrak{s}\eta'.$$

De (7.17), de la définition de η_s (voir (7.6)) et de l'égalité $\tilde{P}_s = P_1$, on déduit :

$$\langle \xi_s, v_s \rangle = \langle \xi(M' \cap P_1, s\sigma, B(P_1, s \cdot P, s\sigma)\mathfrak{s}\eta'), \lambda(m)v_{1,1_G} \rangle. \tag{7.18}$$

Par ailleurs, d'après (7.8) appliqué à ξ_1 et P_1, en tenant compte de (7.15), on voit que :

$$\langle \xi_{1,1_G}, v_{1,1_G} \rangle = \langle \xi(M' \cap P_1, t^{-1}\sigma, \mathfrak{t}B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta), v_{1,1_G} \rangle. \tag{7.19}$$

Admettons provisoirement l'égalité suivante :

$$B(P_1, s \cdot P, s\sigma)\mathfrak{s}\eta = (s\sigma')(m^{-1})\mathfrak{t}B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta. \tag{7.20}$$

Alors ceci joint à (7.19), montre que :

$$\langle \xi_{1,1_G}, v_{1,1_G} \rangle = \langle \xi(M' \cap P_1, t^{-1}\sigma, (s\sigma')(m)B(P_1, s \cdot P, \sigma)\mathfrak{s}\eta), v_{1,1_G} \rangle.$$

On utilise la deuxième relation de (4.6) en changeant m en m^{-1}, σ en $s\sigma$ et en remarquant que $t^{-1} = m^{-1}s$ pour trouver :

$$\langle \xi_{1,1_G}, v_{1,1_G} \rangle = \langle \xi(M' \cap P_1, s\sigma, B(P_1, s \cdot P, \sigma)\mathfrak{s}\eta), \lambda(m)v_{1,1_G} \rangle.$$

En tenant compte de (7.16), de (7.18) et de l'inversibilité des matrices B (voir Définition 3), on conclut que :

$$\eta = \eta',$$

ce qui équivaut à (7.7).

Il ne reste plus qu'à montrer (7.20) pour achever de prouver (ii). Il s'agit simplement de transport de structure. D'abord, pour $\eta \in \mathrm{Wh}(P, \sigma)$, on a :

$$\xi(P_1, s\sigma, B(P_1, s \cdot P, s\sigma)\mathfrak{s}\eta) = \xi(s \cdot P, s\sigma, \mathfrak{s}\eta) \circ A(s \cdot P, P_1, s\sigma).$$

En utilisant successivement la définition de $\mathfrak{s}\eta$ (voir (7.1)), (5.9), puis la définition des matrices B, on obtient :

$$\begin{aligned}\xi(P_1, s\sigma, B(P_1, s \cdot P, s\sigma)\mathfrak{s}\eta) &= \xi(P, \sigma, \eta)\lambda(s^{-1}) \circ A(s \cdot P, P_1, s\sigma) \\ &= \xi(P, \sigma, \eta) \circ A(P, t \cdot P_1, \sigma)\lambda(s^{-1}) \\ &= \xi(t \cdot P_1, \sigma, B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta)\lambda(s^{-1}).\end{aligned}$$

Utilisant (7.14) et tenant compte de la relation $st = m$, on en déduit :

$$\xi(P_1, s\sigma, B(P_1, s \cdot P, s\sigma)\mathfrak{s}\eta) = \xi(P_1, t^{-1}\sigma, \mathfrak{t}B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta)\lambda(m^{-1}).$$

On applique alors (4.6) pour en déduire :

$$\xi(P_1, s\sigma, B(P_1, s \cdot P, s\sigma)\mathfrak{s}\eta) = \xi(P_1, mt^{-1}\sigma, t^{-1}\sigma'(m^{-1})\mathfrak{t}B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta).$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Mais $m = st$ et $t^{-1}\sigma(m^{-1}) = s\sigma(m^{-1}) = \sigma(s^{-1}t^{-1})$. Finalement :

$$\xi(P_1, s\sigma, B(P_1, s \cdot P, s\sigma)\eta) = \xi(P_1, s\sigma, s\sigma'(m^{-1})\mathfrak{t}B(t \cdot P_1, P, \sigma)\eta).$$

Ceci prouve (7.20) et achève de prouver (ii).

Le point (iii) résulte immédiatement de (4.16) et (7.1). □

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G, (σ, E) une représentation lisse de G. On définit, à l'aide de la Définition 2 et par bilinéarité, une application linéaire de $\mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_P^G E$ dans $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$, notée encore E_P^G. On remarquera que σ a été omis dans la notation.

C'est un entrelacement entre, d'une part, le produit tensoriel de la représentation triviale de G sur $\mathrm{Wh}(P, \sigma)$ avec $i_P^G\sigma$ et, d'autre part, la représentation régulière droite, ρ, de G sur $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$.

Soit $P' = M'U'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de G, $P = MU \subset M'$ un sous-groupe parabolique semi-standard de M' et soit $Q = PU'$. Soit (σ, E) une représentation lisse irréductible de M. De l'application :

$$E_P^{M'} : \mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_P^{M'} E \to C^\infty(U_0 \cap M'\backslash M', \psi),$$

se déduit, par fonctorialité de l'induction et l'identification de $i_{P'}^G(i_P^{M'}E)$ avec $i_Q^G E$, une application :

$$E_P^{P'} : \mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_Q^G E \to i_{P'}^G C^\infty(U_0 \cap M'\backslash M', \psi).$$

Si ϕ est un élément de $\mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_Q^G E$, on le regarde comme fonction sur G à valeurs dans $\mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes E$. On a un isomorphisme de G-modules entre $i_Q^G E$ et $i_{P'}^G(i_P^{M'}E)$. Tenant compte de l'identité :

$$(\delta_Q)_{|M} = (\delta_P)_{|M}(\delta_{P'})_{|M},$$

on voit facilement que cet isomorphisme, $v \mapsto \tilde{v}$, $v \in i_Q^G E$, est donné par :

$$\tilde{v}(g)(m') = \delta_{P'}^{-1/2}(m')v(m'g).$$

L'évaluation en l'élément neutre dans la deuxième réalisation de $i_Q^G E$, donne lieu à une application, notée $r_{M'}$, de $i_Q^G E$ dans $i_P^{M'} E$. Soit $v \in i_Q^G E$. On a :

$$(r_{M'}(v))(m') = \delta_{P'}^{-1/2}(m')v(m'), \quad m' \in M',$$

de sorte que :

$$\rho(m')r_{M'}(v) = \delta_{P'}^{-1/2}(m')r_{M'}(\rho(m')v), \quad m' \in M'. \tag{7.21}$$

On note encore $r_{M'}$ l'application de $\mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_Q^G E$ dans $\mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_{M' \cap P}^{M'} E$ obtenue par tensorisation de l'identité de $\mathrm{Wh}(P, \sigma)$ avec $r_{M'}$. On a :

$$[E_P^{P'}(\phi)(1)](m') = [E_P^{M'}(r_{M'}\phi)](m'), \quad m' \in M'. \tag{7.22}$$

De plus, si $P = M'$, $i_{M'}^{M'} E$ s'identifie naturellement à E. Avec cette identification on a :

$$(E_{M'}^{P'}\phi)(g) = E_{M'}^{M'}(\phi(g)), \quad g \in G. \tag{7.23}$$

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

On définit, pour $f \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ et pour $P = MU$ sous-groupe parabolique standard de G :

$$(f_P^{\mathrm{ind}}(g))(m) = (\rho(g)f)_P(m), \quad g \in G,\ m \in M. \tag{7.24}$$

On vérifie aisément grâce (3.8) que $f_P^{\mathrm{ind}} \in i_P^G C^\infty(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$ et que l'application $f \mapsto f_P^{\mathrm{ind}}$ entrelace les représentations régulières droites, ρ, de G sur $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ et $i_P^G C^\infty(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$.

Proposition 6. *Soit $P = MU$ (respectivement $P' = M'U'$) un sous-groupe parabolique anti-standard (respectivement standard) de G, (σ, E) une représentation lisse irréductible cuspidale G-régulière de M.*

Si $s \in W(M'|G|M)$, on identifie $i_{P_s}^G sE$ avec $i_{P'}^G(i_{M'\cap s\cdot P}^{M'} sE)$ et $\mathrm{Wh}(\tilde P_s, s\sigma)$ avec $\mathrm{Wh}(M' \cap s \cdot P, s\sigma)$ (voir Théorème 3 (i)).

Avec ces identifications, on note $C(s, P', P, \sigma)$ l'application linéaire de $\mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_P^G E$ dans $\mathrm{Wh}(\tilde P_s, s\sigma) \otimes i_{P_s}^G sE$ définie par :

$$C(s, P', P, \sigma) = B(\tilde P_s, s \cdot P, s\sigma) \otimes (A(P_s, s \cdot P, s\sigma)\lambda(s)).$$

Alors, pour $\phi \in \mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_P^G E$, $E_P^G(\phi)_{P'}^{\mathrm{ind}} = 0$ si $W(M'|G|M)$ est vide et sinon :

$$E_P^G(\phi)_{P'}^{\mathrm{ind}} = \sum_{s\in W(M'|G|M)} E_{M'\cap s\cdot P}^{P'}(C(s, P', P, \sigma)\phi),$$

$$E_P^G(\phi)_{P'} = \sum_{s\in W(M'|G|M)} E_{M'\cap s\cdot P}^{M'}(r_{M'}(C(s, P', P, \sigma)\phi)), \quad \phi \in \mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_P^G E.$$

Démonstration. Les deux membres de la première égalité sont des fonctions sur $G \times M'$. Par équivariance, on se réduit à démontrer l'égalité en $(1, m')$ pour tout ϕ et tout $m' \in M'$. Cette égalité se réduit, grâce à (7.22), à la seconde. Grâce à (3.8) et (7.21), on se réduit à prouver la seconde égalité évaluée en 1. Mais avec les notations du théorème précédent, pour $\phi = \eta \otimes v$ avec $\eta \in \mathrm{Wh}(\sigma)$, $v \in i_P^G E$, on a :

$$E_P^G(\phi)_{P'}(1) = \sum_{s\in W(M'|G|M)} \langle \xi_s, v_s \rangle.$$

En utilisant la définition de ξ_s et v_s, ce théorème montre la deuxième égalité évaluée en 1. □

8. Transformée de Fourier–Whittaker et produit scalaire de paquets d'ondes

8.1. Transformée d'Harish-Chandra de paquets d'ondes

Définition 4. Soit P un sous-groupe parabolique anti-standard de G et $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse cuspidale irréductible de M. On utilise les notations de la Proposition 6.2 (iii).

On dit que $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G)$ est régulière si pour tout sous-groupe parabolique standard $P' = M'U'$ de G et $s \in W(M'|G|M)$, l'application $\sigma \mapsto C(s, P', P, \sigma)\phi(\sigma)$ est polynomiale sur $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$. On dit que ϕ est très régulière si de plus lorsque M' et M sont

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

conjugués, pour tout $g \in G$, l'application $\sigma \mapsto [(\tilde{C}(P', P, s, s\sigma)\phi)(s\sigma)](g)$ est polynomiale sur $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$, où

$$[\tilde{C}(s, P', P, s, s\sigma)\phi](s\sigma) \\ := j(P', P'^{-}, s \cdot P, s\sigma)[B(P', s \cdot P, s\sigma) \otimes (A(P', s \cdot P, s\sigma)\lambda(s))]\phi(\sigma). \quad (8.1)$$

On fait agir G sur $\mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh}(P, \cdot) \otimes i_P^G)$ par une représentation notée $\rho_\bullet$ définie par :

$$(\rho_\bullet(g)F)(P, \sigma) = (\mathrm{Id} \otimes i_P^G\sigma(g))F(P, \sigma).$$

(8.2) *Si ϕ est régulière (respectivement très régulière) et $g \in G$, $\rho_\bullet(g)\phi$ est régulière (respectivement très régulière).*

D'après les propriétés de rationalité des intégrales d'entrelacement (voir (5.2)) et des matrices B (voir Proposition 3), on voit que la propriété suivante est vraie.

(8.3) *Il existe une fonction polynomiale sur $\mathcal{O}$ non identiquement nulle, $p_{\mathcal{O}}$, telle que, pour tout $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G)$, $p_{\mathcal{O}}\phi$ soit très régulière.*

Par ailleurs :

(8.4) *si ϕ est régulière (respectivement très régulière) et $p \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O})$, $p\phi$ est régulière (respectivement très régulière).*

On note $N(D, \mathcal{O})$ l'ensemble des $g \in G$ qui normalisent M et préservent $\mathcal{O}$. On note $W(G, \mathcal{O})$ le quotient de $N(D, \mathcal{O})$ par M qui est fini. Si $p \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O})$, $w \in N(D, \mathcal{O})$ et (σ, E) est un objet de $\mathcal{O}$, $p(w^{-1}\sigma)$ ne dépend que de la classe de w dans $W(G, \mathcal{O})$. Ceci permet de faire agir $W(G, \mathcal{O})$ sur $\mathrm{Pol}(\mathcal{O})$ en posant $p^w(\sigma) = p(w^{-1}\sigma)$. On remarque que si $p \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O})$, on a :

$$\prod_{w \in W(G,\mathcal{O})} p^w \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O})^{W(G,\mathcal{O})}. \quad (8.5)$$

On déduit alors de (8.4) et (8.5) que :

$$\text{on peut choisir et on choisira } p_{\mathcal{O}} \text{ invariante par } W(G, \mathcal{O}) \text{ dans (8.3).} \quad (8.6)$$

Montrons la propriété suivante.

(8.7) *Soit (σ_0, E_0) objet de $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$ et $\phi_0 \in \mathrm{Wh}(\sigma) \otimes i_P^G E_0$ tel que $p_{\mathcal{O}}(\sigma_0)$ soit non nul. Il existe $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G)$ très régulière telle que $\phi(\sigma_0) = \phi_0$ et $\phi(w\sigma_0) = 0$ pour $w \in W(G, \mathcal{O})$ tel que $w\sigma_0$ n'est pas équivalente à σ.*

En effet, il existe $\phi_1 \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G)$ tel que $\phi_1(\sigma_0) = p_{\mathcal{O}}(\sigma_0)^{-1}\phi_0(\sigma_0)$. En multipliant ϕ_1 par un élément de $\mathrm{Pol}(\mathcal{O})$ valant 1 en σ_0 et 0 en $w\sigma_0$ pour $w \in W(G, \mathcal{O})$ tel que $w\sigma_0$ n'est pas équivalente à σ_0, on peut supposer en outre que $\phi_1(w\sigma_0) = 0$ pour $w \in W(G, \mathcal{O})$ tel que $w\sigma_0$ n'est pas équivalente à σ_0. En utilisant (8.3) et (8.6), on conclut que $\phi = p_{\mathcal{O}}\phi_1$ a les propriétés voulues.

