

Devoir à la maison

à rendre le
jeudi 3 décembre 2015

Exercice I. Soit K un corps, et $M_2(K)$ l'espace vectoriel des matrices 2×2 à coefficients dans K . Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$. On définit une application f par

$$\begin{aligned} f : M_2(K) &\rightarrow M_2(K) \\ M &\mapsto AM \end{aligned} .$$

1. Montrez que f est un endomorphisme de $M_2(K)$.
2. Soit $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $M_2(K)$. Vérifiez que B est une base de $M_2(K)$.
3. Quelle est la matrice de f dans la base B ?
4. Calculez le polynôme caractéristique de f . Quelles sont les valeurs propres de f ?
5. Déterminer les espaces propres de f .
6. L'endomorphisme f est-il diagonalisable?