

TD 1 : Séries numériques

Exercice 1 : Les séries suivantes convergent-elles ?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2 + \frac{1}{3n}\right)$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(3^n + \frac{1}{2n^2}\right)$.
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n)$.

Exercice 2 : Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série télescopique, c'est-à-dire dont le terme général peut s'écrire $a_n = b_{n+1} - b_n$ pour une suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Vérifier que l'on a $\sum_{n=1}^k a_n = b_{k+1} - b_1$. Exprimer la somme de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ à l'aide de la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Soit $a_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k}$. Vérifier que la série de terme général a_n est télescopique et en déduire la somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
3. Même question pour $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 3 : On considère la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$. On note $S_N = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n}$ sa N -ième somme partielle, et on pose $T_N = S_N - \ln(N+1)$.

1. Démontrer l'inégalité $\ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire la monotonie de la suite $(T_N)_{N \geq 0}$.
3. Que vaut T_0 ? En déduire que pour tout $N \geq 1$, on a $S_N \geq \ln(N+1)$.
4. Calculer la limite $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N$. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ est-elle convergente ?

Exercice 4 : On considère la série numérique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. On note S_N sa N -ième somme partielle.

1. Vérifier que $\forall n \geq 2, \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
2. En déduire que $\forall N \geq 2, \frac{3}{2} - \frac{1}{N+1} \leq S_N \leq 2 - \frac{1}{N}$.
3. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est majorée.
4. Montrer que la série est convergente et que sa somme vérifie l'encadrement $\frac{3}{2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 2$.

Exercice 5 : Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad n \geq 0.$
2. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k!}{n!}, \quad n \geq 2.$
3. $u_n = \frac{\sum_{k=1}^{n-2} k!}{n!}, \quad n \geq 3.$
4. $u_n = \frac{1}{10n+1}, \quad n \geq 0.$
5. $u_n = \ln \left(\frac{2+n^2}{1+n^2} \right), \quad n \geq 1.$
6. $u_n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}, \quad n \geq 1.$
7. $u_n = \frac{a}{n-1} - \frac{1}{n}, \quad a \in \mathbb{R}, n \geq 2.$

Exercice 6 : Étudier la nature et calculer la somme de la série numérique de terme général

$$u_n = \frac{9}{(3n+1)(3n+4)}, \quad n \geq 0.$$

Exercice 7 : Étudier la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}, \quad n \geq 1.$
2. $u_n = \frac{n}{2^n}, \quad n \geq 1.$
3. $u_n = \frac{\prod_{k=1}^n (2k-1)}{3^n n!}, \quad n \geq 1.$
4. $u_n = \frac{1}{(\ln(n+1))^n}, \quad n \geq 1.$
5. $u_n = \left(\frac{3n}{4n-1} \right)^{2n+1}, \quad n \geq 1.$

Exercice 8 : Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants.

1. $u_n = \frac{\sin(n\alpha)}{n^2}, \quad \alpha \in \mathbb{R}, n \geq 1.$

4. $u_n = (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \frac{n}{2^n}, \quad n \geq 1.$

2. $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}, \quad n \geq 1.$

5. $u_n = \frac{n+3}{(-1)^n \sqrt{n} - 3n}, \quad n \geq 1.$

3. $u_n = \frac{(-1)^n}{n - \ln(n)}, \quad n \geq 1.$

6. $u_n = \frac{1 + (-1)^n n}{n^2}, \quad n \geq 1.$

Exercice 9 :

1. Discuter la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{25n}, n \geq 1$ et estimer sa somme sans dépasser l'erreur tolérée de 10^{-2} .

2. Même question avec la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+5}, n \geq 1.$

Exercice 10 : Étudier les séries de termes généraux suivants.

1. $u_n = \frac{e^{in\theta}}{\ln(n)}, \quad \theta \in \mathbb{R}, n \geq 2.$

4. $u_n = na^n, n \geq 1.$

2. $u_n = \frac{\cos(n)}{n + \cos(n)}, n \geq 1.$

5. $u_n = e^{-\sqrt{n}}, n \geq 1.$

3. $u_n = \frac{\cos(n\theta)}{\sqrt{n}}, \quad \theta \in \mathbb{R}, n \geq 0.$

6. $u_n = n(\cos(1/n) - 1), n \geq 1$

Exercice 11 : Montrer que les séries de termes généraux positifs a_n et $\frac{a_n}{a_n+1}$ sont de même nature.

Exercice 12 : Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels.

1. Montrer que si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge vers S , alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n + a_{n+1}$ converge, et calculer sa somme.

2. Supposons que pour tout $n \geq 0$ on ait $a_n \geq 0$. Montrer que si la série $\sum_{n \geq 0} a_n + a_{n+1}$ converge vers T , alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et calculer sa somme.

3. Donner un exemple où la série $\sum_{n \geq 0} a_n + a_{n+1}$ converge et la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge.

Exercice 13 : Montrer que la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge en utilisant le critère de Cauchy.

Exercice 14 : Montrer que la série de terme général $\frac{1}{n}$ ne satisfait pas le critère de Cauchy, en minorant la suite $v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 15 : Montrer que la série de terme général $\frac{n^2}{n!}$ ($n \geq 0$) converge et calculer sa somme. On rappelle que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Exercice 16 : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite à termes positifs telle que la série de terme général $\frac{1}{1 + nu_n}$ converge. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} nu_n$. Montrer que la série de terme général $(u_n)_{n \geq 0}$ diverge.

Exercice 17 : Montrer que la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

converge et calculer sa somme.

Exercice 18 : Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite positive telle que la série de terme général $(u_n)_{n \geq 0}$ soit convergente. Montrer la convergence des séries de termes généraux :

1. u_n^2
2. $\ln(1 + u_n)$
3. $\frac{1}{n} \sqrt{u_n}$

Indication : pour le 3, comparer d'abord \sqrt{xy} et $\frac{x+y}{2}$ pour x, y réels positifs.

Exercice 19 : Calculer la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{2^n}$.

Exercice 20 : Étudier les séries de termes généraux $u_n = \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$, $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $w_n = \ln(1 + u_n)$ et $x_n = \ln(1 + v_n)$.

Exercice 21 : Étudier la convergence des séries de termes généraux suivants.

1. $\sqrt{n^4 + 2} - \sqrt{n^4 + 1}$
2. $\frac{2^n n!}{n^n}$
3. $\frac{1}{(\ln n)^5}$
4. $\sqrt{n^4 + n + 1} - n^2$
5. $\frac{3^n}{1 + 4^n}$
6. $\ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{2n + 1} \right)$
7. $\left(\frac{n}{n+1} \right)^{n(n+1)}$
8. $(-1)^n \tan \left(\frac{1}{n} \right)$
9. $\frac{(-1)^n \ln(n)}{n}$
10. $1 - \cos(1/n)$