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Le centre de Bernstein sera noté $\mathrm{ZB}(G)$. C'est une algèbre telle pour toute représentation lisse (π, V) de G, tout $z \in \mathrm{ZB}(G)$ définit canoniquement un endomorphisme de G que l'on notera $\pi(z)$. On sait qu'on a la propriété suivante (voir [**11**]) :

(8.8) *Si* $p \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O})^{W(G,\mathcal{O})}$, *il existe* z *élément du centre de Bernstein de* G, $\mathrm{ZB}(G)$, *tel que pour tout* (σ, E) *objet de* $\mathcal{O}$, $i_P^G\sigma(z)$ *est la multiplication par le scalaire* $p(\sigma)$.

De (8.3), (8.5) et (8.8), on déduit le lemme suivant.

Lemme 5. *Si* $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G)$, *il existe* $z \in \mathrm{ZB}(G)$ *tel que* $\rho_\bullet(z)\phi$ *soit très régulière et non nulle si* ϕ *est non nulle.*

Lemme 6. *Soit* $\mathcal{O}$ *l'orbite inertielle d'une représentation lisse, cuspidale et irréductible de* M. *On rappelle qu'on a choisi une mesure de Haar sur* $X(M)_{\mathrm{u}}$ *(voir § 1.2). On munit* $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$ *d'une mesure* $X(M)_{\mathrm{u}}$*-invariante et telle que pour tout objet de* $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$, (σ, E), *l'application de* $X(M)_{\mathrm{u}}$ *dans* $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$, *qui à* χ *associe* $[\sigma_\chi]$, *préserve localement les mesures. Si* $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G)$, *on définit* $f_\phi \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ *par :*

$$f_\phi(g) := \int_{\mathcal{O}_{\mathrm{u}}} E_P^G(\phi(\sigma))(g)\,\mathrm{d}\sigma, \quad g \in G,$$

qu'on appellera paquet d'ondes de ϕ.

(i) *On a, pour* $g \in G$, $\rho(g)f_\phi = f_{\rho_\bullet(g)\phi}$.

(ii) *Si* ϕ *est régulière,* f_ϕ *est élément de* $C_{\mathrm{c}}^\infty(U_0\backslash G, \psi)$.

Démonstration. Le point (i) résulte immédiatement des définitions.

Prouvons (ii). Il existe une partie compacte de G, Ω, telle que $G = U_0A_0\Omega$, car M_0 est compact modulo A_0 et $G = P_0K$. Par ailleurs ϕ est invariante par un sous-groupe compact ouvert H. Alors Ω est contenu dans un nombre fini de classes à droite modulo H, g_iH. Utilisant (i) pour les g_i, pour démontrer ce que l'on veut il suffit donc de prouver que :

$$\text{pour tout } \phi \text{ régulière, la restriction de } f_\phi \text{ à } A_0 \text{ est à support compact.} \tag{8.9}$$

Mais cela équivaut à montrer que pour un $a_0 \in A_0$, $\rho(a_0)f_\phi$ qui est égal à $f_{\rho_\bullet(a_0)\phi}$ d'après (i), est à support compact. D'après (3.5), pour $a_0 \in A_0$ bien choisi, la restriction de $\rho(a_0)f_\phi$ à A_0 est à support dans A_0^-. On est donc ramené à prouver :

$$\text{pour tout } \phi \text{ régulière, la restriction de } f_\phi \text{ à } A_0^- \text{ est à support compact.} \tag{8.10}$$

Montrons d'abord :

$$\begin{aligned} &\text{si } \Omega_G \text{ est un sous-ensemble compact de } G \text{ et } \phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G), \\ &\qquad\qquad f_\phi \text{ restreinte à } \Omega_G A_G \text{ est à support compact.} \end{aligned} \tag{8.11}$$

En utilisant l'invariance de ϕ sous un sous-groupe compact ouvert de G et en procédant comme ci-dessus, on se ramène à prouver l'assertion pour Ω_G réduit à $\{1\}$. Dans ce cas,

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

il suffit de prouver que, si p est une fonction polynomiale sur $\mathcal{O}$, l'application de A_G dans $\mathbb{C}$, $a \mapsto \int_{\mathcal{O}_{\mathrm{u}}} p(\sigma)\sigma(a)\, \mathrm{d}\sigma$ est à support compact. Mais cela résulte du fait que la transformée de Fourier d'une fonction polynôme sur un tore est à support compact. Ceci prouve (8.11).

On suppose à nouveau ϕ régulière. Soit $\varepsilon > 0$ et $Q = LV$ un sous-groupe parabolique standard de G. On note Θ_Q l'ensemble des $\alpha \in \Delta(P_0)$ qui sont des racines de A_0 dans l'algèbre de Lie de L. Soit

$$X_Q = \{a \in A_0^- \mid |\alpha(a)|_F < \varepsilon,\ \alpha \in \Delta(P_0) \setminus \Theta_Q \text{ et } |\alpha(a)|_F \geqslant \varepsilon,\ \alpha \in \Theta_Q\}.$$

Alors, les X_Q forment une partition de A_0^-. De plus chaque X_Q est contenu dans un ensemble de la forme $A_L \Omega_Q$, où Ω_Q est un sous ensemble compact de A_0. Maintenant, d'après (3.7), on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que pour tout sous-groupe parabolique standard de G, Q :

$$f_\phi(a) = \delta_Q^{1/2}(a)(f_\phi)_Q(a), \quad a \in X_Q.$$

On note que, d'après la formule du terme constant des paquets d'ondes (voir [**14**, Proposition 3.17]) et, grâce au fait que ϕ est régulière et au Théorème 3, $(f_\phi)_Q$ est une somme de paquet d'ondes pour L. Par une application de (8.11) à chacun des termes de cette somme, et ceci pour tout Q on voit que (8.9) est vrai. Le lemme en résulte. $\square$

Définition 5. Si $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ et $P = MU$ est un sous-groupe parabolique anti-standard de G, on définit :

$$f^P(m) = \delta_P^{1/2}(m) \int_U f(mu)\, \mathrm{d}u, \quad m \in M.$$

On l'appelle la transformée d'Harish-Chandra de f relativement à P.

Le lemme suivant résulte des définitions.

Lemme 7. *Avec les notations ci-dessus, on a, pour $f \in C_{\mathrm{c}}^\infty(U_0\backslash G, \psi)$, $f^P \in C^\infty(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$.*

On définit alors $f^{P,\mathrm{ind}}$ par :

$$f^{P,\mathrm{ind}}(g, m) = (\rho(g)f)^P(m), \quad g \in G,\ m \in M. \tag{8.12}$$

Alors $f^{P,\mathrm{ind}} \in i_P^G C^\infty(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$.

Théorème 4. *Soit $P = MU$, $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques anti-standard de G, soit $\mathcal{O}$ l' orbite inertielle d'une représentation, lisse, cuspidale irréductible de M, et $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G)$. Pour ϕ très régulière on a :*

(i) *si le rang semi-simple de M' est inférieur ou égal à celui de M et si M' n'est pas conjugué à M, $f_\phi^{P',\mathrm{ind}}$ est nul ;*

(ii) *supposons M et M' conjugués ; pour tout $m' \in M'$ et $g \in G$, on a :*

$$(f_\phi^{P',\mathrm{ind}}(g))(m') = \sum_{s \in W(M'|G|M)} \int_{\mathcal{O}_{\mathrm{u}}} E_{M'}^{M'}[(\tilde{C}(s, P', P, s\sigma)\phi)(s\sigma)(g)](m')\, \mathrm{d}\sigma.$$

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Démonstration. Il suffit de prouver la formule pour $g = 1$ et $m' = 1$ et pour tout ϕ, car :

$$\rho(g) f_\phi = f_{\rho_\bullet(g)\phi},$$
$$f_\phi^{P'}(m') = (\rho(m') f_\phi^{P'})(1) = \delta_{P'}^{-1/2}(m')(\rho(m') f_\phi)^{P'}(1),$$

et pour v' élément de l'espace de $i_{P'}^G s\sigma$:

$$((i_{P'}^G s\sigma)(m'))(v')(1) = \delta_{P'}^{1/2}(m')(s\sigma(m'))(v'(1)).$$

On suppose maintenant $m' = g = 1$. Il s'agit donc de calculer $f_\phi^{P'}(1)$. On fixe un sous-groupe compact ouvert H comme dans (2.6) tel que ϕ est invariante par $\rho_\bullet(H)$.

(8.13) *Il existe une constante $c_H > 0$ telle que pour tout $\varphi \in C^\infty(H)$:*

$$\int_H \varphi(H)\,\mathrm{d}h = c_H \int_{H\cap U'^- \times H\cap M' \times H\cap U'} \varphi(u'^- m_1' u')\,\mathrm{d}u'^-\,\mathrm{d}m'\,\mathrm{d}u'.$$

On fixe $a \in A_{M'}$ tel que $|\alpha(a)|_F < 1$ pour tout $\alpha \in \Sigma(P')$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $U_n' = a^{-n}(H \cap U')a^n$. Comme f_ϕ est à support compact modulo U_0 (voir Lemme 6), il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geqslant N$:

$$f_\phi^{P'}(1) = \int_{U_n'} f_\phi(u')\,\mathrm{d}u' = \delta_{P'}(a)^{-n} \int_{H\cap U'} f_\phi(a^{-n} u' a^n)\,\mathrm{d}u'.$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{H\cap U'} f_\phi(a^{-n} u' a^n)\,\mathrm{d}u' = \int_{H\cap U'} \int_{\mathcal{O}_\mathrm{u}} E_P^G(\phi(\sigma))(a^{-n} u' a^n)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}u'.$$

On remarque que :

$$E_P^G(\phi(\sigma))(a^{-n} u' a^n) = E_P^G((\rho_\bullet(u' a^n)\phi)(\sigma))(a^{-n}).$$

On pose alors :

$$\phi_n = \int_{H\cap U'} \rho_\bullet(u' a^n)\phi\,\mathrm{d}u' \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_\mathrm{u}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G),$$

l'intégrale se réduisant à une combinaison linéaire de fonctions du type $\rho_\bullet(g)\phi$, puisque ϕ est H-invariante et donc $\rho_\bullet(a^n)\phi$ est invariante par $a^n H a^{-n}$. Alors :

$$\delta_{P'}(a^n) f_\phi^{P'}(1) = \int_{H\cap U'} f_\phi(a^{-n} u' a^n)\,\mathrm{d}u' = \int_{\mathcal{O}_\mathrm{u}} E_P^G(\phi_n(\sigma))(a^{-n})\,\mathrm{d}\sigma. \tag{8.14}$$

Comme $a^{-n}(H \cap M')(H \cap U'^-)a^n \subset H$, on a l'égalité :

$$\begin{aligned}\phi_n &= c \int_{H\cap U' \times H\cap M' \times H\cap U'^-} \rho_\bullet(u' m' u'^- a^n)\phi\,\mathrm{d}u'^-\,\mathrm{d}m'\,\mathrm{d}u' \\ &= c c_H^{-1} \int_H \rho_\bullet(h a^n)\phi\,\mathrm{d}h, \end{aligned} \tag{8.15}$$

où $c = \mathrm{vol}(H \cap M')^{-1}\,\mathrm{vol}(H \cap U'^-)^{-1}$. Donc $\phi_n \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_\mathrm{u}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G)^H$.

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

D'après les propriétés du terme constant (voir (3.7)), on peut choisir N assez grand pour que, pour tout $n \geqslant N$, on ait :

$$E_P^G(\phi_n(\sigma))(a^{-n}) = \delta_{P'^-}(a)^{-n/2} E_P^G(\phi_n(\sigma))_{P'^-}(a^{-n}). \tag{8.16}$$

Si M' et M sont comme dans (i), $W(M'|G|M)$ est vide et $E_P^G(\phi_n(\sigma))_{P'^-}$ est nul (voir Proposition 6 (i)). Cela montre (i).

