

4 Trigonométrie

4.1 Fonctions trigonométriques

Exercice 24 Soit x un réel. Résoudre les équations suivantes :

$$\cos(x) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(x) = 1$$

$$\cos(3x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exercice 25 Soit x un réel. Résoudre les équations suivantes :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)$$

$$\sin(2x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$$

Exercice 26 Soit θ un nombre réel. On pose

$$A = \sin(\theta) + \cos(\theta) ; \quad B = \sin(\theta) \cos(\theta) ; \quad C = \sin^4(\theta) + \cos^4(\theta).$$

On se propose d'exprimer B et C en fonction de A .

1. Calculer A^2 en fonction de B et en déduire B en fonction de A .
2. Exprimer $C + 2B^2$ comme un carré. En déduire C en fonction de B puis C en fonction de A .

Exercice 27 On considère la fonction f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin^2(x) + \frac{1}{1+\tan^2(x)} \end{aligned}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. Simplifier l'expression de f .

Exercice 28 Soient $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\cos(x + y)$ et $\sin(x + y)$ en fonction de $\cos x$, $\sin x$, $\cos y$, et $\sin y$.
2. En déduire les formules analogues pour $\cos(x - y)$ et $\sin(x - y)$.
3. En déduire les formules pour $\cos(x + \pi)$, $\sin(x + \pi)$, $\cos(\frac{\pi}{2} - x)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$.
4. De même, exprimer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
5. Exprimer $\cos(2x)$ seulement en fonction de $\cos x$, puis seulement en fonction de $\sin x$.
6. Exprimer $\cos^2 x$ et $\sin^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$.

Exercice 29 Soit x un réel. Démontrer que si on pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ alors

$$\cos(x) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin(x) = \frac{2t}{1 + t^2}$$

4.2 Forme trigonométrique et forme exponentielle des nombres complexes

Exercice 30 Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$,
2. le nombre complexe de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{8}$.

Exercice 31 Donner les formes trigonométriques de :

$$z_1 = 1 + i ; \quad z_2 = \sqrt{3} + i ; \quad z_3 = 1 - i\sqrt{3} ; \quad z_4 = i.$$

Exercice 32 Soient $u = \frac{\sqrt{6-i\sqrt{2}}}{2}$ et $v = 1 - i$.

1. Calculer le module et l'argument de u et v .
2. Calculer le module et l'argument de $w = \frac{u}{v}$.

Exercice 33 On considère les deux nombres complexes suivants :

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} \quad \text{et} \quad z_2 = e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme algébrique.
2. Ecrire $z_1 z_2$ sous forme algébrique, exponentielle et trigonométrique.
3. En déduire la valeur exacte du cosinus et du sinus suivants :

$$\cos \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \sin \frac{\pi}{12}.$$