

TD3. Le groupe symétrisé S_n

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_5$ est la permutation $\sigma(1) = 5, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 3$.

Si $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ alors $\sigma\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ (on applique σ après τ).

Exercice 1. Soient $\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $\tau\sigma, \tau\rho, \rho\tau$ et $\rho\tau\sigma$.

Exercice 2. a) Décrire les orbites de σ, τ, ρ et des produits de ex 1 (dans $E_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$).

b) Décomposer en produits de cycles à support disjoints, puis en produits de transpositions les permutations de a).

c) Dans E_9 , décrire les orbites des permutations suivantes, et décomposer (dans S_9) en produits de cycles à support disjoints, puis en produits de transpositions :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 & 7 & 9 & 8 & 6 \end{pmatrix} \text{ et } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 8 & 1 & 3 & 9 & 5 & 2 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

d) Etant donnée $\sigma \in S_n$, vérifier que la relation \mathcal{R}_σ définie sur $\{1, 2, \dots, n\}$ par $x\mathcal{R}_\sigma y$ ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.q. $\sigma^k(x) = y$ est une relation d'équivalence. Si on obtient p classes d'au moins 2 éléments, alors σ s'écrit comme un produit de p cycles (de longueur > 1).

e) Vérifier que les permutations disjoints commutent: $\text{supp}(\alpha) \cap \text{supp}(\beta) = \emptyset \implies \alpha\beta = \beta\alpha$.

Exercice 3. Soit $\sigma \in S_n$. On considère sa décomposition en produit de cycles à supports disjoints $\sigma = \gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdots \gamma_p$. Soit k_r l'ordre du cycle γ_r , pour $1 \leq r \leq p$, c'est à dire le plus petit nombre positif tel que $(\gamma_r)^{k_r} = Id$.

a) Soit $m \geq 2$, tel que $\sigma^m = Id$. Montrer que m est un multiple commun des ordres k_1, \dots, k_p . En déduire que l'ordre de σ est égal au ppcm des ordres k_1, \dots, k_p .

b) Caractériser les permutations d'ordre 3.

c) Dans cette question $n = 5$.

(i) Quels sont les ordres des éléments $(12)(345)$ et $(345)(12345)$?

(ii) Démontrer qu'il n'y a pas dans S_5 d'élément d'ordre 15.

d) Déterminer les ordres des éléments de S_6 et S_7 .

e) Déterminer l'ordre maximal d'un élément de S_n , pour $n = 8, 9, 10$; et dans S_n ?

Remarque: La fonction de Landau $g(n)$ est définie pour chaque nombre naturel n étant le plus grand ordre d'un élément d'un groupe symétrique S_n . De manière équivalente, $g(n)$ est le plus grand ppcm de n'importe quelle partition de n .

Exercice 4. a) Vérifier que $(a_1 a_2 a_3 \dots a_n) = (a_1 a_n)(a_1 a_{n-1})(a_1 a_{n-2}) \dots (a_1 a_3)(a_1 a_2)$.

b) Montrer que les transpositions $(j, j+1), j = 1, \dots, n-1$ engendrent S_n (c.-à-d. tout élément de S_n s'écrit comme produit de ces transpositions), mais qu'aucun sous-ensemble propre n'engendre S_n .

c) Montrer qu'ensemble, une transposition (12) avec un n -cycle $(123 \dots n)$ engendrent S_n .

d) Montrer que le centre du groupe $S_n, Z(G) = \{z \mid zg = gz \forall g \in S_n\}$ pour $n \geq 3$ se réduit à l'élément neutre (la permutation identité). (Indication: Pour $\sigma \in Z(S_n)$ considérer la conjugaison $\sigma(ij)\sigma^{-1}$ d'une transposition (ij) .) Que se passe-t-il pour $n = 1, 2$?

Exercice supplémentaire

Exercice 5. [Montrer que A_5 est simple]

a) Quels sont les ordres possibles pour les éléments de A_5 ? Combien d'éléments y a-t-il de chaque ordre (selon les décompositions en cycles disjoints)?

b) Soit G un groupe fini, $N \triangleleft G$, et écrire $|G|$ pour l'ordre de G . Soit $g \in G$ un élément d'ordre k qui est premier avec $\frac{|G|}{|N|}$. Montrer que $g \in N$.

c) Montrer que A_5 n'a pas de sous-groupe distingué d'ordre 5 (combien d'éléments d'ordre 5 y a-t-il dans G ?). Et pour les ordres 10, 15 et 20?

- d) De la même façon, montrer qu'il n'y a pas de sous-groupe distingué dans A_5 d'ordre 12,6,4,3.
- e) Montrer que les sous-groupes d'ordre 2 dans A_5 ne sont pas distingués.