On suppose maintenant M' et M conjugués. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la définition de ϕ_n montre que ϕ_n est une combinaison linéaire finie de fonctions du type $\rho_\bullet(g)\phi$. On déduit de la définition de $f_{P'^-}^{\mathrm{ind}}$ et de ϕ_n que :

$$E_P^G(\phi_n(\sigma))_{P'^-}(a^{-n}) = \int_{H\cap U'} [E_P^G(\phi(\sigma))_{P'^-}^{\mathrm{ind}}(u'a^n)](a^{-n})\,\mathrm{d}u'.$$

En utilisant successivement (3.8), l'égalité $\delta_{P'^-} = \delta_{P'}^{-1}$ et la définition de U'_n pour effectuer un changement de variable, on en déduit :

$$\begin{aligned} E_P^G(\phi_n(\sigma))_{P'^-}(a^{-n}) &= \delta_{P'}^{1/2}(a^{-n}) \int_{H\cap U'} [E_P^G(\phi(\sigma))_{P'^-}^{\mathrm{ind}}(a^{-n}u'a^n)](1)\,\mathrm{d}u' \\ &= \delta_{P'}^{1/2}(a^{n}) \int_{U'_n} [E_P^G(\phi(\sigma))_{P'^-}^{\mathrm{ind}}(u')](1)\,\mathrm{d}u'. \end{aligned}$$

En tenant compte de (8.14) et (8.16), on en déduit :

$$f_\phi^{P'}(1) = \int_{\mathcal{O}_\mathrm{u}} \int_{U'_n} [E_P^G(\phi(\sigma))_{P'^-}^{\mathrm{ind}}(u')](1)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}\sigma.$$

On va utiliser la Proposition 6 pour donner une expression de $E_P^G(\phi(\sigma))_{P'^-}^{\mathrm{ind}}$. Comme M et M' sont conjugués, pour tout $s \in W(M'|G|M)$, $M' \cap s\cdot P = M'$. Dans notre utilisation du Théorème 3, P' est ici remplacé par P'^- et P_s est ici égal à P'^-, $\tilde{P}_s$ est ici égal à P'. On a alors, grâce à la Proposition 6 et au Théorème de Fubini (qui s'applique car on intègre des fonctions continues sur un produit de parties compactes) :

$$f_\phi^{P'}(1) = \sum_{s\in W(M'|G|M)} \int_{\mathcal{O}_\mathrm{u}} \int_{U'_n} [E_{M'}^{P'}(C(s,P'^-,P,\sigma)\phi(\sigma))(u')](1)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}\sigma,$$

et on veut passer à la limite sur n. Mais un déplacement de contour d'intégration est nécessaire. Si χ est un caractère non ramifié de M, on note $\mathcal{O}_\mathrm{u}\chi$ l'ensemble des classes d'équivalence des représentations σ_χ lorsque σ décrit les objets de $\mathcal{O}_\mathrm{u}$. On munit $\mathcal{O}_\mathrm{u}\chi$ de la mesure obtenue par transport de structure de la mesure sur $\mathcal{O}_\mathrm{u}$. Posons :

$$\phi_s(\sigma) := C(s,P'^-,P,\sigma)\phi(\sigma) \in \mathrm{Wh}(P',s\sigma) \otimes i_{P'^-}^G(sE). \tag{8.17}$$

Comme ϕ est très régulière, ϕ_s est polynomiale en σ. Pour tout choix Λ_s, $s \in W(M'|G|M)$, de caractères non ramifiés de M, on a, pour des raisons d'holomorphie, en tenant compte de (7.23) :

$$f_\phi^{P'}(1) = \sum_{s\in W(M'|G|M)} \int_{\mathcal{O}_\mathrm{u}\Lambda_s} \int_{U'_n} [E_{M'}^{M'}(\phi_s(\sigma)(u'))](1)\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}\sigma. \tag{8.18}$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

On veut passer à la limite sur n dans cette expression pour un bon choix des Λ_s. Il faut majorer $[E_{M'}^{M'}(\phi_s(\sigma))(u')](1)$.

Soit (σ, E) un objet de $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}$. Soit $v_s \in i_{P'^-}^G(sE)_{s\Lambda_s}$, $\eta_s \in \mathrm{Wh}(P', s\sigma)$. On remarque que $\mathrm{Wh}(P', s\sigma)$ est égal à $\mathrm{Wh}(s\sigma)$, puisque P' est anti-standard. Alors, il résulte de la définition que :

$$[E_{M'}^{M'}(v_s \otimes \eta_s)(g)](1) = \langle \eta_s, v_s(g) \rangle.$$

On écrit, pour $u' \in U'$:

$$u' = u'^-(u')m'(u')k(u'), \quad u'^-(u') \in U'^-, \ m'(u') \in M', \ k(u') \in K,$$

de sorte que $m'(u') = m_{P'^-}(u')$. Tenant compte des propriétés de covariance de v_s, on voit que :

$$\langle \eta_s, v_s(u') \rangle = (s\Lambda_s)(m'(u'))\delta_{P'}^{-1/2}(m'(u'))\langle \eta_s, s\sigma(m'(u'))v_s(k(u'))\rangle.$$

On choisit $\Lambda_s = s^{-1}\delta_{P'}^{-1/2}$. Alors on a :

$$\langle \eta_s, v_s(u') \rangle = \delta_{P'}^{-1}(m'(u'))\langle \eta_s, s\sigma(m'(u'))v_s(k(u'))\rangle.$$

Tenant compte du fait que la restriction de v_s à K ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on déduit du Lemme 1 (ii) :

$$|\langle \eta_s, v_s(u) \rangle| \leqslant C\delta_{P'}^{-1}(m'(u)),$$

où C est une constante qui ne dépend que de la restriction de v_s à K et de η_s mais pas de $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathrm{u}}$.

On en déduit qu'il existe $C' > 0$ tel que pour tout $s \in W(M'|G|M)$ et $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathrm{u}}\Lambda_s$:

$$|[E_{M'}^{M'}(\phi_s(\sigma))(u')](1)| \leqslant C'\delta_{P'}^{-1}(m'(u')), \quad u' \in U'.$$

Comme le second membre de cette inégalité est une fonction intégrable sur $\mathcal{O}_{\mathrm{u}}\Lambda_s \times U'$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée et déduire de (8.18) :

$$f_\phi^{P'}(1) = \sum_{s \in W(M'|G|M)} \int_{\mathcal{O}_{\mathrm{u}}\Lambda_s} \int_{U'} [E_{M'}^{M'}(\phi_s(\sigma)(u'))](1)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}u',$$

la fonction sous le signe intégrale étant intégrable pour la mesure produit. On peut appliquer le théorème de Fubini et commencer par calculer l'intégrale sur U'. Elle fait apparaitre l'opérateur $A(P', P'^-, s\sigma)$. On trouve, pour $\sigma \in \mathcal{O}_{\mathrm{u}}\Lambda_s$, en tenant compte de (8.17) et de la définition des fonctions C (voir Proposition 6) et grâce à (7.22) et (7.23) :

$$\int_{U'} [E_{M'}^{M'}(\phi_s(\sigma))(u')](1)\,\mathrm{d}u' \\ = E_{M'}^{M'}[((\mathrm{Id}_{\mathrm{Wh}(P',s\sigma)} \otimes A(P', P'^-, s\sigma))C(s, P'^-, P, \sigma)\phi(\sigma))(1)](1).$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Tenant compte de la définition des fonctions C et de (5.7), on voit que $f_\phi^{P'}(1)$ est égal à la somme sur $s \in W(M'|G|M)$ de :

$$\int_{\mathcal{O}_\mathrm{u}\Lambda_s} j(P', P'^-, s \cdot P, s\sigma) E_{M'}^{M'}[(B(P', s \cdot P, s\sigma) \otimes (A(P', s \cdot P, s\sigma)\lambda(s))\phi(\sigma))(1)](1)\,\mathrm{d}\sigma.$$

En utilisant la définition des fonction $\tilde{C}$ et le fait que ϕ est très régulière, on peut remplacer l'intégrale sur $\mathcal{O}_\mathrm{u}\Lambda_s$ par l'intégrale sur $\mathcal{O}_\mathrm{u}$, pour des raisons d'holomorphie. Le théorème en résulte. □

8.2. Transformée de Fourier–Whittaker et transformée d'Harish-Chandra

Soit $P = MU$ un sous groupe parabolique anti-standard de G et $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse, unitaire, irréductible et cuspidale de M.

Proposition 7. *Soit* (σ, E) *objet de* $\mathcal{O}_\mathrm{u}$. *Soit* $f \in C_\mathrm{c}^\infty(U_0\backslash G, \psi)$, $g \in G$.

(i) *On a :* $(\rho_\bullet(g)\hat{f})(P, \sigma) = (\rho(g)f)\hat{}\,(P, \sigma)$.

(ii) *On rappelle que* $\mathrm{Wh}(\sigma) \otimes i_P^G\sigma$ *est muni du produit scalaire obtenu par produit tensoriel du produit scalaire sur* $\mathrm{Wh}(\sigma)$ *et sur* $i_P^G E$. *Pour* $f \in C_\mathrm{c}^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ *et* $f' \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$, *on note*

$$(f, f')_G = \int_{U_0\backslash G} f(g)\overline{f'(g)}\,\mathrm{d}g.$$

Alors :

$$(f, E_P^G(\phi))_G = (\hat{f}(P, \sigma), \phi), \quad \phi \in \mathrm{Wh}(\sigma) \otimes i_P^G E.$$

Démonstration. Les deux affirmations résultent immédiatement de la définition de $\hat{f}$. □

Proposition 8. *Soit* $f \in C_\mathrm{c}^\infty(U_0\backslash G, \psi)$. *On suppose en outre que pour tout* $g \in G$, $f^{P,\mathrm{ind}}(g)$ *est élément de* $C_\mathrm{c}^\infty(U_0 \cap M\backslash M, \psi)$. *Alors :*

$$\hat{f}(P, \sigma)(g) = (f^{P,\mathrm{ind}}(g))\hat{}\,(M, \sigma), \quad g \in G,$$

égalité qu'on réécrit :

$$\hat{f}(P, \sigma) = (f^{P,\mathrm{ind}})\hat{}\,(M, \sigma).$$

Démonstration. Soit $v \in i_P^G E$. Définissons :

$$I := (\hat{f}(P, \sigma), \eta \otimes v).$$

Utilisant la définition de la transformée de Fourier puis celle des intégrales de Jacquet, on voit que :

$$I = (f, E_P^G(\eta \otimes v))_G,$$

c'est à dire :

$$I = \int_{U_0\backslash G} f(g)\overline{\langle \xi(P, \sigma, \eta), i_P^G\sigma(g)v\rangle}\,\mathrm{d}g.$$

Avant de poursuivre la preuve de la proposition, montrons l'assertion suivante.

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

(8.19) *Soit Ω un sous-ensemble de G, compact modulo l'action à gauche de U_0. Il existe une fonction continue à support compact sur G, τ, telle pour tout $g \in \Omega$, $\int_{U_0} \tau(ug)\,\mathrm{d}g = 1$.*

Soit s une section continue de la projection, p, de G sur $U_0\backslash G$ (voir, par exemple, [**19**]). On considère une fonction τ_1 continue positive, à support compact sur $U_0\backslash G$ et égale à 1 sur un voisinage de Ω, regardé ici comme un sous-ensemble de $U_0\backslash G$. On note τ_0 une fonction continue sur U_0, positive, à support compact et d'intégrale 1. On pose

$$\tau(g) = \tau_0(u(g))\tau_1(p(g)), \quad \text{avec } u(g) = g(s(p(g)))^{-1}.$$

On vérifie qu'elle satisfait toutes les propriétés voulues. Ceci prouve (8.19).

Appliquant ceci au support de f et reprenant le calcul de I, on trouve :

$$I = \int_G f(g)\tau(g)\overline{\langle \xi(P,\sigma,\eta), i_P^G\sigma(g)v\rangle}\,\mathrm{d}g.$$

On choisit maintenant un objet de $\mathcal{O}$, (σ, E), tel que $\xi(P,\sigma,\eta)$ soit donné par une intégrale convergente (voir Proposition 1). On en déduit :

$$\langle \xi(P,\sigma,\eta), i_P^G\sigma(g)v\rangle = \int_{U^-} \psi(u^-)^{-1}\langle \eta, v(u^-g)\rangle\,\mathrm{d}u^-, \tag{8.20}$$

où l'intégrale est absolument convergente. Donc :

$$I = \int_G \tau(g)f(g)\int_{U^-} \overline{\psi(u^-)^{-1}\langle \eta, v(u^-g)\rangle}\,\mathrm{d}u^-\,\mathrm{d}g.$$

L'application τf est une application continue sur G, à support compact. Ce support est donc contenu dans un nombre fini de H-classes a droite, où H est un sous-groupe compact ouvert de G fixant v. Comme pour tout $g \in G$, l'intégrale du membre de droite de (8.20) est absolument convergente, le Théorème de Fubini s'applique. En utilisant l'égalité $f(u^-g) = \psi(u^-)f(g)$ et le fait que ψ est unitaire, on a :

$$I = \int_{U^-}\int_G \tau(g)f(u^-g)\overline{\langle \eta, v(u^-g)\rangle}\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}u^-.$$

On change g en u^-g dans l'intégrale intérieure :

$$I = \int_{U^-}\int_G \tau((u^-)^{-1}g)f(g)\overline{\langle \eta, v(g)\rangle}\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}u^-.$$

Tenant compte de l'invariance à droite par $U_0 \cap M$ de $f(g)\overline{\langle \eta, v(g)\rangle}$, on obtient :

$$I = \int_{U^-}\int_{U_0\cap M}\int_{U_0\cap M\backslash G} \tau((u^-)^{-1}u_0g)f(g)\overline{\langle \eta, v(g)\rangle}\,\mathrm{d}g\,\mathrm{d}u_0\,\mathrm{d}h.$$

Transformant la succession des intégrales sur U^- et $U_0 \cap M$ en une intégrale sur U_0 et en utilisant les propriétés de τ (voir (8.19)), on en déduit :

$$I = \int_{U_0\cap M\backslash G} f(g)\overline{\langle \eta, v(g)\rangle}\,\mathrm{d}g,$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

où l'intégrale est absolument convergente. Utilisant la formule intégrale (2.8) et tenant compte du fait que v est invariante à gauche par U, il s'ensuit :

$$I = \int_{U\times(U_0\cap M\backslash M)\times U^-} f(umu^-)\overline{\langle\eta, v(mu^-)\rangle}\delta_P^{-1}(m)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}u^-.$$

Mais on a :

$$\langle\eta, v(mu^-)\rangle = \delta_P^{1/2}(m)E_M^M(\eta\otimes v(u^-))(m)$$

et

$$\int_U f(umu^-)\,\mathrm{d}u = \delta_P^{1/2}(m)[f^{P,\mathrm{ind}}(u^-)](m).$$

Donc les fonctions modules disparaissent et l'on a :

$$I = \int_{(U_0\cap M\backslash M)\times U^-} [f^{P,\mathrm{ind}}(u^-)](m)\overline{E_M^M(v(u^-)\otimes\eta)(m)}\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}u^-.$$

Mais $(f^{P,\mathrm{ind}})\hat{}(M,\sigma)$ est un élément de $\mathrm{Wh}(P,\sigma)\otimes i_P^G E$ et

$$I = ((f^{P,\mathrm{ind}})\hat{}(M,\sigma), \eta\otimes v).$$

Comme cela est vrai pour tout $v\in i_P^G E$, $\eta\in\mathrm{Wh}(P,\sigma)$, cela prouve l'égalité voulue, pour σ comme-ci dessus. Cette égalité s'étend à tout (σ, E) objet de $\mathcal{O}$ par polynomialité des deux membres. □

8.3. Transformée de Fourier–Whittaker de paquets d'ondes

Théorème 5. *Soient $P = MU$, $P' = M'U'$ des sous-groupes paraboliques anti-standard de G tels que M et M' soient conjugués, $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse cuspidale irréductible de M. Soit $\phi\in\mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh}\otimes i_P^G)$ très régulière. Soit (σ_1, E_1) une représentation lisse, cuspidale, unitaire et irréductible de M'. Alors*

$$\hat{f}_\phi(g)(P',\sigma_1) = \sum_{s\in W(M'|G|M),\, s^{-1}\sigma_1\in\mathcal{O}_{\mathrm{u}}} [\tilde{C}(P',P,s,\sigma_1)\phi](\sigma_1).$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas $M = G$. Soit (σ_1, E_1) une représentation lisse, cuspidale, unitaire et irréductible de G, $\phi_1\in\mathrm{Wh}(\sigma_1)\otimes E_1$.

