n Licence de mathématiques, 3e année

Structures Algébriques

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Examen Partiel
mardi 17 mars 2015

Deux heures, ni calculatrices, ni documents Enseignants : H. Short, K. Oeljeklaus, P. Mercat

Les exercices II,III,IV sont indépendantes : Il y a 24 points

Exercice I. (Cours, 1,5+1,5+1=4 points)
a) Donner la définition d'un sous–groupe distingué. Montrer que tout sous–groupe d'indice 2 est distingué.
b) Donner la définition du centre d'un groupe. Montrer que le centre est un sous-groupe distingué.
c) Donner la définition d'une action d'un groupe G sur un ensemble X.

Exercice II. (2+2+2=6 points)
a) Soit G un groupe, N un sous–groupe distingué d'indice n. Montrer que pour tout $g \in G$, on a $g^n \in N$.
b) Soit H un sous–groupe de G, pas nécessairement distingué, d'indice m. Montrer que pour tout $g \in G$, il existe $k \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq m$ tel que $g^k \in H$.
c) En comptant le nombre de 4-cycles et de 5-cycles dans S_5, montrer qu'il n'y a pas de sous-groupe d'indice 3 dans S_5.

Exercice III. (1+1+2+2=6 points)
Soit $H < G$ un sous–groupe d'indice n. Le but de l'exercice est de montrer que G admet un sous–groupe *distingué* dont l'indice est au plus $n!$.
Considérer l'application $\Phi : G \to S(G/H)$, où $S(G/H)$ denote le groupe des permutations de l'ensemble quotient G/H, définie par $\Phi(g)(xH) = (gx)H$.
i) Montrer que Φ est un homomorphisme et determine donc une action de G sur G/H.
ii) Enoncer un théorème sur les homomorphismes de groupes qui permet de constater que $G/\mathrm{Ker}\,\Phi$ est isomorphe à un sous–groupe de $S(G/H)$.
iii) En déduire que $\mathrm{Ker}\,\Phi$ est d'indice au plus $n!$ dans G et que $\mathrm{Ker}\,\Phi \subset H$.
iv) On admet que A_6 est simple, d'ordre $\frac{6!}{2} = 360$. En utilisant i),ii) et iii) montrer que A_6 ne contient pas de sous-groupe d'indice 3, 4 et 5.

Exercice IV. (1+1+2+2+2=8 points) Soit G un groupe d'ordre 12.
1) Donner les ordres des p–sous–groupes de Sylow de G pour $p = 2, 3$.
2) Quelles sont les possibilités pour le nombre de ces p–sous–groupes de Sylow de G selon le théorème de Sylow ?
3) Décrire explicitement toutes les possibilités pour ces p–sous–groupes de Sylow de G (donner un groupe isomorphe à chaque possibilité de ces sous–groupes).
4) Soit H un 2–sous–groupe de Sylow et K un 3–sous–groupe de Sylow de G. Montrer qu'au moins un de H et K est distingué dans G.
5) Si H et K sont tous les deux distingués, montrer que G est isomorphe à $H \times K$.