

1. PERMUTATIONS

On note S_n l'ensemble des permutations à n éléments.

Exercice I. On appelle ordre d'une permutation σ le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $\sigma^n = id$.

- (1) Trouver l'ordre des permutations $(12)(345)$ et (1234) .
- (2) Quel est l'ordre d'un cycle ?
- (3) Montrer que l'ordre d'un produit de cycles à supports disjoints est égal au produit des ordres des cycles.
- (4) Calculer l'ordre de la permutation $(13)(12345)(25)$.
- (5) Montrer que toute permutation a un ordre fini.

Exercice II. Combien y-a-t'il de 3-cycles dans S_5 ? Plus généralement, combien y-a-t'il de k -cycles dans S_n ?

Exercice III. Soit la permutation $\sigma = (123)(67)(74321)(53)$.

- (1) Trouver la décomposition en cycles à supports disjoints de σ .
- (2) Donner une décomposition en produit de transpositions.
- (3) Quelle est la signature de σ ?

2. DÉTERMINANT

Exercice IV. Le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon. Pour $1 \leq k, \ell \leq n$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on considère les matrices $E_{k,\ell} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $T_{k,\ell}(\lambda) = I_n + \lambda E_{k,\ell}$.

1. Écrire $E_{k,\ell}$ et $T_{k,\ell}(\lambda)$ sous forme de tableaux (avec des pointillés!).
2. Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, calculer $T_{k,\ell}(\lambda)A$ et $AT_{k,\ell}(\lambda)$.
3. En déduire qu'ajouter un multiple d'une ligne (ou une colonne) à une autre ne change pas le déterminant.

Exercice V. Multilinéarité. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ des scalaires. Soit la matrice $B = (\delta_{ij} + a_i b_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ (où δ_{ij} est le symbole de Kronecker). On pose $a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{K}^n .

1. Montrer que $\det B = \det I + \sum \det(e_1, \dots, e_{j-1}, b_j a, e_{j+1}, \dots, e_n)$.
2. Déduire que $\det B = 1 + \sum a_j b_j$

Exercice VI. On dit qu'une matrice est antisymétrique si ${}^t M = -M$. Soit A une matrice antisymétrique de taille n .

1. Montrer que si n est impair, alors $\det(A) = 0$.
2. Donner un exemple avec n pair et $\det(A) \neq 0$.

Exercice VII. 1. Faire des opérations sur les lignes pour passer de la matrice

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ à la matrice } C' = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_2 - a_1 & \dots & a_2 - a_1 \\ 0 & 0 & a_3 - a_2 & \dots & a_3 - a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n - a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

2. En déduire le déterminant de C .

Exercice VIII. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $A' = (a'_{ij})$ avec $a'_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$.
Montrer que $\det(A) = \det(A')$.

Exercice IX. Déterminant par bloc Soit A une matrice de taille n .

1. Montrer que $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix} = \det(A)$.
2. Montrer que si $B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ on a $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$
3. Montrer que si $D \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, on a $\det \begin{pmatrix} A & D \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B)$
4. Si A et B sont de taille n alors $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A+B) \det(A-B)$.

Exercice X. 1. Calculer $\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$

2. Montrer que $a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ est valeur propre de $D = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 0 \end{pmatrix}$.
3. Calculer $\det(D)$.

Exercice XI. Matrice compagnon. Calculer le polynôme caractéristique de $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Exercice XII. Déterminant de Vandermonde. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$.

(Poser $X = a_n$: le déterminant est un polynôme de degré $n - 1$ en X qui s'annule en chacun des a_i pour $0 < i < n$ donc de la forme $K \prod_{i=1}^{n-1} (X - a_i)$ avec K une constante à calculer.)

Exercice XIII. $\det \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b & b \\ c & a & b & \dots & b & b \\ c & c & a & \dots & b & b \\ \vdots & & & \ddots & & \\ c & c & c & \dots & a & b \\ c & c & c & \dots & c & a \end{pmatrix}$

(Ajouter X partout, et montrer que le déterminant est un polynôme de degré 1 en X .)