Pour toute représentation π de G admettant un caractère central, notons χ_π la restriction de celui-ci à A_G. On a :

$$\begin{aligned}(f_\phi, E_G^G(\phi_1))_G &= \int_{U_0\backslash G} f_\phi(g)\overline{E_G^G(\phi_1)(g)}\,\mathrm{d}g\\ &= \int_{A_G U_0\backslash G} \varphi(g)\overline{(E_G^G(\phi_1))(g)}\,\mathrm{d}g,\end{aligned}$$

où

$$\varphi(g) = \int_{A_G} f_\phi(ag)\chi_{\sigma_1}(a^{-1})\,\mathrm{d}a.$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Comme pour (σ, E) objet de $\mathcal{O}$, $E_G^G(\phi(\sigma))(ag) = \chi_\sigma(a) E_G^G(\phi(\sigma))(g)$, on a l'égalité :

$$\varphi(g) = \int_{A_G} \chi_{\sigma_1}(a^{-1}) \int_{\mathcal{O}_\mathrm{u}} \chi_\sigma(a) E_G^G(\phi(\sigma))(g)\,\mathrm{d}\sigma\,\mathrm{d}a.$$

La restriction de χ_σ à $A_G \cap K$ ne dépend pas de (σ, E) objet de $\mathcal{O}$. Si les restrictions de χ_σ et χ_{σ_1} à $A_G \cap K$ sont distinctes, alors $\varphi(g) = 0$. Supposons ces restrictions égales. On peut appliquer la formule d'inversion de Fourier sur $A_G/A_G \cap K$. La définition de l'intégrale sur $\mathcal{O}_\mathrm{u}$ et la normalisation des mesures sur $A_G/A_G \cap K$, $X(G)_\mathrm{u}$ (voir § 2.2) et $\mathcal{O}_\mathrm{u}$ (voir Lemme 6) conduit à l'égalité :

$$\varphi = \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_u,\, \chi_{\sigma | A_M} = \chi_{\sigma_1 | A_M}} E_G^G(\phi(\sigma)).$$

D'où l'on déduit :

$$(f_\phi, E_G^G(\phi_1))_G = \sum_{\sigma \in \mathcal{O}_u,\, \chi_{\sigma | A_M} = \chi_{\sigma_1 | A_M}} \int_{A_G U_0 \backslash G} E_G^G(\phi(\sigma))(g) \overline{(E_G^G(\phi_1))(g)}\,\mathrm{d}g.$$

Le Lemme de Schur montre que le terme correspondant à σ dans cette dernière expression est nul si σ n'est pas équivalente à σ_1. De plus si $\sigma = \sigma_1$, d'après le Lemme 4, ce terme est égal à $(\phi(\sigma_1), \phi_1)_G$. On obtient finalement :

$$(f_\phi, E_G^G(\phi_1)) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\sigma_1, E_1) \text{ n'est pas un objet de } \mathcal{O}, \\ (\phi(\sigma_1), \phi_1) & \text{si } (\sigma_1, E_1) \text{ est un objet de } \mathcal{O}. \end{cases} \tag{8.21}$$

En utilisant la Proposition 7, on en déduit le théorème dans le cas $M = G$.

Retournons au cas général. On a, d'après le Théorème 4 :

$$f_\phi^{P',\mathrm{ind}}(g) = \sum_{s \in W(M'|G|M)} f_{\phi_s}^{M'},$$

où ϕ_s est la fonction sur $s\mathcal{O}_\mathrm{u}$ à valeurs dans $\mathrm{Wh} \otimes i_{M'}^{M'}$ définie par :

$$\phi_s(\sigma_1) = [\tilde{C}(s, P', P, \sigma_1)\phi(g)](\sigma_1).$$

C'est un élément de $\mathrm{Pol}(s\mathcal{O}_\mathrm{u}, \mathrm{Wh} \otimes i_{M'}^{M'})$, d'après le fait que ϕ est très régulière. On utilise le Lemme 6 pour M' au lieu de G et P, pour voir que l'on peut appliquer la Proposition 8 à f_ϕ pour exprimer $\hat{f}_\phi(P', \sigma_1)$ à l'aide de $f_\phi^{P',\mathrm{ind}}$. Joint à ce que l'on vient de démontrer pour le groupe M', cela implique le théorème. □

8.4. Produit scalaire de paquets d'ondes

Proposition 9. *Soit $P = MU$, $P' = M'U'$ deux sous-groupes paraboliques anti-standard de G. Soit $\mathcal{O}$ (respectivement $\mathcal{O}_1$) l'orbite inertielle d'une représentation lisse, irréductible et cuspidale de M (respectivement M'), $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_\mathrm{u}, \mathrm{Wh}(P, \sigma) \otimes i_P^G E)$, $\phi_1 \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{1\mathrm{u}}, \mathrm{Wh} \otimes i_{P'}^G)$ très régulières.*

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

(i) *Si M et M' ne sont pas conjugués dans G, $(f_\phi, f_{\phi_1})_G$ est nul.*

(ii) *Si M et M' sont conjugués dans G, $(f_\phi, f_{\phi_1})_G$ est égal à :*

$$\int_{O_{1u}} \sum_{s \in W(M'|G|M),\, s\mathcal{O} = \mathcal{O}_1} ([\tilde{C}(s, P', P, \sigma_1)\phi](\sigma_1), \phi_1(\sigma_1))\, \mathrm{d}\sigma_1.$$

Démonstration. La démonstration est semblable à celle de [**25**, Proposition VI.2.2]. Nous la donnons pour la commodité du lecteur.

On a l'égalité

$$(f_\phi, f_{\phi_1})_G = \int_{U_0 \backslash G} f_\phi(g) \int_{\mathcal{O}_{1\mathrm{u}}} \overline{E^G_{P'}(\phi_1(\sigma_1))(g)}\, \mathrm{d}\sigma_1\, \mathrm{d}g.$$

Comme $\mathcal{O}_{1\mathrm{u}}$ est compact et comme f_ϕ est à support compact d'après le Lemme 6, l'intégrale double est absolument convergente et l'on obtient :

$$(f_\phi, f_{\phi_1})_G = \int_{\mathcal{O}_{1\mathrm{u}}} (f_\phi, E^G_{P'}(\phi_1(\sigma_1)))_G\, \mathrm{d}\sigma_1$$

et d'après la définition de $\hat{f}$:

$$(f_\phi, f_{\phi_1})_G = \int_{\mathcal{O}_{1\mathrm{u}}} (\hat{f}_\phi(P', \sigma_1), \phi_1(\sigma_1))\, \mathrm{d}\sigma_1.$$

Supposons le rang semi-simple de M' inférieur ou égal à celui de M. En utilisant la Proposition 8 et le Théorème 4 (i), on voit que $(f_\phi, f_{\phi_1})_G = 0$ si M n'est pas conjugué à M'. Si le rang semi-simple de M' est strictement plus grand que celui de M, il suffit d'appliquer la relation $(f_\phi, f_{\phi_1})_G = \overline{(f_{\phi_1}, f_\phi)_G}$, pour achever la preuve de (i).

Supposons maintenant M et M' conjugués dans G. Le Théorème 5 calcule $\hat{f}_\phi(P', \sigma_1)$, ce qui conduit à (ii). □

8.5. Adjoint de la matrice B

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer (6.7).

Théorème 6. *Soit P, Q des sous-groupes paraboliques semi-standard de G possédant le même sous-groupe de Lévi semi-standard, M. On suppose P anti-standard. Soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse, irréductible et cuspidale de M. On a l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}_\mathrm{u}$:*

$$B(P, Q, \sigma)^* = B(Q, P, \sigma).$$

Démonstration. Soit P' le sous-groupe parabolique anti-standard de G auquel Q est conjugué et $\mathcal{O}_1$ une orbite inertielle de M' conjuguée de $\mathcal{O}$ par un élément de $W(M'|G|M)$. Soit $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_\mathrm{u}, i^G_P \otimes \mathrm{Wh})$, $\phi_1 \in \mathrm{Pol}(O_{1u}, i^G_{P'} \otimes \mathrm{Wh})$ très régulières. Alors, d'après la proposition précédente :

$$(f_\phi, f_{\phi'})_G = \int_{O_{1u}} \sum_{s \in W(M'|G|M),\, s\mathcal{O} = \mathcal{O}_1} ([\tilde{C}(s, P', P, \sigma_1)\phi](\sigma_1), \phi_1(\sigma_1))\, \mathrm{d}\sigma_1. \qquad (8.22)$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Puis en utilisant $(f_\phi, f_{\phi'})_G = \overline{(f_{\phi'}, f_\phi)_G}$, on a :

$$(f_\phi, f_{\phi'})_G = \int_{O_u} \sum_{t \in W(M|G|M'),\, t^{-1}\mathcal{O}=\mathcal{O}_1} (\phi(\sigma), [\tilde{C}(t, P, P', \sigma)\phi_1](\sigma))\, \mathrm{d}\sigma.$$

On pose $\sigma_1 = t^{-1}\sigma$. D'où :

$$(f_\phi, f_{\phi'})_G = \int_{O_{1u}} \sum_{t \in W(M|G|M'),\, t^{-1}\mathcal{O}=O_1} (\phi(t\sigma_1), [\tilde{C}(t, P, P', t\sigma_1)\phi_1](t\sigma_1))\, \mathrm{d}\sigma_1. \qquad (8.23)$$

A $s \in W(M'|G|M)$ correspond un unique élément t de $W(M|G|M')$ tel que $st = m' \in M_0 \cap K$.

Montrons l'égalité de fonctions rationnelles sur $\mathcal{O}_{1\mathrm{u}}$:

$$j(P', P'^-, s \cdot P, \sigma_1) = \overline{j(P, P^-, t \cdot P', s\sigma_1)}.$$

D'abord, d'après (5.6) et (5.7) les deux membres de l'égalité à prouver sont réels, donc on peut ignorer la conjugaison complexe. Alors l'égalité résulte immédiatement de (5.7) et (5.10).

Si ϕ_1 est très régulière, il en va de même de $p_1\phi_1$ pour tout $p_1 \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_1)$. Par ailleurs si $F \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{1\mathrm{u}})$ est tel que pour tout $p_1 \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}_1)$:

$$\int_{\mathcal{O}_{1\mathrm{u}}} p_1(\sigma_1)F(\sigma_1)\, \mathrm{d}\sigma_1 = 0,$$

on en déduit que $F = 0$.

Donc, pour tout σ_1 objet de $\mathcal{O}_{1\mathrm{u}}$, les expressions sous le signe intégrale dans les membres de droite des égalités (8.22) et (8.23) sont égales.

Soit $\mathcal{O}'_{1u}$ l'ensemble des $\sigma_1 \in \mathcal{O}_1$ tel que, avec les notations de (8.3), (8.6), $p_{\mathcal{O}_1}(\sigma_1)$ soit non nul et tels que si $w \in W(M', \mathcal{O}_1)$, $w\sigma_1$ ne soit équivalente à σ_1 que si $w = 1$. On remarque que $\mathcal{O}'_{1u}$ est dense dans $\mathcal{O}_{1\mathrm{u}}$.

Soit $\sigma_1 \in \mathcal{O}'_{1u}$, $s \in W(M'|G|M)$ et t comme ci-dessus. D'après (8.7) on peut choisir ϕ tel que $\phi(t\sigma_1)$ soit non nul et arbitraire dans $i_P^G(tE_1)$ et tel que $\phi(t'\sigma_1) = 0$ si $t' \in W(M|G|M')$ est distinct de t. Comme ϕ est une fonction sur $\mathcal{O}$, $\phi(s'^{-1}\sigma_1) = 0$ si $s' \in W(M'|G|M)$ et $s' \neq s$. Alors $[\tilde{C}(s', P', P, \sigma_1)\phi](\sigma_1)$, qui dépend linéairement de $\phi(s'^{-1}\sigma_1)$ (voir (8.1)) est nul sauf si $s' = s$. De même $\phi_1(\sigma_1)$ peut être choisi arbitrairement. Alors, tous les termes sous le signe intégral de (8.22) (respectivement (8.23)) sont nuls excepté celui correspondant à s (respectivement t), d'après la définition des fonctions $\tilde{C}$ (voir Définition 4). On en déduit :

$$([\tilde{C}(s, P', P, \sigma_1)\phi](\sigma_1), \phi_1(\sigma_1)) = (\phi(t\sigma_1), [\tilde{C}(t, P, P', t\sigma_1)\phi_1](t\sigma_1)).$$

Puis on voit que :

$$((B(P', s \cdot P, \sigma_1) \otimes A(P, s \cdot P, \sigma_1)\lambda(s))\phi(s^{-1}\sigma_1), \phi_1(\sigma_1))$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

est égal à

$$(\phi(t\sigma_1), (B(P, t\cdot P', t\sigma_1) \otimes A(P, t\cdot P', t\sigma_1)\lambda(t))\phi_1(\sigma_1)).$$

Comme $\phi_1(\sigma_1)$ est arbitraire, on obtient par adjonction :

$$(B(P', s\cdot P, \sigma_1) \otimes A(P', s\cdot P, \sigma_1)\lambda(s))\phi(s^{-1}\sigma_1) \\ = [B(P, t\cdot P', t\sigma_1) \otimes A(P, t\cdot P', t\sigma_1)\lambda(t)]^*\phi(t\sigma_1). \quad (8.24)$$

Maintenant, des égalités provenant du transport de structure et la formule d'adjonction pour les intégrales d'entrelacement vont permettre d'achever la preuve du théorème. Soit $m = ts \in M_0 \cap K$, de sorte que $t = ms^{-1}$. On a, d'après la Proposition 3 (ii), en prenant σ égal à $s^{-1}\sigma_1$:

$$B(t\cdot P', P, t\sigma_1) = (s^{-1}\sigma_1)'(m^{-1})B(t\cdot P', P, s^{-1}\sigma_1)(s^{-1}\sigma_1')(m).$$

