Corrigé de l'examen du 27 avril 2018

Exercice 1

On considère la substitution suivante, sur l'alphabet $A = \{1, 2\}$.

$$s: \begin{array}{l} 1 \mapsto 112 \\ 2 \mapsto 21 \end{array}$$

1. Calculer la matrice d'incidence M de la substitution s.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. La substitution s est-elle irréductible ? Est-elle primitive ?

La matrice est à coefficients strictement positifs, donc elle est primitive et donc aussi irréductible.

3. La substitution s est-elle de type Pisot ? Est-elle unimodulaire ?

Le polynôme caractéristique de la matrice d'incidence est $X^2 - 3X + 1$ qui est irréductible sur $\mathbb{Q}$. Ses racines sont $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Or, on a $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$ et $0 < \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < 1$, donc s est de type Pisot. De plus, le déterminant de N vaut 1, donc la substitution est de type Pisot unité.

4. Combien y-a-t'il de points fixes infinis à droite ? Combien y-a-t'il de points périodiques bi-infinis ?

Il y a deux points fixes infinis à droite, que l'on obtient en itérant la substitution à partir de chacune des lettres 1 et 2. Ce sont les seuls, puisque si $u \in \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ est un point fixe, alors $s(u) = u$, et donc $u = \lim_{n\to\infty} s^n(u) = \lim_{n\to\infty} s(a)$ où a est la première lettre de u.
De la même façon, s n'a pas de point fixe infini à gauche, mais son carré

$$s^2: \begin{array}{l} 1 \mapsto 11211221 \\ 2 \mapsto 21112 \end{array}$$

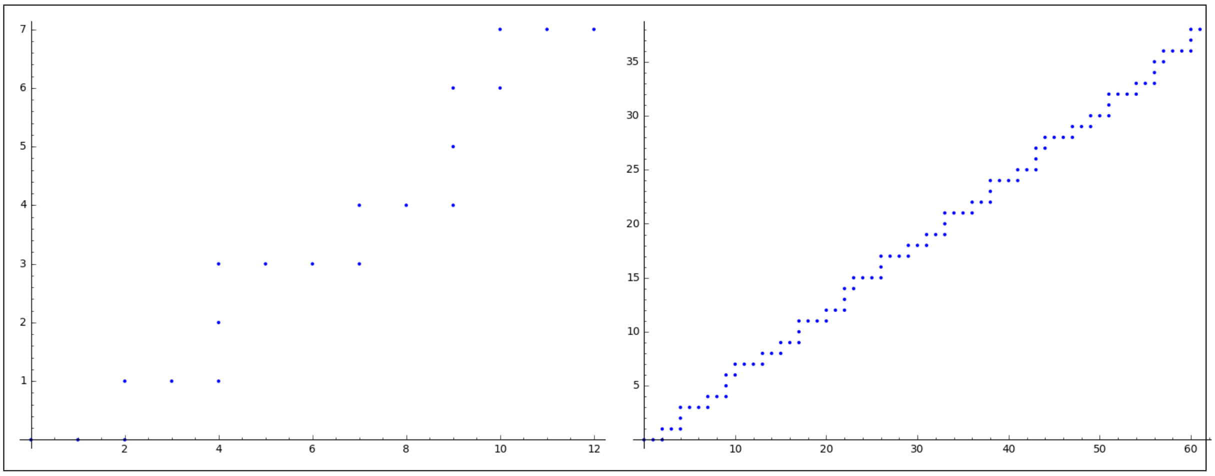
admet deux points fixes infinis à gauche, puisque $s^2(1)$ termine par la lettre 1, et $s^2(2)$ termine par la lettre 2. Les points périodiques bi-infinis de s sont obtenus en concaténant un point fixe infini à gauche et un point fixe infini à droite d'une puissance de s. On obtient donc 4 points périodiques bi-infinis :

...121112211121121122 1.11211221112112212 1112...

5. On considère le mot infini $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui est le point fixe de s commençant par la lettre 1. Dessiner le début de la ligne discrète

$$D_u = \left\{ \mathrm{Ab}(v) \;\middle|\; v \text{ préfixe fini de } u \right\}.$$

Tournez la page S.V.P.



