

TD 4 : Séries entières

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n z^n$ dans les cas suivants.

- | | |
|---|---|
| 1. $a_n = \ln(n)$ | 8. $a_n = \operatorname{ch}(n)$ |
| 2. $a_n = \ln(2n + 1)$ | 9. $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ |
| 3. $a_n = n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$ | 10. $a_n = \tan(1/n) - \sin(1/n)$ |
| 4. $a_n = 4^{2n-5}$ | 11. $a_n = (-2n)^{n+2}$ |
| 5. $a_n = \begin{cases} 2^n & \text{si } n \text{ impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$ | 12. $a_n = \cos(2n\pi/3)$ |
| 6. $a_n = \frac{n!}{n^{n+1}}$ | 13. $a_n = 3^n/n!$ |
| 7. $a_n = \frac{(n!)^k}{(kn)!}$ | 14. $a_{2k} = (-2)^k$ et $a_{2k+1} = 3^k, \forall k \in \mathbb{N}$ |

Calculer la somme dans les cas 4, 5, 8, 12, 13 et 14.

Exercice 2 : Calculer les sommes des séries entières suivantes pour tous $z \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n}{n!} z^n$ | 3. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{n!} z^n$ | 5. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ |
| 2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1+n+n^2}{n!} z^n$ | 4. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{(n^2-1)n!} z^n$ | 6. $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \right) z^n$ |

Exercice 3 : Résoudre les équations différentielles

$$(E) \quad x^2 y''(x) + x(x+1)y'(x) - y(x) = 0,$$

$$(F) \quad x^2 y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = e^x,$$

$$(G) \quad y''(x) - 2xy'(x) - y(x) = 0,$$

en cherchant une solution sous la forme d'une série entière.

Exercice 4 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(z) = (1 + z/n)^n$ pour $z \in \mathbb{C}$. Montrer que $u_n(z)$ est développable en série entière et calculer ce développement. (on utilisera la formule du binôme).

Exercice 5 : Déterminer le développement en série entière de $\arcsin(x)$ et de $\cos(x+1)$.

Exercice 6 : Le but de cet exercice est d'établir les propriétés de la fonction exponentielle en utilisant **uniquement** sa définition en terme de série :

$$e^z := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

On pose aussi

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

1. Démontrer les formules

$$e^{z+z'} = e^z e^{z'}, \quad \frac{de^z}{dz} = e^z, \quad \frac{d \cos z}{dz} = -\sin z, \quad \frac{d \sin z}{dz} = \cos z, \quad \cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

Pour la première égalité, on utilisera ce qui a été vu sur le produit de deux séries.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ vérifier que e^x , $\cos x$, et $\sin x$ sont réels et indéfiniment dérivables.
3. Montrer que \exp réalise une bijection de \mathbb{R} dans $]0, +\infty[$. On pourra traiter les cas $x \geq 0$ et $x < 0$ séparément.
4. Pour tout réel x , vérifier que l'on a $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$. En déduire l'égalité $|e^{ix}| = 1$ pour tout x réel. Exprimer ensuite $|e^z|$ en fonction de $\operatorname{Re} z$.
5. On suppose que $\cos x > 0$ pour tout $x \geq 0$. Montrer alors que $\sin x$ tend vers une limite $l \in]0, 1[$ quand x tend vers l'infini, et que $\sin x < l$ pour tout $x \geq 0$. En considérant $f(x) = \cos x + lx/2$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, montrer une contradiction.
6. On pose $m = \inf\{x > 0, \cos x = 0\}$. Que vaut e^{2im} ? e^{im} ? Montrer que m est le plus petit réel strictement positif tel que $4im$ soit période de e^z .
7. On définit le nombre $\pi = 2m$. Résoudre les équations suivantes:

(a) $e^z = 0$.

(b) $e^z = 1$.

(c) $\sin z = 2$.

Exercice 7 : Soit $f(x) = (\cos x) \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Expliquer pourquoi f possède en $x = 0$ un D.S.E. (développement en série entière).
2. Montrer que f est solution d'une certaine équation différentielle linéaire homogène du 2^e ordre à coefficients constants (E).
3. Déterminer les séries entières $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ solutions de (E) par la relation entre a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , pour tout $n \geq 0$.
4. En utilisant la formule d'Euler pour $\cos x$, déterminer les coefficients f_n de la série entière $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$. Vérifier que f_n satisfait la relation de récurrence trouvée au 3).

Exercice 8 : Déterminer le développement de Taylor en $x = 0$ à un ordre quelconque de la fonction réelle $f(x) = \exp(-1/x^2)$ (que l'on prolongera par continuité en 0). La fonction f est-elle développable en série entière?

Exercice 9 : On note a_n la n -ième décimale de $\sqrt{2}$. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$?

Exercice 10 : Soit α un réel irrationnel fixé. On note R_α le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\alpha)}$$

1. Démontrer que $R_\alpha \leq 1$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$u_1 = 2 \text{ et } \forall n \geq 1, u_{n+1} = (u_n)^{u_n}.$$

Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{(n+1)^n}.$$

En déduire que la série de terme général $1/u_n$ converge.

Dans la suite, on pose

$$\alpha = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$$

et on admet que α est irrationnel.

3. Démontrer qu'il existe une constante C strictement positive telle que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\pi u_n \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{u_k} \leq \frac{C}{u_n^{u_n-1}}.$$

4. Démontrer que $R_\alpha = 0$.
5. Question subsidiaire : démontrer que α est effectivement irrationnel.

Énoncé fourni par le CENTRALE-SUPELEC (CC)-BY-NC-SA.

Exercice 11 : Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ est semi-convergente. Déterminer R .

Exercice 12 : Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

1. $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2n}$.
2. $\sum_{n \geq 0} a_n^2 z^{2n}$.
3. $\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} z^{2n}$.

Exercice 13 : Pour x réel, on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant f .
2. Étudier la convergence de la série entière en 1 et en -1 .
3. Établir la continuité de f en -1 .
4. Déterminer la limite de f en 1.

Exercice 14 : Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f .

1. Exprimer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$ en fonction de f pour $|z| < R$.
2. Même question avec $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{3n} z^{3n}$.

Exercice 15 : Trouver le domaine de définition et faire l'étude aux bornes de la fonction f définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) x^n.$$

Exercice 16 : Former le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$.

Exercice 17 : Former le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \ln(x^2 - 5x + 6)$.

Exercice 18 : Montrer l'égalité $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

Exercice 19 : Montrer que pour tout $a > 0$, on a $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^a} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{na+1}$.

En déduire les sommes $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.