Comme $(s^{-1}\sigma_1)(m) = \sigma_1(m')$, où $m' = st$, on a :

$$B(t\cdot P', P, t\sigma_1) = \sigma_1'(m'^{-1})B(t\cdot P', P, s^{-1}\sigma_1)\sigma_1'(m'). \quad (8.25)$$

Par ailleurs, d'après (7.20), dans lequel on remplace m par m', P_1 par P', $s\sigma$ par σ_1 et où $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ sont triviaux car P et P' sont anti-standard, on a :

$$B(P', s\cdot P, \sigma_1) = \sigma_1'(m'^{-1})B(t\cdot P', P, s^{-1}\sigma_1). \quad (8.26)$$

Comme $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G)$, $s^{-1} = m^{-1}t$ et $t\sigma_1 = ms^{-1}\sigma_1$, on a, d'après la définition de $\mathrm{Pol}(\mathcal{O}_{\mathrm{u}}, \mathrm{Wh} \otimes i_P^G)$ (voir § 1.4) :

$$\phi(s^{-1}\sigma_1) = (t\sigma_1'(m) \otimes \lambda(m^{-1}))\phi(t\sigma_1).$$

Donc le membre de gauche, I, de (8.24) est égal à :

$$[\sigma_1(m'^{-1})B(t\cdot P', P, s^{-1}\sigma_1) \otimes A(P', s\cdot P, \sigma_1)\lambda(s)][(t\sigma_1'(m) \otimes \lambda(m^{-1}))\phi(t\sigma_1)].$$

Mais :

$$\lambda(s)\lambda(m^{-1}) = \lambda(t^{-1}), \qquad t\sigma_1(m) = \sigma_1(m').$$

Donc

$$I = [\sigma_1'(m'^{-1})B(t\cdot P', P, s^{-1}\sigma')\sigma_1'(m') \otimes A(P', s\cdot P, \sigma_1)\lambda(t^{-1})]\phi(t\sigma_1).$$

Donc, d' après (8.25) :

$$I = [B(t\cdot P', P, t\sigma_1) \otimes A(P', s\cdot P, \sigma_1)\lambda(t^{-1})]\phi(t\sigma_1).$$

Etudions maintenant le membre de droite, II, de (8.24). L'adjoint de $A(P, t\cdot P', t\sigma_1)$ est égal à $A(t\cdot P', P, t\sigma_1)$, celui de $\lambda(t)$ est égal à $\lambda(t^{-1})$. Enfin (voir (5.9)) $\lambda(t^{-1})A(t\cdot P', P, t\sigma_1)$ est égal à $A(P', s\cdot P, \sigma_1)\lambda(t^{-1})$. Donc on a :

$$II = (B(P, t\cdot P', t\sigma_1)^* \otimes A(P', s\cdot P, \sigma_1)\lambda(t^{-1}))\phi(t\sigma_1).$$

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Comme $\phi(t\sigma_1)$ peut être choisi arbitrairement, l'égalité de I et II conduit à :

$$B(t \cdot P', P, t\sigma_1) = (B(P, t \cdot P', t\sigma_1))^*,$$

pour notre choix de σ_1. Par densité, cette égalité est vraie pour $\sigma_1 \in \mathcal{O}_{1\mathrm{u}}$. Soit $s \in W(M'|G|M)$ tel que $P' = s \cdot Q$, qui existe d'après notre choix de P'. Alors $t \cdot P' = Q$. En posant $\sigma_1 = t^{-1}\sigma$, on obtient l'égalité voulue. □

9. Preuve du Théorème de Paley–Wiener

9.1. Paquets d'ondes décalés

Proposition 10. *Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G et soit $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse, irréductible et cuspidale de G. Si $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}, \mathrm{Wh} \otimes i^G_{P^-})$, on note :*

$$\Phi(\sigma) := (\mathrm{Id} \otimes A(P^-, P, \sigma)^{-1})\phi(\sigma)$$

et

$$f^{sh}_{\Phi} := \int_{\mathcal{O}_{\mathrm{u}}\chi_\mu,\, \mathrm{Re}\,\mu << _P 0} E^G_P(\Phi(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma.$$

où $\mathrm{Re}\,\mu << _P 0$ veut dire que $-\langle \mathrm{Re}\,\mu, \check{\alpha}\rangle$ est suffisamment grand, pour tout $\alpha \in \Sigma(P)$. Alors f^{sh}_{Φ} ne dépend pas de μ et est à support compact modulo U_0.

Démonstration. Les pôles de la fonction sur $X(M)$, $\chi \to \Phi(\sigma_\chi)$ a des pôles pour $\chi = \chi_\lambda$, avec λ élément d'un nombre fini d'hyperplans de $(\mathfrak{a}_M)'_{\mathbb{C}}$ de la forme $\langle \lambda, \check{\alpha}\rangle = c$, pour α racine de A_M dans l'algèbre de Lie P. On en déduit que f^{sh}_{Φ} ne dépend pas de μ avec $\mathrm{Re}\,\mu << _P 0$.

On se réduit, comme dans la preuve du Lemme 6, à démontrer que pour tout ϕ, la restriction de f^{sh}_{Φ} à A_0^- est à support compact.

Puis on procède comme dans [**15**, Proposition 2.1]. On note que l'on travaille ici sur A_0^- et que les sous-groupes paraboliques utilisés pour le terme constant sont ici standard tandis que P est anti-standard. On remarque que notre définition différente de H_G (voir (2.3)) ne change pas celle de $\chi_{\ll}$.

On introduit, pour Θ partie de l'ensemble des racines simples de A_0 dans l'algèbre de Lie de P_0 et $t, t' \geqslant 0$. On a :

$$A_0^-(\Theta, t, t') = \{a \in A_0^- \mid \langle \alpha, H_0(a)\rangle \geqslant -t,\ \alpha \in \Theta \text{ et } \langle \alpha, H_0(a)\rangle < -t'\}.$$

On se réduit au cas où G est semi simple comme dans [**15**, p. 398]. Il suffit comme dans [**15**] de montrer que pour tout Θ et tout $t > 0$, il exist $f(\Theta, t)$ telle que $f^{sh}_{\Phi}(a) = 0$ pour $a \in A_0^-(\Theta, t, f(\Theta, t))$. On se réduit comme dans [**15**], en utilisant les propriétés du terme constant (voir Proposition 6) à étudier :

$$\int_{\mathcal{O}_{\mathrm{u}}\chi_\mu, \mathrm{Re}\,\mu << _P 0} E^{M'}_{M' \cap s \cdot P}(C(s, P', P, \sigma)(\mathrm{Id} \otimes A(P^-, P, \sigma)^{-1})\phi(\sigma))(a)\,\mathrm{d}\sigma, \tag{9.1}$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

où $P' = M'U'$ est le sous-groupe parabolique anti-standard déterminé par Θ, i.e. les raines de A_0 dans M' sont celles du système engendré par Θ. Etudions les pôles de $C(s, P', P, \sigma)(\mathrm{Id} \otimes A(P, P^-, \sigma)^{-1})$ qui est égal à

$$(B(\tilde{P}_s, s \cdot P, s\sigma) \otimes (A(P_s, s \cdot P, s\sigma)\lambda(s)))(\mathrm{Id} \otimes A(P, P^-, \sigma)^{-1}).$$

On a :

$$A(P_s, s \cdot P, s\sigma)\lambda(s)A(P^-, P\sigma)^{-1} = \lambda(s)A(s^{-1} \cdot P_s, P, \sigma)A(P, P^-, \sigma)^{-1},$$
$$A(s^{-1} \cdot P_s, P^-, \sigma)A(P^-, P, \sigma) = \Bigg(\prod_{\alpha \in \Sigma_{\mathrm{red}}(P) \cap \Sigma_{\mathrm{red}}(s^{-1} \cdot P_s)} j_\alpha(\sigma)\Bigg) A(s^{-1} \cdot P_s, P, \sigma).$$

Donc

$$A(P_s, s \cdot P, s\sigma)A(P^-, P, \sigma)^{-1} = \Bigg(\prod_{\alpha \in \Sigma_{\mathrm{red}}(P) \cap \Sigma_{\mathrm{red}}(s^{-1} \cdot P_s)} j_\alpha^{-1}(\sigma)\Bigg)\lambda(s) A(s^{-1} \cdot P_s, P^-, \sigma).$$

Remplaçant σ par σ_χ, la fonction de $\chi \in X(M)$ ainsi obtenue a des pôles pour $\chi = \chi_\lambda$, avec λ élément d'un nombre fini d'hyperplans de $(\mathfrak{a}_M)'_{\mathbb{C}}$ de la forme $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle = c$, $\alpha \in \Sigma_1 := \Sigma_{\mathrm{red}}(P) \cap \Sigma_{\mathrm{red}}(s^{-1} \cdot P_s)$ (voir (5.8)).

La fonction sur $X(M)$, $\chi \mapsto B(\tilde{P}_s, s \cdot P, s\sigma_\chi)$ possède des pôles pour $\chi = \chi_\lambda$, avec λ élément d'un nombre fini d'hyperplans de la forme $\langle \lambda, \check{\alpha} \rangle = c$, $\alpha \in \Sigma_2 := \Sigma_{\mathrm{red}}(s^{-1}\tilde{P}_s) \cap \Sigma_{\mathrm{red}}(P^-) \subset -\Sigma_1$ (voir Proposition 3 et (5.8)).

Σ_1 est donc l'ensemble des racines de A_0 dans l'albèbre de Lie $s^{-1} \cdot P' \cap U$. Donc dans (9.1) on peut changer μ en $\mu + s^{-1}\mu'$ avec $\mu' \in \mathfrak{a}_{M'}$ qui est P'-dominant sans rencontrer de pôles, donc sans changer la valeur de l'intégrale. On procède alors comme dans [**15**, pp. 397–398], où un changement de variable de σ en $s^{-1}\sigma$ est opéré et des changements de signes sont nécessaires. Pour μ' comme ci-dessus et $a' \in A_{M'}$ P'-dominant $|\chi_{\mu'}(a)| \leqslant 1$ car P' est antistandard, et pour a' suffisamment P'-dominant $\mu' \mapsto |\chi_{\mu'}(a)|$ décroit rapidement. □

9.2. Un résultat d'Heiermann

Soit H un sous-groupe compact ouvert contenu dans K. On note e_H l'élément de l'algèbre de Hecke de G déterminé par la mesure de Haar normalisée de H. On applique la Proposition 0.2 de [**15**] à la famille de fonctions $\varphi_{P,\mathcal{O}}$, où $P = MU$ est un sous-groupe parabolique semi-standard de G, donnée par $\varphi(\sigma, E) = i_P^G\sigma(e_H)$. Si (π, E) est une représentation lisse de G, on note $(\check{\pi}, \check{V})$ sa contragrédiente lisse et on identifie $V \otimes \check{V}$ à un sous-espace de $\mathrm{End}\, V$.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G, $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse, cuspidale et irréductible de M. En transformant la somme de Heiermann [**15**, Proposition 0.2] qui porte sur l'ensemble des $w \in W^G$ tels que $w\mathcal{O} = \mathcal{O}$ en une somme sur w tel que $w^{-1} \in W(M|G|M)$ et $w\mathcal{O} = \mathcal{O}$, par regroupement des termes, et en posant $t = w^{-1}$, on en déduit qu'il existe une fonction polynomiale sur $\mathcal{O}$,

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

$\zeta(P,\cdot)$ à valeurs dans $\mathrm{Hom}(i_P^G, i_{P^-}^G)$ telle que :

$$(i_P^G\sigma)(e_H) = \sum_{t\in W(M|G|M),\, t\mathcal{O}=\mathcal{O}} A(P, t^{-1}\cdot P^-, \sigma)\lambda(t^{-1})\zeta(P, t\sigma)\lambda(t)A(t^{-1}\cdot P, P, \sigma).$$

Mais, par transport de structure (voir (5.9)) :

$$\lambda(t)A(t^{-1}\cdot P, P, \sigma) = A(P, t\cdot P, t\sigma)\lambda(t).$$

Donc, on a :

$$(i_P^G\sigma)(e_H) = \sum_{t\in W(M|G|M),\, t\mathcal{O}=\mathcal{O}} A(P, t^{-1}\cdot P^-, \sigma)\lambda(t^{-1})\zeta(P, t\sigma)A(P, t\cdot P, t\sigma)\lambda(t). \quad (9.2)$$

9.3. Fin de la preuve du Thèorème 2

On part maintenant de F qui satisfait les conditions (i) à (iii) du Théorème 2. Soit H un sous-groupe compact ouvert de G tel que F soit H-invariante. Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G et $\mathcal{O}$ l'orbite inertielle d'une représentation lisse, cuspidale et irréductible de M. Donc

$$F(P, \sigma) = [\mathrm{Id}\otimes(i_P^G\sigma)(e_H)]F(P, \sigma).$$

On applique (9.2) et on trouve que $F(P, \sigma)$ est égal à :

$$\sum_{t\in W(M|G|M),\, t\mathcal{O}=\mathcal{O}} [\mathrm{Id}\otimes A(P, t^{-1}\cdot P^-, \sigma)\lambda(t^{-1})\zeta(P, t\sigma)][\mathrm{Id}\otimes A(P, t\cdot P, t\sigma)\lambda(t)]F(P, \sigma).$$

Mais $t\in W(M|G|M)$ implique que $w_{t\cdot P} = t^{-1}$. Alors, d'après (6.4), on a :

$$(\mathrm{Id}\otimes\lambda(t))F(P, \sigma) = F(t\cdot P, t\sigma)$$

et d'après (6.8), on voit que :

$$(\mathrm{Id}\otimes A(P, t\cdot P, t\sigma))F(t\cdot P, t\sigma) = (B(t\cdot P, P, t\sigma)\otimes\mathrm{Id})F(P, t\sigma).$$

Donc :

$$F(P, \sigma) = \sum_{t\in W(M|G|M),\, t\mathcal{O}=\mathcal{O}} [B(t\cdot P, P, t\sigma)\otimes A(P, t^{-1}\cdot P^-, \sigma)\lambda(t^{-1})]\zeta(P, t\sigma)F(P, t\sigma). \quad (9.3)$$