6. Soit $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application linéaire telle que $\pi(e_1) = 1$ et $\pi(D_u)$ est borné, et soit (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que π existe et est unique. Que vaut $\pi(e_2)$?

D'après le cours, comme s est une substitution de type Pisot unité, la ligne discrète D_u reste à distance bornée de la droite propre pour la plus grande valeur propre de la matrice d'incidence M. L'ensemble $\pi(D_u)$ est donc borné si et seulement si $\pi(v) = 0$ où v est un vecteur directeur pour cette droite propre (c'est-à-dire un vecteur propre de M pour la plus grande valeur propre). Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ un tel vecteur propre. On a $0 = \pi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x\pi(e_1) + y\pi(e_2) = x + y\pi(e_2)$, et on a d'autre part $\begin{pmatrix} 2x+y \\ x+y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, donc $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} y$. On obtient donc $\pi(e_2) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et donc π est unique. L'existence est aussi vérifiée puisque l'application linéaire

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} y \end{array}$$

vérifie bien les conditions voulues.

7. Vérifier qu'il existe un réel γ tel que l'on ait $\pi(MX) = \gamma\pi(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, et calculer ce réel.

On remarque que l'on a

$$\pi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour $\gamma = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ on a bien $\pi(MX) = \gamma\pi(X)$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$. (On se doutait bien que γ allait être la valeur propre de module inférieur à 1 de M.)

8. Décrire l'ensemble $\pi(D_u)$ à l'aide d'un automate ayant pour alphabet $\{0, 1, 2, \gamma - 2\}$.

Si $\mathcal{A}^{PA}$ est l'automate des préfixes abélianisés, on a

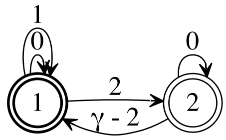
$$D_u = \left\{ \sum_{k=0}^{n} M^{n-k} t_k \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ 1 \xrightarrow{t_0} \dots \xrightarrow{t_n} q \in \mathcal{A}^{PA},\ q \in \{1,2\} \right\}.$$

Et l'aphabet de $\mathcal{A}^{PA}$ est l'ensemble des abélianisés de préfixes stricts de $s(1)$ et de $s(2)$, donc $\{0, e_1, 2e_1, e_2\}$. En appliquant π, on obtient

$$\pi(D_u) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} M^{n-k} t_k \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ 1 \xrightarrow{t_0} \dots \xrightarrow{t_n} q \in \mathcal{A}^{PAP},\ q \in \{1,2\} \right\}.$$

où $\mathcal{A}^{PAP}$ est l'automate des préfixes abélianisés où l'on a appliqué π aux étiquettes des transitions. L'alphabet de $\mathcal{A}^{PAP}$ est $\{\pi(0), \pi(e_1), 2\pi(e_1), \pi(e_2)\} = \{0, 1, 2, \gamma - 2\}$.

FIGURE 1 – Automate $\mathcal{A}^{PAP}$



9. On pose $R = \overline{\pi(D_u)}$, et pour tout $i \in \{1,2\}$, $R_i = \overline{\pi(D_{u,i})}$. Ecrire le système d'équations gIFS que vérifient R_1 et R_2.

On déduit de la description précédente de $\pi(D_u)$ que l'on a

$$\begin{aligned} R_1 &= \gamma R_1 \cup \gamma R_1 + 1 \cup \gamma R_2 + \gamma - 2 \\ R_2 &= \gamma R_2 \cup \gamma R_1 + 2. \end{aligned}$$

10. Les interieurs de R_1 et de R_2, sont-ils disjoints ?

D'après le cours, les intérieurs de R_1 et de R_2 sont disjoints si la substitution s vérifie la strong coincidence. On a $s^2(1) = 11211221 = (112)1(1221)$ et $s^2(2) = 21112 = (211)1(2)$. Or, $\mathrm{Ab}(112) = \mathrm{Ab}(211)$. Ainsi, la substitution satisfait bien la strong coincidence, ce qui donne la disjonction en mesure de R_1 et de R_2.

