Année universitaire 2014-2015

Site : ☐Luminy ☐St-Charles ☒St-Jérôme ☐Cht-Gombert ☐Aix-Montperrin ☐Aubagne-Satis
Sujet session : ☒1er semestre - ☐2ème semestre - ☐Session 2 Durée de l'épreuve : 2h
Examen de : ☐L1 / ☒L2 / ☐L3 - ☐M1 / ☐M2 - ☐LP - ☐DU Nom diplôme : MPCI
Code Apogée du module : SMP3U1J Libellé du module : Analyse 2
Document autorisé : ☐OUI - ☒NON Calculatrices autorisées : ☐OUI - ☒NON

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans le désordre. Vous pouvez sauter des questions sans les démontrer, mais admettre le résultat pour l'utiliser par la suite.

ATTENTION : l'énoncé du sujet contient 2 pages.

Exercice 1 (cours)

1. Rappeler ce qu'est la convergence absolue d'une série numérique.
2. Rappeler la définition de la convergence uniforme d'une suite de fonctions.
3. Donner un exemple de série entière qui converge normalement sur tout son disque de convergence. Justifier la réponse.
4. Rappeler et démontrer le lien qu'il y a entre les coefficients de Fourier complexes d'une fonction de classe C^1 et ceux de sa dérivée.

Exercice 2

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ dans les cas suivants.

1. $a_n = \dfrac{3^n}{n!}$
2. $a_n = n2^n$
3. $a_n = 1 - \dfrac{1}{1+2^n}$

Calculer la somme de la série entière dans les deux premiers cas.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nt)}{n^2}$.

1. Quel est le domaine de définition I de la fonction f ?
2. Montrer que la série définissant f converge uniformément sur I.
3. Vérifier que la fonction f est 2π-périodique et paire.
4. La fonction f est-elle continue ?
5. Vérifier que les coefficients de Fourier de f valent $a_n(f) = \frac{1}{n^2}$ et $b_n(f) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et $a_0(f) = 0$.
6. Exprimer l'intégrale $\int_0^{2\pi} (f(t))^2 dt$ en fonction de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.
7. Montrer que f est de classe C^1 sur les intervalles $[\epsilon, 2\pi - \epsilon]$ pour $\epsilon > 0$.
8. Montrer que la fonction f restreinte à l'intervalle $[0, 2\pi]$ est un polynôme de degré 2 que l'on explicitera.
9. En déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.
10. Calculer la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$.