

Devoir maison

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(nx)}{n2^n}$$

pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?
2. Montrer que la fonction f est 2π -périodique.
3. Montrer que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et que sa dérivée f' vérifie

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(nx)}{2^n}$$

pour tout réel x .

4. Montrer que l'on a

$$f'(x) = \frac{2 \cos(x) - 1}{5 - 4 \cos(x)}$$

pour tout réel x .

5. On veut en déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.
 - (a) Donner une expression de $f(x)$ comme intégrale d'une fonction de la variable u .
 - (b) Effectuer le changement de variable $t = \tan(u/2)$. Vérifier que l'on obtient

$$f(x) = \int_0^{\tan(x/2)} \frac{2(1 - 3t^2)}{(9t^2 + 1)(t^2 + 1)} dt$$

- (c) Calculer cette intégrale.
- (d) On a obtenu une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles. Cette expression est-elle bien définie sur \mathbb{R} ? Expliquer.