11. Expliciter ce qu'est le groupe $\Gamma_0 =< e_i - e_j >_{i,j \in A}$, ainsi que le groupe $\pi(\Gamma_0)$.

$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}$ et $\pi(\Gamma_0) = \pi(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})\mathbb{Z} = (3 - \gamma)\mathbb{Z} = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}\mathbb{Z}$.

12. Montrer que l'on a l'inclusion

$$R \subseteq \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5} + 1 \right]$$

D'après la description de $\pi(D_u)$ par automate que l'on a obtenue, on voit que l'on a pour tout $x \in \pi(D_u)$,

$$|x| \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2\gamma^k = \frac{2}{1-\gamma} = 1 + \sqrt{5}.$$

De plus, on vérifie que l'on a $R_2 \subseteq \mathbb{R}_+$. En effet, on a $R_2 = \gamma \mathbb{R}_2 \cup \gamma R_1 + 2$, mais la majoration précédente montre que l'on a

$$\gamma x + 2 \geq 2 - \gamma(1 + \sqrt{5}) = 3 - \sqrt{5} \geq 0.$$

Le plus petit élément de R_2 est 0, et donc le plus petit élément de $R_1 = \gamma R_1 \cup \gamma R_1 + 1 \cup \gamma R_2 + \gamma - 2$ est $\gamma - 2 = -\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

13. L'union $\bigcup_{t\in\pi(\Gamma_0)} R+t=\mathbb{R}$ est-elle disjointe en mesure ?

Si l'union n'était pas disjointe en mesure, d'après le cours presque tout réel (au sens de la mesure de Lebesgue) serait recouvert par au moins deux translatés (le nombre de fois qu'un point est recouvert est même presque surement constant). Mais cela n'est pas possible, puisque la longueur de l'intervalle $\left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}+1\right]$ qui contient R est strictement inférieure à deux fois le générateur $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ du groupe $\pi(\Gamma_0)$. L'union est donc disjointe en mesure.

14. Montrer que le sous-shift engendré par le mot u est mesurablement conjugué à une translation du cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ que l'on explicitera.

D'après un critère vu dans le cours dont toutes les hypothèses sont vérifiées ici, le sous-shift engendré par u est uniquement ergodique et mesurablement conjugué à la translation par $\pi(e_1)=1$ sur le tore $\mathbb{R}/\pi(\Gamma_0)=\mathbb{R}/(\frac{3+\sqrt{5}}{2})\mathbb{Z}$. En divisant tout pas $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, on obtient une translation par $1/(cfrac3+\sqrt{5}2)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\gamma$ sur le cercle $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

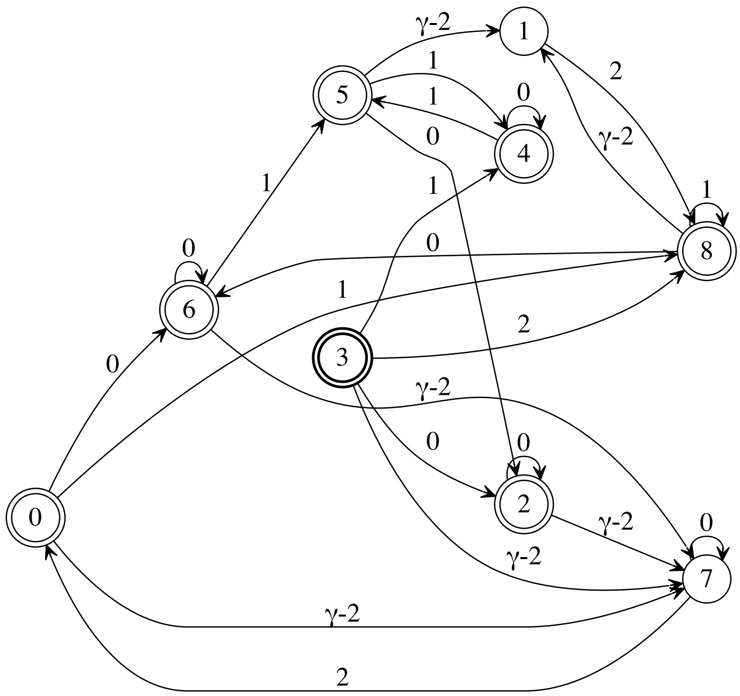
15. Le mot u est-il sturmien ?

