Année universitaire 2014-2015

Site : ☐Luminy ☐St-Charles ☒St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☐Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis
Sujet session : ☒1er semestre - ☐2ème semestre - ☐Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : ☐L1 / ☒L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme : MPCI
Code Apogée du module : SMP3U1J Libellé du module : Analyse 2
Document autorisé : ☐OUI - ☒NON Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre. Vous pouvez sauter des questions sans les démontrer, mais admettre le résultat pour l'utiliser par la suite.

ATTENTION : l'énoncé du sujet contient 2 pages.

Exercice 1 (cours)

1. Rappeler la définition de la convergence uniforme d'une série de fonctions.
2. Donner trois définitions équivalentes du rayon de convergence d'une série entière.
3. Rappeler l'énoncé du théorème Fejér.
4. Donner un exemple de série entière que ne converge pas normalement sur son disque ouvert de convergence. Justifier la réponse.

Exercice 2

Soit la fonction définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

1. Quel est le domaine de définition I de f ?
2. Calculer $f(1)$.
3. Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ et exprimer sa dérivée à l'aide de fonctions usuelles.
4. Calculer $f'(0)$ de deux façons différentes.
5. Rappeler le développement en série entière en 0 de $-\ln(1-x)$.
6. Montrer que la fonction f est l'unique solution développable en série entière de l'équation différentielle

$$xy'(x) + y(x) = -\ln(1-x) \qquad (E)$$

7. En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.
8. Retrouver les valeurs $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$ à l'aide de cette expression.

Exercice 3

Soit $c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ et soit f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = e^{cx}$ pour $x \in]0, 2\pi]$.

1. Tracer l'allure de sa courbe représentative sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$ pour $c = 1$.
2. Calculer les coefficients de Fourier complexes c_n de f.
3. Étudier la convergence simple et uniforme de la série de Fourier de f.
4. Établir l'égalité
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2c}{c^2 + n^2} = \frac{\pi}{\operatorname{th}(\pi c)} - \frac{1}{c}.$$
5. Déduire de l'égalité précédente la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
6. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{c^2 + n^2}$.

On rappelle le développement limité : $\operatorname{th}(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^6\right)$