

**Exercice I.** Le symbole de Kronecker  $\delta_{i,j}$  vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon. Pour  $1 \leq k, \ell \leq n$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on considère les matrices  $E_{k,\ell} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $T_{k,\ell}(\lambda) = I_n + \lambda E_{k,\ell}$ .

1. Écrire  $E_{k,\ell}$  et  $T_{k,\ell}(\lambda)$  sous forme de tableaux (avec des pointillés!).
2. Pour une matrice  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ , calculer  $T_{k,\ell}(\lambda)A$  et  $AT_{k,\ell}(\lambda)$ .
3. En déduire qu'ajouter un multiple d'une ligne (ou une colonne) à une autre ne change pas le déterminant.

**Exercice II. Multilinéarité.** Soit  $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$  des scalaires. Soit la matrice  $B = (\delta_{ij} + a_i b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$  (où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker). On pose  $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$  où  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

1. Montrer que  $\det B = \det I + \sum \det(e_1, \dots, e_{j-1}, b_j a, e_{j+1}, \dots, e_n)$ .
2. Déduire que  $\det B = 1 + \sum a_j b_j$

**Exercice III.** On dit qu'une matrice est antisymétrique si  ${}^t M = -M$ . Soit  $A$  une matrice antisymétrique de taille  $n$ .

1. Montrer que si  $n$  est impair, alors  $\det(A) = 0$ .
2. Donner un exemple avec  $n$  pair et  $\det(A) \neq 0$ .

**Exercice IV. 1.** Faire des opérations sur les lignes pour passer de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ à la matrice } C' = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \dots & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \dots & a_3 - a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. En déduire le déterminant de  $C$ .

**Exercice V.** Soit  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . On définit  $A' = (a'_{ij})$  avec  $a'_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$ . Montrer que  $\det(A) = \det(A')$ .

**Exercice VI. Déterminant par bloc** Soit  $A$  une matrice de taille  $n$ .

1. Montrer que  $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det(A)$ .
2. Montrer que si  $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$  on a  $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$
3. Montrer que si  $D \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ , on a  $\det \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$
4. Si  $A$  et  $B$  sont de taille  $n$  alors  $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \det(A-B)$ .

**Exercice VII.** 1. Calculer 
$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

2. Montrer que  $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  est valeur propre de  $D =$

3. Calculer  $\det(D)$ .

$$D = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice VIII. Matrice compagnon.**

Calculer le polynôme caractéristique de

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

**Exercice IX. Déterminant de Vandermonde.**

Calculer

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

(Poser  $X = a_n$  : le déterminant est un polynôme de degré  $n - 1$  en  $X$  qui s'annule en chacun des  $a_i$  pour  $0 < i < n$  donc de la forme  $K \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$  avec  $K$  une constante à calculer.)

**Exercice X.**  $\det$  
$$\begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ c & a & b & \dots & b & b \\ c & c & a & \dots & b & b \\ \vdots & & & \ddots & & \\ c & c & c & \dots & a & b \\ c & c & c & \dots & c & a \end{pmatrix}$$

(Ajouter  $X$  partout, et montrer que le déterminant est un polynôme de degré 1 en  $X$ .)

**Exercice XI.** Calculer le déterminant de  $G = (\sin(i+j))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Vous pourrez remarquer

que la  $j$ -ème colonne est  $\cos(j) \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \sin(2) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix} + \sin(j) \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \cos(2) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}.$

**Exercice XII.** Soit  $H = (\text{pgcd}(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

1. Montrer que pour tout entier  $m$ ,  $\sum_{k|m} \varphi(k) = m$  où  $\varphi$  est l'indicatrice d'EULER :  $\varphi(n)$  est le nombre d'éléments inversibles de  $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ .

2. Soient  $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  avec  $b_{ij} = \begin{cases} \varphi(j) & \text{si } j \mid i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  et  $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \mid j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ . Calculer  $BC$ .

3. Dédire  $\det(H)$  des questions précédentes.

**Exercice XIII.** Soit  $M$  une matrice carrée de taille  $n$  à coefficient entier. On suppose que  $M$  est inversible.

Montrer que  $M^{-1}$  est à coefficients entiers si et seulement si  $\det(M) \in \{-1, 1\}$

**Exercice XIV.** On note  $\text{com}(M)$  la comatrice de  $M$ .

1. Calculer  $\det(\text{com}(M))$  en fonction de  $\det(M)$ .
2. Calculer  $\text{com}(\text{com}(M))$  dans le cas où  $M$  est inversible.

**Exercice XV.** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $n$ .

1. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont inversibles on a  $\text{com}(AB) = \text{com}(A)\text{com}(B)$ .
2. Montrer que pour tout  $\lambda \notin \text{Spec}(A) \cup \text{Spec}(B)$ , on a  $\text{com}((A - \lambda I_n)(B - \lambda I_n)) = \text{com}(A - \lambda I_n)\text{com}(B - \lambda I_n)$ .
3. En déduire que  $\text{com}(AB) = \text{com}(A)\text{com}(B)$  (en remarquant que les coefficients des matrices de la question précédente sont polynomiaux en  $\lambda$ .)
4. Montrer que si  $A$  et  $B$  sont semblables alors  $\text{com}(A)$  et  $\text{com}(B)$  sont semblables.

**Exercice XVI. Déterminant circulant.** Soit  $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de  $J$ , ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_n & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$ .

2. Montrer que  $a_0 + a_1 + \dots + a_n$  est valeur propre de  $A$ .
3. Montrer que  $A = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1}$ .
4. En déduire que les vecteurs propres de  $J$  sont aussi des vecteurs propres de  $A$ .
5. Conclure que  $A$  est diagonalisable et donner ses valeurs propres et son déterminant.

**Exercice XVII.** Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées.

1. Montrer que  $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$ .
2. Montrer que les polynômes caractéristiques satisfont  $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ .

*Indications : methode 1 : Le montrer d'abord pour  $A$  inversible.*

*methode 2 : Écrire un polynome caractéristique sur  $\mathbb{C}$   $\chi_M = \prod(\lambda_i - X)$ , et les coefficients sont déterminés par les sommes  $\sum \lambda_i^k$ , pour  $k = 1, \dots, n = \text{Trace}(M^k)$ ; Montrer que  $\text{Trace}((AB)^k) = \text{Trace}((BA)^k)$ .*

**Exercice XVIII.** Soit  $E = C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ , l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur  $\mathbb{R}^+$ .

1. Montrer que l'application  $\Phi$  définie par  $\Phi(f) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$  est un endomorphisme de  $E$ .
2. Déterminer les valeurs propres de  $\Phi$ .

(Ecrire  $\lambda f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$  ; montrer que 0 n'est pas une valeur propre ; montrer que les fonctions propres sont différentiables, et après dérivation considérer les deux cas  $\lambda = 1$  et  $\lambda \neq 1$ .)

**Exercice XIX.** Soient  $f, g$  deux endomorphismes qui commutent.

1. Montrer que tout sous-espace propre de  $f$  est stable par  $g$ .
2. Montrer que si  $g$  est diagonalisable, alors la restriction de  $g$  à un sous-espace stable est diagonalisable. (Utiliser le polynôme annulateur.)
3. Montrer que si  $f$  et  $g$  sont diagonalisables, alors ils sont diagonalisables dans la même base.
4. Montrer que si  $f$  et  $g$  commutent et sont trigonalisables alors ils sont trigonalisables dans la même base.

Montrer que  ${}^t f$  et  ${}^t g$  ont un vecteur propre commun dont l'orthogonal est stable par  $f$  et  $g$ . Conclure par récurrence.