Le mot u n'est pas sturmien, puisqu'il contient les mots 11 et 22 comme facteurs.

16. Démontrer que R n'est pas connexe.

Une partie fermée de $\mathbb{R}$ est connexe si et seulement si c'est un intervalle. Or, on a $2\in R$ et $\gamma-2\in\mathbb{R}$: il suffit de voir que $1\xrightarrow{2}2\in\mathcal{A}^{PAP}$, et donc $2\in\pi(D_u)\subseteq R$, et $1\xrightarrow{2}2\xrightarrow{0}2\xrightarrow{0}2 \ldots \xrightarrow{\gamma-2}1\in\mathcal{A}^{PAP}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2\gamma^n+\gamma-2\in\pi(D_u)\subseteq R$. Si R était connexe, il contiendrait donc tout l'intervalle $[\gamma-2,2]$. Mais alors les translatés par $\pi(\Gamma_0)$ ne seraient pas d'intérieurs disjoints, puisque la longueur de cet intervalle est strictement supérieure au générateur $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ de $\pi(\Gamma_0)$. Comme on a montré que les translatés de R par $\pi(\Gamma_0)$ sont disjoints en mesure, on en déduit que R n'est pas connexe.

FIGURE 2 – Automate $\mathcal{A}_b$



On admet que le bord ∂R de R vérifie

$$\partial R = \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} a_i \gamma^i \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ 3 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} \dots \in \mathcal{A}_b \right\},$$

où $\mathcal{A}_b$ est l'automate de la figure 2, et $2 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} \dots \xrightarrow{a_n} \dots \in \mathcal{A}_b$ signifie qu'il y a un chemin infini partant de l'état 2 et étiqueté par $(a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \{0, 1, 2, \gamma - 2\}^{\mathbb{N}}$ dans l'automate $\mathcal{A}_b$.

17. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\gamma^n(3\gamma - 2) \in \partial R$.

On voit sur l'automate $\mathcal{A}_b$ qu'il existe un chemin infini

$$3 \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{0} 2 \dots \xrightarrow{0} 2 \xrightarrow{\gamma-2} 7 \xrightarrow{2} 0 \xrightarrow{0} 6 \xrightarrow{0} 6 \dots,$$

ce qui nous donne pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=0}^{n-1} 0 \times \gamma^k + (\gamma - 2)\gamma^n + 2\gamma^{n+1} + \sum_{k=n+2}^{+\infty} 0 \times \gamma^k \in \partial R$, d'où $\gamma^n(3\gamma - 2) \in \partial R$. Pour $n = 0$, on a également le chemin infini

$$3 \xrightarrow{\gamma-2} 7 \xrightarrow{2} 0 \xrightarrow{0} 6 \xrightarrow{0} 6 \dots,$$

qui nous donne $3\gamma - 2 = \gamma - 2 + 2\gamma + \sum_{k=2}^{+\infty} 0 \times \gamma^k$.

18. Ecrire la matrice N associée au graphe de l'automate $\mathcal{A}_b$ de la figure 2.

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

19. On admet que le polynôme caractéristique de N vaut

$$\chi_N(x) = x^2 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^4 \cdot (x^2 - 2x - 1).$$

Calculer le rayon spectral de N. En déduire la dimension de Minkowski-Bouligand du bord ∂R.

La plus grande racine de χ_N est $1 + \sqrt{2}$. C'est donc le rayon spectral de N.
En généralisant le résultat du cours donnant la dimension du bord de Tribonnacci, on montre que l'on a

$$\dim_{MB}(\partial R) = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{\log(\frac{3+\sqrt{5}}{2})} \simeq 0.915785461953657.$$

Pour montrer cela, on a déjà une majoration naturelle de ∂R par une union d'intervalles :

$$\partial R \subseteq \bigcup_{3 \xrightarrow{t_0} \dots \xrightarrow{t_n} q} \gamma^{n+1} \left[-\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \sqrt{5}+1 \right] + \sum_{k=0}^{n} t_k \gamma^k,$$

qui donne l'inégalité

$$N_{cov}(\gamma^n \frac{3+2\sqrt{5}}{4}) \leq \text{ nombre de chemins de longueur } n \text{ dans } \mathcal{A}_b \text{ depuis l'état 3.}$$