Soit s l'unique élément de W^G tel $m := st \in M_0\cap K$. On utilise (7.20), avec $P_1 = P$ et σ remplacé par $s^{-1}\sigma$. Comme P est anti-standard, $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{t}$ se réduisent à l'identité et l'on a :

$$B(P, s\cdot P, \sigma) = \sigma'(m^{-1})B(t\cdot P, P, s^{-1}\sigma). \quad (9.4)$$

On pose $ts = m'\in M_0\cap K$. Donc $s^{-1} = m'^{-1}t$. D'après la Proposition 3 (ii), on a :

$$B(t\cdot P, P, s^{-1}\sigma) = (t\sigma')(m')B(t\cdot P, P, t\sigma)(t\sigma')(m'^{-1}).$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Comme $(t\sigma)(m') = \sigma(m)$, on en déduit :

$$B(t\cdot P, P, s^{-1}\sigma) = \sigma'(m)B(t\cdot P, P, t\sigma)\sigma'(m^{-1}). \tag{9.5}$$

Grâce à (9.4) et (9.5), on déduit de (9.3) :

$F(P,\sigma)$ est égal à

$$\sum_{t\in W(M|G|M),\, t\mathcal{O}=\mathcal{O}} [(B(P, s\cdot P, \sigma)\sigma'(m)) \otimes (A(P, s\cdot P^-, \sigma)\lambda(t^{-1}))\zeta(P, t\sigma)]F(P, t\sigma). \tag{9.6}$$

Lemme 8. *Pour (σ, E) objet de $\mathcal{O}$, on note :*

$$\Phi_{\mathcal{O}}(\sigma) = (\mathrm{Id}\otimes A(P^-, P, \sigma)^{-1})\zeta(P,\sigma)F(P,\sigma). \tag{9.7}$$

(i) *Pour (σ, E) objet de $\mathcal{O}$, on a :*

$$(f^{sh}_{\Phi_{\mathcal{O}}})^\wedge(P,\sigma) = F(P,\sigma). \tag{9.8}$$

(ii) *Soit (σ_1, E_1) est une représentation lisse, cuspidale et irréductible du sous-groupe de Lévi, M', d'un sous-groupe parabolique standard de G, $P' = M'U'$. On suppose que l'orbite inertielle de σ_1, $\mathcal{O}'$, est telle que $(M,\mathcal{O})$ n'est pas conjuguée à $(M',\mathcal{O}')$. Alors on a :*

$$(f^{sh}_{\Phi_{\mathcal{O}}})^\wedge(P',\sigma_1) = 0.$$

(iii) *Si au contraire $(M',\mathcal{O}')$ est conjuguée à $(M,\mathcal{O})$ on a, pour (σ_1, E_1) objet de $\mathcal{O}'$:*

$$(f^{sh}_{\Phi_{\mathcal{O}}})^\wedge(P',\sigma_1) = F(P',\sigma_1).$$

Démonstration. Pour $z\in \mathrm{ZB}(G)$, on note $F' = \rho_\bullet(z)F$, et $\Phi'_{\mathcal{O}}$ la fonction rationnelle déduite de F', comme $\Phi_{\mathcal{O}}$ l'est de F. Alors $\Phi'_{\mathcal{O}} = \rho_\bullet(z)\Phi_{\mathcal{O}}$ et :

$$(f^{sh}_{\Phi'_{\mathcal{O}}})^\wedge(P_1,\sigma_1) = (i^G_{P'}\sigma_1)(z)(f^{sh}_{\Phi_{\mathcal{O}}})^\wedge(P_1,\sigma_1).$$

De (8.8) Lemme 5 et de ce qui précède, on déduit qu'il suffit de prouver le lemme lorsque Φ est polynomiale et très régulière, ce que l'on suppose désormais. Alors, on peut déplacer le contour d'intégration dans la définition du paquet d'ondes décalé et l'on a $\hat{f}^{sh}_{\Phi} = f_\Phi$. On applique le Théorème 5. On en déduit (ii). Montrons (i). Soit σ est un objet de $\mathcal{O}$. Toujours d'après le Théorème 5, on a :

$$(f^{sh}_{\Phi})^\wedge(P,\sigma) = \sum_{s\in W(M|G|M),\, s^{-1}\sigma\in O} I_s, \tag{9.9}$$

où

I_s est égal au produit de $j(P, P^-, s\cdot P, \sigma)$ par

$$[B(P, s\cdot P,\sigma)\otimes A(P, s\cdot P,\sigma)\lambda(s)](\mathrm{Id}\otimes A(P^-, P, s^{-1}\sigma)^{-1})\zeta(P, s^{-1}\sigma)F(P, s^{-1}\sigma). \tag{9.10}$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Soit $t \in W^G$ tel que $ts = m'$ et $st = m$ soient éléments de $M_0 \cap K$. Donc $s^{-1} = m'^{-1}t$ et $t\sigma(m') = \sigma(m)$. On déduit de la Proposition 5 (iii) et de la Proposition 2 (ii) avec m changé en m'^{-1} et σ en $t\sigma$, que :

$$F(P, s^{-1}\sigma) = (\lambda(m'^{-1}) \otimes \sigma'(m))F(P, t\sigma). \tag{9.11}$$

Les relations de type (2.19) pour les intégrales d'entrelacement et la fonction ζ, qui sont des fonctions sur $\mathcal{O}$, montrent que :

$$A(P^-, P, s^{-1}\sigma) = \lambda(m')^{-1}A(P^-, P, t\sigma)\lambda(m'), \tag{9.12}$$
$$\zeta(P, s^{-1}\sigma) = \lambda(m'^{-1})\zeta(P, t\sigma)\lambda(m'). \tag{9.13}$$

Tenant compte de (9.11), (9.12), (9.13), on déduit de la formule (9.10) pour I_s, après des simplifications évidentes que :

I_s est égal au produit de $j(P, P^-, s \cdot P, \sigma)$ par

$$[B(P, s \cdot P, \sigma)\sigma'(m) \otimes (A(P, s \cdot P, \sigma)\lambda(s)\lambda(m'^{-1})A(P^-, P, t\sigma)^{-1}\zeta(P, t\sigma))]F(P, t\sigma). \tag{9.14}$$

En tenant compte de (9.6), (9.9) et de la relation précédente, il suffit, pour prouver (9.8), de vérifier :

$$j(P, P^-, s\cdot P, \sigma)A(P, s\cdot P, \sigma)\lambda(s)\lambda(m'^{-1})A(P^-, P, t\sigma)^{-1} = A(P, s\cdot P^-, \sigma)\lambda(t^{-1}). \tag{9.15}$$

On a $sm'^{-1} = t^{-1}$, $t^{-1} \cdot P = s \cdot P$, $t^{-1} \cdot P^- = s \cdot P^-$. Grâce à (5.9) on a :

$$\lambda(t^{-1})A(P^-, P, t\sigma)\lambda(t) = A(sP^-, s \cdot P, \sigma).$$

Donc notant A le premier membre de (9.15), on a :

$$A = j(P, P^-, s \cdot P, \sigma)A(P, s \cdot P, \sigma)A(s \cdot P^-, s \cdot P, \sigma)^{-1}\lambda(t^{-1}).$$

D'après (5.7) on a :

$$A(s \cdot P^-, s \cdot P, \sigma)A(s \cdot P, s \cdot P^-, \sigma) = j(s \cdot P^-, s \cdot P, s \cdot P^-, \sigma)\mathrm{Id}.$$

Donc :

$$A = j(P, P^-, s \cdot P, \sigma)j(s \cdot P^-, s \cdot P, s \cdot P^-, \sigma)^{-1}A(P, s \cdot P, \sigma)A(s \cdot P, s \cdot P^-, \sigma)\lambda(t^{-1}).$$

Utilisant encore la définition des fonctions j (voir (5.7)), on trouve :

$$A = j(P, P^-, s \cdot P, \sigma)j(P, s \cdot P, s \cdot P^-)j(s \cdot P^-, s \cdot P, s \cdot P^-)^{-1}A(P, s \cdot P^-, \sigma)\lambda(t^{-1})$$

et on voit que :

$$j(P, P^-, s \cdot P, \sigma)j(P, s \cdot P, s \cdot P^-, \sigma)j(s \cdot P^-, s \cdot P, s \cdot P^-, \sigma)^{-1} = 1$$

donc $A = A(P, s \cdot P^-, \sigma)\lambda(t^{-1})$ comme désiré, ce qui achève de prouver (9.15). Ceci achève de prouver (i). Le point (iii) résulte des relations (6.4) et (6.8) satisfaites par F et les transformées de Fourier. $\square$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Fin de la preuve du Théorème 2. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de représentants des classes de conjugaisons de couples $(M, \mathcal{O})$, où $P = MU$ est un sous-groupe parabolique anti-standard de G, et $\mathcal{O}$ est l'orbite inertielle d'une représentation lisse, irréductible et cuspidale de M. Soit

$$f = \sum_{(M,\mathcal{O}) \in \mathcal{E}} f^{sh}_{\Phi_{\mathcal{O}}},$$

la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls car il n'y a qu'un nombre fini de $(M, \mathcal{O})$ tel que $\Phi_{\mathcal{O}}$ soit non nulle, d'après la condition (ii) du Théorème 2. Alors, d'après la Propostion 10, $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)$ et d'après le lemme précédent f admet F comme transformée de Fourier–Whittaker. Pour achever la preuve du Théorème 2, il ne reste plus qu'à prouver la proposition suivante. □

Proposition 11. *La transformée de Fourier–Whittaker, définie sur $C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)$, est injective.*

Démonstration. Rappelons le contenu du Corollaire 1 de la Proposition 14 de la § 11, dont on retient les notations notamment la définition (11.1).

Soit $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)$. Si pour toute représentation lisse unitaire irréductible, π, et tout $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$, $\pi'(f^*)$ est nulle, alors f est nulle.

Soit $P = MU$ un sous-groupe parabolique anti-standard de G et (σ, E) une représentation lisse, unitaire, cuspidale et irréductible de M. On remarque que, d'après la définition de la transformée de Fourier–Whittaker :

$$(\hat{f}(P, \sigma), \eta \otimes v) = \overline{\langle (i^G_P\sigma)'(f^*)\xi(P, \sigma, \eta), v\rangle}, \quad \eta \in \mathrm{Wh}(\sigma),\ v \in i^G_P E.$$

Si la transformée de Fourier–Whittaker de $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)$ est nulle, on en déduit que $(i^G_P\sigma)'(f^*)\xi = 0$ pour tout élément ξ de $\mathrm{Wh}(i^G_P\sigma)$. Par polynomialité, cette identité s'étend à σ représentation lisse cuspidale et irréductible.

Mais toute représentation lisse irréductible de G, (π, V), apparait comme une sous-représentation d'une représentation $i^G_P\sigma$ avec σ lisse, cuspidale irréductible. Par ailleurs, l'exactitude du foncteur qui à π associe $\mathrm{Wh}(\pi)$ montre que tout élément de $\mathrm{Wh}(\pi)$ est la restriction à V d'un élément de $\mathrm{Wh}(i^G_P\sigma)$. On déduit de ce qui précède que f est nulle, comme désiré. Ceci achève la preuve de la proposition et également du Théorème 2. □

Théorème 7. *Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de représentants des classes de conjugaisons de couples $(M, \mathcal{O})$, où $P = MU$ est un sous-groupe parabolique anti-standard de G, et $\mathcal{O}$ est l'orbite inertielle d'une représentation lisse, irréductible et cuspidale de M. Alors pour $f \in C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)$, notant F sa transformée de Fourier–Whittaker et adoptant les notations du Lemme 8, on a :*

$$f = \sum_{(M,\mathcal{O}) \in \mathcal{E}} f^{sh}_{\Phi_{\mathcal{O}}},$$

la somme ne comportant qu'un nombre fini de termes non nuls.

Démonstration. D'après la fin de la preuve du Théorème 2, les deux membres sont des éléments de $C^\infty_{\mathrm{c}}(U_0\backslash G, \psi)$ qui ont la même transformée de Fourier–Whittaker. Donc ils sont égaux d'après la proposition précédente. □

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

10. Sur une conjecture de Lapid et Mao

10.1. Fonctionnelles de Whittaker de carré intégrable et critère de Casselman

Une fonctions mesurable, f, sur G telles que $f(ug) = \chi(u)f(g)$ pour $u \in U_0$ et $g \in G$, et telle que :

$$\|f\|_{L^2(U_0\backslash G,\psi)} := \left(\int_{U_0\backslash G} |f(g)|^2 \, \mathrm{d}g \right)^{1/2}$$

sera dite fonction de Whittaker de carré intégrable. L'espace des classes modulo l'équivalence presque partout de fonctions de Whittaker de carré intégrable définit un espace de Hilbert, $L^2(U_0\backslash G, \psi)$, sur lequel G agit continument et unitairement par représentation régulière droite ρ. On introduit de même $(\rho, L^2(A_G U_0\backslash G, \psi))$. Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G admettant un caractère central unitaire. On dit que π est de carré intégrable (respectivement est une série discrète) si ses coefficients lisses sont de carré intégrable sur $A_G\backslash G$ (respectivement sur G). On dit que $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$ est de carré intégrable (respectivement discrète) si pour tout $v \in V$, $c_{\xi,v}$ est élément de $L^2(A_G U_0\backslash G, \psi)$ (respectivement $L^2(U_0\backslash G, \psi)$). Montrons l'assertion suivante.

(10.1) *Une représentation lisse irréductible* (π, V) *de* G *posséde une forme linéaire non nulle* $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$ *discrète* (*respectivement de carré intégrable*) *si et seulement si* (π, V) *apparait comme sous-représentation irréductible de* $(\rho, L^2(U_0\backslash G, \psi))$ (*respectivement* $(\rho, L^2(A_G U_0\backslash G, \psi))$).

Traitons le cas des formes discrètes, celui des formes de carré intégrable étant semblable. Si ξ est discrète et non nulle, on définit un produit scalaire invariant sur V par :

$$(v, v') := \int_{U_0\backslash G} c_{\xi,v}(g)\overline{c_{\xi,v'}(g)} \, \mathrm{d}g, \quad v, v' \in V. \tag{10.2}$$

Donc la représentation est unitaire et l'application $v \mapsto c_{\xi,v}$ est un entrelacement isométrique de V dans $L^2(U_0\backslash G, \psi)$. Réciproquement, si (π, V) est une sous-représentation de $(\rho, L^2(U_0\backslash G, \psi))$, la mesure de Dirac en 1_G est un élément non nul et discret de $\mathrm{Wh}(\pi)$.

