

Devoir maison n°3

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}.$$

1. Quel est le domaine de définition I de f ?
2. Montrer que f est continue sur I .
3. Montrer que f est de classe C^1 sur I et exprimer sa dérivée comme la somme d'une série.
4. Étudier la monotonie de la fonction f .
5. Calculer $f(x+1) - f(x)$.
6. Déterminer un équivalent de f en -1^+ .
7. Établir l'égalité $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.
8. En déduire un équivalent de f en $+\infty$.