Or, le nombre de chemin de longueur n depuis l'état 3 est donné par la somme des coefficients de la troisième ligne de la matrice N^n. Cela est majoré par $C\lambda^n$, où C est une constante et $\lambda = 1 + \sqrt{2}$ est le rayon spectral de N. Ainsi, on obtient la majoration

$$\dim_{MB}(\partial R) \leq \frac{\log(1+\sqrt{2})}{\log(\frac{3+\sqrt{5}}{2})}.$$

Pour obtenir l'autre inégalité, on démontre le lemme

Lemme 0.1: Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble $X = \left\{\sum_{k=0}^{n} t_k \gamma^k \;\middle|\; \forall k,\ t_k \in \{0,1,2,\gamma-2\}\right\}$ est $c\gamma^n$-séparé.

On verifie aussi que les mots $t_0 t_1 ... t_n$ de longueurs $n+1$ de l'automate $\mathcal{A}_b$ donnent des sommes $\sum_{k=0}^{n} t_k \gamma^k$ qui sont différentes deux à deux. Cela donne alors l'autre inégalité.

Exercice 2

On considère la substitution suivante, sur l'alphabet $A = \{a, b, c, d\}$

$$s : \begin{cases} a \mapsto ab \\ b \mapsto cd \\ c \mapsto bcd \\ d \mapsto cc \end{cases}$$

1. Calculer la matrice d'incidence M de la substitution s, et vérifier que 1 est une valeur propre de cette matrice.

La matrice d'incidence est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $\chi_M(x) = (x-1)(x^3 - x^2 - 3x - 2)$, donc 1 est valeur propre de M.

2. La substitution s est-elle irréductible ? Est-elle primitive ?

La substitution n'est pas irréductible (et donc pas non plus primitive) parce-que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s^n(b)$ ne contient pas la lettre a. De manière équivalente, l'automate des préfixes n'est pas fortement connexe parce-qu'il n'existe pas de chemin de l'état b vers l'état a.

On admet que la plus grande valeur propre de M en valeur absolue est un nombre $\beta > 2$ dont le polynôme minimal est $p_\beta(x) = x^3 - x^2 - 3x - 2$. Et on admet que le polynôme p_β n'a pas de racine réelle autre que β.

3. La substitution s est-elle Pisot ? Est-elle unimodulaire ?

La substitution est Pisot si et seulement si β est un nombre de Pisot. Soit $\gamma \in \mathbb{C}$ un conjugué de β (il n'y a pas de conjugué réel, donc il y a nécessairement un conjugué complexe). Le conjugué complexe $\overline{\gamma}$ est aussi un conjugué de β puisque p_β est à coefficients réels. On a alors $\beta\gamma\overline{\gamma} = 2$, et comme $\beta > 2$, on en déduit $|gamma| = |\overline{\gamma}| < 1$. Ainsi, β est bien un nombre de Pisot, et donc la substitution est Pisot.
En revanche, la substitution n'est pas unimodulaire, puisque le déterminant de sa matrice d'incidence M vaut $2 \notin \{-1, 1\}$.

4. Combien y-a-t'il de points fixes infinis à droite ?

Il n'y a qu'un seul point fixe infini à droite puisque a est la seule lettre i telle que $s(i)$ commence par i.

5. On considère le mot infini $u \in A^{\mathbb{N}}$ qui est le point fixe de s commençant par la lettre a. Calculer les 20 premières lettres de u.

$$u = abcdbcdcccdbcdccbcdbcdbcdcccdbcdccbcdbcd...$$

6. Donner un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel E muni d'une métrique pour laquelle il est localement compact, et une application linéaire $\pi : \mathbb{Q}^4 \to E$ tels que
— $R = \overline{\pi(D_u)}$ est borné,
— les ensembles $R_i = \overline{\pi(D_{u,i})}$ satisfont une équation gIFS avec disjonction en mesure.

