

Devoir maison

15 février 2018

On considère la substitution

$$s : \begin{cases} a \mapsto aab \\ b \mapsto a \end{cases}$$

1. Calculer la matrice d'incidence de la substitution s .
2. La substitution s est-elle irréductible ? est-elle primitive ?
3. La substitution s est-elle de type Pisot unité ?
4. Combien y-a-t'il de points fixes infinis à droite ? Combien y-a-t'il de points périodiques bi-infinis ?
5. On considère le mot infini $u \in \{a, b\}^{\mathbb{N}}$ qui est le point fixe de s commençant par la lettre a . Dessiner le début de la ligne discrète D_u .
6. On considère l'application linéaire

$$\pi : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x - (1 + \sqrt{2})y \end{cases} .$$

Montrer que l'ensemble $\pi(D_u)$ est borné.

7. On pose $\gamma = 1 - \sqrt{2}$, $R_a = \overline{\pi(D_{u,a})}$ et $R_b = \overline{\pi(D_{u,b})}$. Ecrire le système d'équations gIFS que vérifient R_a et R_b , en utilisant γ .
8. Les intérieurs de R_a et R_b sont-ils disjoints ?
9. Décrire $\pi(D_u)$ à l'aide d'un langage rationnel sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$.
10. En utilisant la question précédente, montrer que l'on a l'inclusion

$$R_a \cup R_b \subseteq [-1, \sqrt{2} + 1].$$

11. En déduire que le sous-shift engendré par le mot u est mesurablement conjugué à une translation du tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} , ainsi qu'à un échange d'intervalles que l'on explicitera.
12. En déduire que u est un mot sturmien. Quel est son angle ?
13. Démontrer que l'on a

$$D_u = \{x \in \mathbb{N}^2 \mid \pi(x) \in]-1, \sqrt{2} + 1[\} .$$