Exercice XIV. Calculer le déterminant de $G = (\sin(i+j))_{1 \leq i, j \leq n}$. Vous pourrez remarquer

que la j -ème colonne est $\cos(j) \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \sin(2) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix} + \sin(j) \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \cos(2) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$.

Exercice XV. Soit $H = (\text{pgcd}(i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Montrer que pour tout entier m , $\sum_{k|m} \varphi(k) = m$ où φ est l'indicatrice d'EULER: $\varphi(n)$ est le nombre d'éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

2. Soient $B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ et $C = (c_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $b_{ij} = \begin{cases} \varphi(j) & \text{si } j \mid i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \mid j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Calculer BC .

3. Dédurre $\det(H)$ des questions précédentes.

Exercice XVI. Soit M une matrice carrée de taille n à coefficient entier. On suppose que M est inversible.

Montrer que M^{-1} est à coefficients entiers si et seulement si $\det(M) \in \{-1, 1\}$

Exercice XVII. On note $\text{com}(M)$ la comatrice de M .

- Calculer $\det(\text{com}(M))$ en fonction de $\det(M)$.
- Calculer $\text{com}(\text{com}(M))$ dans le cas où M est inversible.

Exercice XVIII. Soit A et B deux matrices carrées de taille n .

- Montrer que si A et B sont inversibles on a $\text{com}(AB) = \text{com}(A)\text{com}(B)$.
- Montrer que pour tout $\lambda \notin \text{Spec}(A) \cup \text{Spec}(B)$, on a $\text{com}((A - \lambda I_n)(B - \lambda I_n)) = \text{com}(A - \lambda I_n)\text{com}(B - \lambda I_n)$.
- En déduire que $\text{com}(AB) = \text{com}(A)\text{com}(B)$ (en remarquant que les coefficients des matrices de la question précédente sont polynomiaux en λ .)
- Montrer que si A et B sont semblables alors $\text{com}(A)$ et $\text{com}(B)$ sont semblables.

Exercice XIX. Déterminant circulant. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer le polynôme caractéristique de J , ses valeurs propres et ses vecteurs propres.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_n & a_0 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $a_0 + a_1 + \dots + a_n$ est valeur propre de A .
3. Montrer que $A = a_0 I_n + a_1 J + \dots + a_{n-1} J^{n-1}$.
4. En déduire que les vecteurs propres de J sont aussi des vecteurs propres de A .
5. Conclure que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres et son déterminant.

Exercice XX. Soit A et B deux matrices carrées.

1. Montrer que $\text{trace}(AB) = \text{trace}(BA)$.
2. Montrer que les polynômes caractéristiques satisfont $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Indications: methode 1: Le montrer d'abord pour A inversible.

methode 2: Écrire un polynome caractéristique sur \mathbb{C} $\chi_M = \prod(\lambda_i - X)$, et les coefficients sont déterminés par les sommes $\sum \lambda_i^k$, pour $k = 1, \dots, n = \text{Trace}(M^k)$; Montrer que $\text{Trace}((AB)^k) = \text{Trace}((BA)^k)$.

Exercice XXI. Soit $E = C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur \mathbb{R}^+ .

1. Montrer que l'application Φ définie par $\Phi(f) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer les valeurs propres de Φ .

(Écrire $\lambda f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$; montrer que 0 n'est pas une valeur propre; montrer que les fonctions propres sont différentiables, et après dérivation considérer les deux cas $\lambda = 1$ et $\lambda \neq 1$.)

Exercice XXII. Soient f, g deux endomorphismes qui commutent.

1. Montrer que tout sous-espace propre de f est stable par g .
2. Montrer que si g est diagonalisable, alors la restriction de g à un sous-espace stable est diagonalisable. (*Utiliser le polynôme annulateur.*)
3. Montrer que si f et g sont diagonalisables, alors ils sont diagonalisables dans la même base.
4. Montrer que si f et g commutent et sont trigonalisables alors ils sont trigonalisables dans la même base.

Montrer que ${}^t f$ et ${}^t g$ ont un vecteur propre commun dont l'orthogonal est stable par f et g . Conclure par récurrence.