Soit (π, V) une représentation admissible de G. Pour $\chi \in \mathrm{Hom}(A_G, \mathbb{C}^*)$ on pose

$$V_\chi = \{v \in V \mid \text{il existe } d \in \mathbb{N} \text{ tel que } (\pi(a) - \chi(a))^d v = 0,\ a \in A_G\}.$$

Si $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$, on note ξ_χ la restriction de ξ à V_χ. On appelle exposant de π (respectivement ξ) un caractère χ tel que V_χ (respectivement ξ_χ) soit non nul. On note $\mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi)$ (respectivement $\mathcal{E}\mathrm{xp}(\xi)$) l'ensemble des exposants de π (respectivement ξ). On a $\mathcal{E}\mathrm{xp}(\xi) \subset \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi)$.

Proposition 12. *Soit* (π, V) *une représentation admissible de* G *et* $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

(i) *ξ est de carré intégrable ;*

(ii) *pour tout sous-groupe parabolique standard $P = MU$ de G et tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\xi_P)$, on a $\mathrm{Re}\,\chi \in {}^{-}(\mathfrak{a}_P^G)'$, où ${}^{-}(\mathfrak{a}_P^G)'$ est l'ensemble des $\chi \in (\mathfrak{a}_P^G)'$ qui sont combinaisons linéaires à coefficients strictement négatifs des racines simples de A_0 dans P ;*

(iii) *pour tout sous-groupe parabolique standard maximal $P = MU$ de G et tout $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\pi_P)$, on a $\chi \in {}^{-}(\mathfrak{a}_P^G)'$.*

Démonstration. Soit Λ un réseau contenu dans A_0 et tel que $A_0 = (A_0 \cap K)\Lambda$. Le noyau de l'application H_{M_0} (voir (2.3)) est égal à $M_0 \cap K$ et l'image de Λ par H_{M_0} est d'indice fini dans l'image de H_{M_0}. Soit I un ensemble d'antécédents dans M_0 de représentants du quotient de l'image de H_{M_0} par l'image de Λ par H_{M_0}. De l'égalité $G = U_0 M_0 K$ on déduit :

$$G = U_0 \Lambda I K. \tag{10.3}$$

Soit H un sous-groupe compact ouvert distingué de K. On voit facilement, en utilisant (2.8), qu'il existe des constantes $C', C'' > 0$ telles que :

$$C' \delta_{P_0}(\lambda^{-1}) \leqslant \mathrm{vol}(U_0 \backslash U_0 \lambda i x H) \leqslant C'' \delta_{P_0}(\lambda^{-1}), \quad \lambda \in \Lambda,\ i \in I,\ x \in K.$$

On en déduit que ξ est de carré intégrale si seulement si, pour tout $v \in V$, la restriction c_v de $c_{\xi,v}$ à Λ est de carré intégrable modulo $\Lambda \cap A_G$, pour la mesure qui charge chaque point $\lambda \in \Lambda \cap A_G$ de la masse $\delta_{P_0}(\lambda)^{-1}$. Par translation, c_v possède cette propriété si et seulement si c'est vrai pour $c_{\pi(a)v}$ pour un élément a de Λ. D'après (3.5), on peut donc se limiter aux c_v qui sont à support dans $A_0^- \cap \Lambda$. Alors on procède comme dans la preuve du critère analogue pour les groupes [**9**, Théorème 4.4.6] en utilisant les propriétés du terme constant (voir § 3). □

Proposition 13. *Soit (π, V) une représentation admissible de carré intégrable (respectivement tempérée) de G et $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$, alors ξ est de carré intégrable (respectivement tempérée).*

Démonstration. En effet pour tout sous-groupe parabolique standard P, les exposants de ξ_P sont des exposants de π_P (voir ci-dessus). Alors le corollaire résulte de la proposition précédente jointe au Théorème 4.4.6 de [**9**] (respectivement à la Proposition III.3.2 de [**25**]). □

10.2. L'analogue p-adique d'un résultat de Wallach

La preuve du théorème suivant est semblable à celle de son analogue réel donnée par Wallach (voir [**26**, Théorème 14.12.1]).

Théorème 8. *Soit (π, H) une représentation unitaire irréductible de G appartenant au support de la décomposition en représentations irréductibles de G dans $L^2(U_0 \backslash G, \psi)$. Alors la représentation lisse de G dans l'espace V des vecteurs de H fixés par un sous-groupe compact ouvert est tempérée.*

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Raisonnant comme dans le début de la preuve de [**26**, Théorème 14.11.4], on voit qu'il suffit de prouver le lemme suivant.

Lemme 9. *Soit* $f \in L^2(U_0\backslash G, \psi)$ *invariante à droite par un sous-groupe compact ouvert,* H*, de* K*. On note* $\mathrm{vol}(H)$ *la mesure de* H *pour la mesure de Haar sur* K *de masse totale* 1*. Alors on a :*

$$|(\rho(g)f, f)| \leqslant \mathrm{vol}(H)^{-1}\|f\|^2_{L^2(U_0\backslash G,\psi)}\Xi(g), \quad g \in G.$$

Démonstration. On voit facilement, grâce à l'invariance de f sous H que :

$$|f(g)|^2 \leqslant \mathrm{vol}(H)^{-1}\int_K |f(gk)|^2\,\mathrm{d}k, \quad g \in G.$$

On pose $f_1(g) = \sup_{k\in K}|f(gk)|$. On a donc :

$$|f_1(g)|^2 \leqslant \mathrm{vol}(H)^{-1}\int_K |f(gk)|^2\,\mathrm{d}k, \quad g \in G.$$

Par intégration sur $U_0\backslash G$, on en déduit :

$$\|f_1\|^2_{L^2(U_0\backslash G,\psi)} \leqslant \mathrm{vol}(H)^{-1}\|f\|^2_{L^2(U_0\backslash G,\psi)}.$$

On voit aussi facilement que :

$$|(\rho(g)f, f)| \leqslant |(\rho(g)f_1, f_1)|, \quad g \in G.$$

On peut donc se réduire à prouver l'inégalité du Lemme en supposant $H = K$. Dans ce cas on procède comme dans la fin de la preuve du Lemme 15.1.1 de [**26**]. On doit cependant changer les intégrales sur A en des intégrales sur M_0, changer a en $m \in M_0$ et $a^{-\rho}$ en $\delta_P^{-1/2}(m)$. □

10.3. Fonctionnelle de Whittaker de carré intégrable sur une représentation irréductible

Au vu de (10.1), le théorème suivant résoud positivement une conjecture de Lapid et Mao (voir [**17**, Conjecture 3.5]). Matringe (voir [**18**, Corollaire 3.1]), a obtenu indépendamment ce résultat pour certains groupes.

Théorème 9. *Soit* (π, V) *une représentation lisse irréductible de* G*. S'il existe* $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$ *de carré intégrable (respectivement discrète) non nulle, alors* π *est de carré intégrable (respectivement une série discrète) de* G*.*

Démonstration. Supposons ξ de carré intégrable et non nulle. Alors (π, V) est unitaire d'après (10.1). On note (π, H) la représentation de G obtenue par complétion de V. Montrons qu'elle est contenue dans le support de $(\rho, L^2(U_0\backslash G, \psi))$ (c'est trivial si ξ est discrète).

Notons G^1 le noyau de H_G et π_1 la restriction de π à G^1. Le groupe G^1A_G est d'indice fini dans G et $G^1 \cap A_G$ est égal à $A_G \cap K$. Alors pour tout $v \in V$, $c_{\xi,v} \in L^2(U_0\backslash G^1, \psi)$. Donc le support de (π_1, H) contient un élément du support de $L^2(U_0\backslash G^1, \psi)$. Par induction, le

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

support de l'induite unitaire de (π_1, H) de G^1 à G, d'espace H^1, contient un élément du support de $(\rho, L^2(U_0\backslash G, \psi))$. Montrons que cette induite se décompose en une intégrale hilbertienne des représentations $(\pi\otimes\chi, H)$, où χ décrit l'ensemble, $X(G)_{\mathrm{u}}$, des caractères non ramifiés unitaires de G. Considérons l'application de H^1 dans $L^2(G^1\backslash G, H)$ qui à f associe l'application f_1, définie par $f_1(g) = \pi(g)^{-1}f(g)$. C'est un opérateur unitaire. De plus, identifiant $L^2(G^1\backslash G, H)$ au produit tensoriel complété de $L^2(G^1\backslash G)$ avec H, c'est un entrelacement unitaire entre la représentation de G dans H^1 et le produit tensoriel unitaire de la représentation régulière droite de G dans $L^2(G^1\backslash G)$ et celle de G dans H. Notre affirmation résulte du fait $L^2(G^1\backslash G)$ se décompose en une intégrale hilbertienne de caractères non ramifiés unitaires de G. Donc il existe $\chi \in X(G)_{\mathrm{u}}$ tel que $(\pi \otimes \chi, H)$ soit élément support de $(\rho, L^2(U_0\backslash G, \psi))$. Mais $(\rho \otimes \chi^{-1}, L^2(U_0\backslash G, \psi))$ est équivalente $(\rho, L^2(U_0\backslash G, \psi))$, l'opérateur de multiplication par χ^{-1} étant un entrelacement unitaire. Donc (π, V) est élément du support de $(\rho, L^2(U_0\backslash G, \psi))$.

D'après le Théorème 8, (π, V) est tempérée. C'est donc un facteur direct d'une induite à partir d'un sous-groupe parabolique anti-standard $P = MU$ de G d'une représentation de carré intégrable, (σ, E), de M. Comme V est un facteur direct, il suffit de montrer que $\mathrm{Wh}(i_P^G\sigma)$ n'a pas d'élément non nul de carré intégrable sauf si $P = G$. Supposons qu'il en existe un et notons le encore ξ. On note encore π la représentation $i_P^G\sigma$ et V son espace. On suppose que P est différent de G.

D'abord, d'après le Théorème 1, ξ est égal à $\xi(P, \sigma, \eta)$ pour un élément non nul, η, de $\mathrm{Wh}(\sigma)$. Soit $e \in E$ et soit H un sous-groupe compact ouvert de G contenu dans K possédant une factorisation d'Iwahori par rapport à (P, P^-) (voir (2.6)) et tel que e soit invariant par H_M. On suppose en outre que H est assez petit, de sorte que H_{U^-} soit contenu dans $\mathrm{Ker}\,\psi$. On considère l'application de G dans E, $v_{e,\sigma}^{P,H}$ définie par (4.7). Comme e est H_M-invariant, $v_{e,\sigma}^{P,H}$ est invariante à droite par H. C'est un élément de $i_P^G E$ à support dans PU^-. Notons $\mathrm{vol}(H_{U^-}) = \int_{H_{U^-}} du^-$, où du^- est la mesure de Haar sur U^- choisie en (2.7). Alors (voir (4.9)), on voit que :

$$\langle \xi, v_{e,\sigma}^{P,H}\rangle = \mathrm{vol}(H_{U^-})\langle \eta, e\rangle. \tag{10.4}$$

On note χ le caractère central de σ, qui est unitaire puisque σ est de carré intégrable. on voit facilement que pour $a \in A_M$, $\pi(a)v_{e,\sigma}^{P,H} = (\delta_P^{1/2}\chi)(a)v_{e,\sigma}^{P,aHa^{-1}}$. Pour $a \in A_0^-$, $aH_{U^-}a^{-1}$ est contenu dans H_{U^-} puisque P est anti-standard. Par application de la formule précédente et en tenant compte de l'égalité $\mathrm{vol}(aH_{U^-}a^1) = \delta_P^{-1}(a)\,\mathrm{vol}(H_{U^-})$, on trouve :

$$\langle \xi, \pi(a)v_{e,\sigma}^{P,H}\rangle = \chi(a)\delta_P^{1/2}(a)\,\mathrm{vol}(H_{U^-})\langle \eta, e\rangle, \quad a \in A_0^- \cap A_M.$$

Notons $v = v_{e,\sigma}^{P,H}$. Utilisant les définitions on voit d'après (3.7) et (3.9), que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit :

$$c_{\xi_P, v_P}(a) = \chi(a)\,\mathrm{vol}(H_{U^-})\langle \eta, e\rangle, \quad a \in A_0^-(P, <\varepsilon) \cap A_M.$$

Comme c_{ξ_P, v_P} est une fonction A_M-finie sur M, on déduit de l'égalité précédente :

$$c_{\xi_P, v_P}(a) = \chi(a)\,\mathrm{vol}(H_{U^-})\langle \eta, e\rangle, \quad a \in A_M.$$

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Choisissant e tel que $\langle \eta, e\rangle$ soit non nul, on voit que la restriction de ξ_P à $V_{P,\chi}$ est non nulle. Donc $\chi \in \mathcal{E}\mathrm{xp}(\xi_P)$. De plus, χ étant unitaire, $\mathrm{Re}\,\chi$ est nul. Joint à la Proposition 12, cela contredit le fait ξ est de carré intégrable. Cette contradiction achève de prouver que $P = G$ et que π est de carré intégrable.

Si ξ est discrète, A_G est trivial. Donc (π, V) est une série discrète de G. □

10.4. Fonctionnelles de Whittaker cuspidales

Soit (π, V) une représentation lisse de longueur finie de G et $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$. On dit que ξ est cuspidale si pour tout $v \in V$, $c_{\xi,v}$ est à support compact modulo $A_G U_0$, ou ce qui revient au même modulo $Z(G)U_0$, où $Z(G)$ est le centre de G.

Théorème 10.

(i) *Soit* (π, V) *une représentation lisse irréductible de* G*. Si* $\mathrm{Wh}(\pi)$ *contient un élément non nul* ξ *qui est cuspidal, alors* π *est cuspidale.*

(ii) *Soit* (π, V) *une sous-représentation d'une représentation* $(i_P^G\sigma, i_P^G E)$*, où* $P = MU$ *est un sous-groupe parabolique propre de* G *et* (σ, E) *est une représentation lisse de longueur finie de* M*. Alors* $\mathrm{Wh}(\pi)$ *ne contient pas d'élément cuspidal non nul.*

Démonstration. Prouvons (i). D'abord, quitte à tensoriser par un caractère non ramifié de G, on peut supposer que le caractère central de G resteint à A_G est unitaire (voir ce qui suit (2.5)). On le suppose dans la suite. Alors le produit scalaire sur V défini par

$$(v, v') := \int_{A_G U_0\backslash G} c_{\xi,v}(g)\overline{c_{\xi,v'}(g)}\,\mathrm{d}g$$

munit (π, V) d'une structure de représentation unitaire.