On donnera explicitement l'équation gIFS.

On a une application $\pi_\beta : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}(\beta)$ qui est le produit scalaire avec un vecteur propre à gauche de M. On a vu dans le cours qu'il suffisait de prendre pour E le produit des complétés du corps de nombre $\mathbb{Q}(\beta)$ pour les places de valeurs absolues v telles que $|\beta|_v < 1$. Or, il y a une place complexe correspondant à la valeur propre complexe de module strictement inférieur à 1, et il y a aussi des places ultramétriques au dessus de $2 = \det(M)$ à considérer. On vérifie que le polynôme $p_\beta(x) = x^3 - x^2 - 3x - 2$ a deux racines dans $\mathbb{Z}_2$ grâce au lemme de Hensel : On a $p_\beta(0) = 0$ modulo 2 et $p'_\beta(0) = 1$ modulo 2, donc il existe une racine dans $\mathbb{Z}_2$ qui est congrue à 0 modulo 2. Il ne peut pas exister d'autre racine congrue à 0 modulo 2 parce-que le lemme de Hensel donne un algorithme pour calculer une telle racine, et cet algorithme donne une unique solution. (On peut en fait montrer qu'il n'y a pas d'autre racine dans $\mathbb{Q}_2$, même sans cette condition.) On obtient donc une unique place ultramétrique au dessus de 2 telle que $|\beta|_2 < 1$, et le complété de $\mathbb{Q}(\beta)$ pour cette place est $\mathbb{Q}_2$. Ainsi, on peut choisir

$$E = \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_2,$$

et l'application

$$\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^4 & \to & E \\ X & \mapsto & (\sigma_v(\pi_\beta(X)))_{v \in \mathcal{P}} \end{array},$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des deux places et pour $v \in \mathcal{P}$, σ_v est le plongement naturel de $\mathbb{Q}(\beta)$ dans son complété pour la valeur absolue v.
On obtient l'équation gIFS

$$\begin{array}{rcl} R_a & = & \beta.R_a \\ R_b & = & \beta.R_a + \pi(e_a) \cup \beta.R_c \\ R_c & = & \beta.R_b \cup \beta.R_c + \pi(e_c) \cup \beta.R_d \cup \beta.R_d + \pi(e_c) \\ R_d & = & \beta.R_b + \pi(e_c) \cup \beta.R_c + \pi(e_b + e_c) \end{array}$$

où $\beta.(x_v)_{v\in\mathcal{P}}$ signifie $(\sigma_v(\beta)x_v)_{v\in\mathcal{P}}$.

7. La substitution s satisfait-elle la strong coincidence ?

La strong coincidence ne peut pas être satisfaite, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s^n(b)$ ne contient pas de lettre a, tandis que $s^n(a)$ commence par la lettre a. L'abélianisé d'un préfixe de $s^n(a)$ ne pourra donc jamais être égal à celui d'un préfixe de $s^n(b)$, hormis pour le préfixe trivial (mot vide), mais la lettre qui suit ce préfixe ne peut alors pas être la même (a d'un coté et pas de l'autre).

8. La substitution s restreinte aux lettres $\{b, c, d\}$ satisfait-elle la strong coincidence ?

La restriction de s aux trois dernières lettres a bien un sens, puisque la lettre a n'apparait pas dans $s(b)$, $s(c)$ ni dans $s(d)$.
Les lettres b et d coincident trivialement puisque $s(b)$ et $s(d)$ commencent par la même lettre c. On a ensuite $s^2(b) = bcdcc$ et $s^2(c) = cdbcdcc$, ce qui donne une coincidence entre les lettres b et c avec les préfixes respectifs bcd et cdb : les deux préfixes ont bien les mêmes abélianisés et continuent avec la même lettre c. Pour vérifier la coincidence entre c et d, on itère encore s : $s^3(c) = bcdcccdbcdccbcdbcd$ et $s^3(d) = cdbcdcccdbcdcc$. Les préfixes respectifs bcd et cdb ont même abélianisés et continuent avec la même lettre c.
Ainsi, la substitution s restreinte aux trois dernières lettres vérifie bien la strong coincidence.