Supposons d'abord $Z(G)$ fini. On choisit $v \in V$ tel que $f := c_{\xi,v}$ soit non nul. On utilise les notations du Théorème 7. Soit $(M, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}$, $P = MU$ le sous-groupe parabolique anti-standard de sous-groupe de Lévi M et $\phi \in \mathrm{Pol}(\mathcal{O}, \mathrm{Wh}(P,) \otimes i_P^G)$.

Si $z \in \mathrm{ZB}(G)$, on montre comme dans [**12**, Équation (1.11)], qu'il existe $z^* \in \mathrm{ZB}(G)$ tel que pour toute représentation lisse unitaire, (π_1, V_1), on a :

$$(\pi(z^*)v_1, v_2) = (v_1, \pi(z)v_2), \quad v_1, v_2 \in V_1. \tag{10.5}$$

On a, pour $z \in \mathrm{ZB}(G)$:

$$\rho(z)f = \chi_\pi(z)f, \qquad \rho(z)E_P^G(\phi(\sigma)) = \chi_{i_P^G\sigma}(z)E_P^G(\phi(\sigma)),$$

où χ_π (respectivement, $\chi_{i_P^G\sigma}$) est le caractère de $\mathrm{ZB}(G)$ par lequel celui ci opère sur V (respectivement $i_P^G E$). Donc, utilisant (10.5), on

$$\chi_\pi(z^*)(f, E_P^G(\phi(\sigma)))_G = \overline{\chi_{i_P^G\sigma}(z)}(f, E_P^G(\phi(\sigma)))_G.$$

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Si P est différent de G, il existe $z \in \mathrm{ZB}(G)$ tel que $\sigma \mapsto \chi_{i_P^G \sigma}(z)$ soit un polynôme non constant. On en déduit

$$(f, E_P^G(\phi(\sigma)))_G = 0,$$

pour σ dans un ouvert dense de $\mathcal{O}$. Par continuité, cela est vrai pour tout élément de $\mathcal{O}$. Ceci implique (voir Proposition 7) que $\hat{f}(P, \sigma)$ est nul pour tout objet de $\mathcal{O}$. Avec les notations du Théorème 7, on en déduit que $\Phi_{\mathcal{O}}$ est nul. Comme $Z(G)$ est fini, les orbites inertielles de représentations lisses, cuspidales et irréductibles de G sont des singletons. Alors si $(G, \mathcal{O}) \in \mathcal{E}$, $f_{\Phi_O}^{sh}$ est simplement une somme de coefficients généralisés de cette représentation cuspidale. Alors, le Théorème 7 montre que f est une somme finie de coefficients généralisés de représentations irréductibles cuspidales. Pour des raisons de caractère infinitésimal, cela implique que π est dans la composante de Bernstein de l'une de celles-ci, donc, d'après son irréductibilité, isomorphe à l'une de celles-ci. Ceci achève la preuve de (i) lorsque $Z(G)$ est fini.

On ne suppose plus $Z(G)$ fini. Soit $\underline{G}$ le groupe algébrique dont G est le groupe des points sur F. Soit $D(G)$ le groupe des points sur F du groupe dérivé de $\underline{G}$. Alors $G' := Z(G)D(G)$ est d'indice fini dans G et soit I un ensemble de représentants dans G du quotient G/G'. Alors la restriction π' de π à G' est de type fini. De plus elle est admissible car G' est ouvert dans G. Donc elle est de longueur finie. Elle est de plus unitaire puisque π l'est. C'est une somme directe d'un nombre fini de représentations irréductibles π_j de G'. On choisit l'une de celles-ci, (π', V'), telle que la restiction de ξ à V' soit non nulle. L'application de la première partie de la démonstration à $D(G)$ montre que π' est cuspidale. Comme V est la somme des $\pi(i)V'$, $i \in I$, pour tout j, π_j est de la forme $i\pi'$ et est donc cuspidale. On en déduit que les coefficients lisses de π restreints à G' sont à support compact modulo $Z(G)$. Comme G' est d'indice fini dans G on en déduit que π est cuspidale. Ceci achève de prouver (i).

(ii) Supposons qu'il existe $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$ cuspidale et non nulle. Soit V_1 un sous-espace G-invariant maximal orthogonal à ξ, qui est distinct de V puique ξ est non nulle. Alors ξ passe au quotient à V/V_1 et sa restriction à un sous-module irréductible de V/V_1 est non nulle et clairement cuspidale puisque ξ l'est. Alors d'après (i) celui-ci doit être cuspidal. Ceci contredit l'hypothèse sur V, car P est propre. □

11. Appendice : un résultat de Joseph Bernstein

Soit (π, V) une représentation lisse de G, $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$ et $f \in C_c^\infty(U_0 \backslash G, \psi)$. On note f^* la fonction sur G définie par $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$ pour $g \in G$. On définit $\pi'(f^*)\xi \in \check{V}$, par :

$$\langle \pi'(f^*)\xi, v \rangle = \int_{G/U_0} f^*(g) \langle \pi'(g)\xi, v \rangle \, \mathrm{d}g. \tag{11.1}$$

La représentation régulière droite de G dans $L^2(U_0 \backslash G, \psi)$ se décompose en une intégrale hilbertienne de représentations unitaires irréductibles de G, $(\int_Z^\oplus \pi_z \, \mathrm{d}\mu(z), \int_Z^\oplus H_z \, \mathrm{d}\mu(z))$. On note, pour $z \in Z$, $(\pi_z^\infty, H_z^\infty)$ la représentation lisse de G, π_z^∞, dans l'espace H_z^∞, des vecteurs lisses de H_z, i.e. fixés par un sous-groupe compact ouvert de G.

CAMBRIDGE JOURNALS

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Proposition 14. *Pour μ-presque tout $z \in Z$, il existe un morphisme de G-modules, β_z, entre $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ et H_z^∞ et il existe $\xi_z \in \mathrm{Wh}(\pi_z^\infty)$ tels que :*

(i) *pour tout $f \in C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$, $f = \int_Z^\oplus \beta_z(f)\,\mathrm{d}\mu(z)$;*

(ii) *pour μ-presque tout $z \in Z$, on a*

$$(\beta_z(f), v) = \overline{\langle \pi_z'(f^*)\xi_z, v\rangle}, \quad f \in C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi),\ v \in H_z^\infty.$$

Démonstration. Pour tout sous-groupe compact ouvert H de G et tout sous-ensemble de G, Ω, compact modulo l'action à gauche de U_0, on note $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)_\Omega^H$ l'espace des éléments de $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ invariants à droite par H et à support dans Ω, que l'on munit de la topologie de la convergence uniforme. On note $L^2(U_0\backslash G, \psi)_\Omega^H$ l'adhérence dans $L^2(U_0\backslash G, \psi)$ de $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)_\Omega^H$. Comme H est ouvert, Ω est contenu dans la réunion d'un nombre fini d'orbites de H dans $U_0\backslash G$. Donc cet espace est de dimension finie. On munit $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ de la topologie limite inductive des $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)_\Omega^H$. Montrons la propriété suivante.

(11.2) *L'injection de $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ dans $L^2(U_0\backslash G, \psi)$ est « fine » dans le sens de [**2**, § 1.4].*

Pour cela, d'après [**2**, § 1.6, Lemme 2 et Théorème 1.5], il suffit de prouver que pour tout H et Ω comme ci-dessus l'injection, i, de $L^2(U_0\backslash G, \psi)_\Omega^H$ dans $L^2(U_0\backslash G, \psi)$ est de Hilbert–Schmidt, ce qui est clair puisque cet espace est de dimension finie. Ceci achève de prouver de prouver (11.2).

Alors (i) résulte des propriétés des applications « fines » (voir [**2**, § 1.4]).

On note α_z la restriction à H_z^∞ de l'adjoint de β_z, lorsque β_z est défini. Son image est contenue dans l'espace des vecteurs lisses du dual hermitien de $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$. Cet espace s'identifie à $C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ par l'application qui à $\phi \in C^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ associe la forme antilinéaire sur $C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$ définie par $f \mapsto \int_{U_0\backslash G} \phi(g)\overline{f(g)}\,\mathrm{d}g$. On définit alors $\xi_z(v) := (\alpha_z(v))(1_G)$. On a $\xi_z \in \mathrm{Wh}(\pi_z^\infty)$. De la définition de α_z et ξ_z, on déduit que :

$$(\beta_z(f), v) = (f, \alpha_z(v)) = \int_{U_0\backslash G} f(g)\overline{\xi_z(\pi_z(g)v)}\,\mathrm{d}g.$$

Alors (ii) résulte de la définition (11.1). □

Corollaire 1. *Soit $f \in C_c^\infty(U_0\backslash G, \psi)$, si pour toute représentation unitaire irréductible lisse de G, π, et $\xi \in \mathrm{Wh}(\pi)$, $\pi'(f^*)\xi = 0$, alors f est nulle.*

Remarque 2. Les seules choses utilisées ici sont que G est un groupe localement compact totalement discontinu, que U_0 est un sous-groupe fermé de G tel que $U_0\backslash G$ admette une mesure invariante et que ψ est un caractère lisse de U_0.

Remerciements. L'auteur a bénéficié du soutien du programme ANR-08-BLAN-0259–CSD 5 pendant l'élaboration de ce travail.

Je remercie chaleureusement Paul Mezo qui m'a donné l'impulsion nécessaire pour lever l'hypothèse de la caractéristique nulle.

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

Je remercie vivement le premier referee pour ses suggestions, notamment concernant l'introduction, l'addition de la section sur la conjecture de Lapid-Mao, son analogue cuspidal et l'appendice.

Je remercie très vivement le second referee pour sa lecture attentive et ses remarques constructives.

Références

1. J. Arthur, A local trace formula, *Publ. Math. IHES* **73** (1991), 5–96.
2. J. Bernstein, On the support of the Plancherel measure, *J. Geom. Phys.* **5** (1988), 663–710.
3. J. Bernstein, Representations of p-adic groups, Lectures given at Harvard University (1992), notes taken by K. E. Rummelhart.
4. J. Bernstein, Second adjointness theorem for representations of reductive p-adic groups, unpublished manuscript (available at www.math.tau.ac.il/~bernstei/).
5. J. Bernstein et V. Zelevinsky, Induced representations of reductive p-adic groups, I, *Annales Scient. Éc. Norm. Sup.* **10** (1977), 441–472.
6. P. Blanc et P. Delorme, Vecteurs distributions H-invariants de représentations induites pour un espace symétrique réductif p-adique G/H, *Annales Inst. Fourier* **58** (2008), 213–261.
7. C. Bushnell, Representations of reductive p-adic groups: localization of Hecke algebras and applications, *J. Lond. Math. Soc.* **63**(2) (2001), 364–386.
8. C. Bushnell et G. Henniart, Generalized Whittaker models and the Bernstein center, *Am. J. Math.* **125** (2003), 513–547.
9. W. Casselman, Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups (www.math.ubc.ca/~cass/research.html).
10. W. Casselman et J. Shalika, The unramified principal series of p-adic groups, II, The Whittaker function, *Compositio Math.* **41** (1980), 207–231.
11. P. Deligne, Le « centre » de Bernstein rédigé par Pierre Deligne, Travaux en Cours, dans *Representations of reductive groups over a local field*, pp. 1–32 (Hermann, Paris, 1984).
12. P. Delorme, *Espace des coefficients de représentations admissibles d'un groupe réductif p-adique*, pp. 131–176, Progress in Mathematics, Volume 220 (Birkhäuser, 2004).
13. P. Delorme, The Plancherel formula on reductive symmetric spaces from the point of view of the Schwartz space, dans *Lie theory*, pp. 135–175, Progress in Mathematics, Volume 230 (Birkhäuser, 2005).
14. P. Delorme, Constant term of smooth H_ψ-invariant functions, *Trans. Am. Math. Soc.* **362** (2010), 933–955.
15. V. Heiermann, Une formule de Plancherel pour l'algèbre de Hecke d'un groupe réductif p-adique, *Comment. Math. Helv.* **76** (2001), 388–415.
16. A. Knapp, *Representation theory of semisimple groups: an overview based on examples*, Princeton Landmarks in Mathematics (Princeton University Press, 2001; reprint of 1986 original).
17. E. Lapid et Z. Mao, On the asymptotics of Whittaker functions, *Represent. Theory* **13** (2009), 63–81.
18. N. Matringe, Derivatives and asymptotics of Whittaker functions, *Represent. Theory* **15** (2011), 646–669.
19. E. Michael, Selected selections theorems, *Am. Math. Mon.* **63** (1956), 223–283.
20. F. Rodier, Modèles de Whittaker des représentations admisssibles des groupes réductifs p-adiques quasi-déployés, manuscript non publié.
21. F. Sauvageot, Principe de densité pour les groupes réductifs, *Compositio Math.* **108** (1997), 151–184.

Cambridge Journals

http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128

22. F. Shahidi, Functional equation satisfied by certain L-functions, *Compositio Math.* **37** (1978), 171–207.
23. F. Shahidi, On certain L-functions, *Am. J. Math.* **103** (1981), 297–355.
24. A. Silberger, *Introduction to harmonic analysis on reductive p-adic groups*, Based on lectures by Harish-Chandra at the Institute for Advanced Study, 1971–1973, Mathematical Notes, Volume 23 (Princeton University Press/University of Tokyo Press, 1979).
25. J.-L. Waldspurger, La formule de Plancherel pour les groupes p-adiques (d'après Harish-Chandra), *J. Inst. Math. Jussieu* **2** (2003), 235–333.
26. N. Wallach, *Real reductive groups*, Volume II, Pure and Applied Mathematics, Volume 132(II) (Academic Press, 1992).
27. G. Warner, *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups*, Volume I, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 188 (Springer, 1972).

CAMBRIDGE JOURNALS
http://journals.cambridge.org Downloaded: 30 Jun 2016 IP address: 139.124.6.128