Licence de mathématiques, 3e année, Structures Algébriques

☐ Aix-Montperrin
☐ Luminy
☒ Saint-Charles
☐ Saint-Jérôme
☐ Château-Gombert

Examen Partiel
mardi 8 mars 2016

Deux heures, ni calculatrices, ni documents Enseignants : H. Short, K. Oeljeklaus, P. Mercat

Les exercices II,III sont indépendants : Il y a 25 points

I. (Cours, 2 + 2 + 2 =6 points)

a) Soit G un groupe et H un sous–groupe de G. Montrer que H est un sous–groupe *distingué* de G si et seulement si le quotient G/H porte de façon canonique une structure de groupe. Préciser la loi de composition interne de cette structure de groupe.
b) Avec les mêmes hypothèses que dans a), montrer que H est un sous–groupe distingué si et seulement si les deux partitions de G données par les classes laterales droites et par les classes laterales gauches sont les mêmes.
c) Donner la définition du sous–groupe alterné A_n du groupe symétrique S_n.
Soit H un sous–groupe de S_n. Montrer que si $H \not\subset A_n$, alors $Card(H \cap A_n) = \frac{Card(H)}{2}$.

II. (2+1+1+1+1+2=8 points)

Soit A_4 le sous–groupe des permutations alternées dans le groupe symétrique S_4.

1) Donner la structure de la décomposition en cycles disjoints de tous les éléments de S_4, leur ordre et le nombre de tels éléments par ordre. Indiquer lesquels se trouvent dans A_4.

Nous voulons démontrer que A_4 n'a pas de sous–groupe d'ordre 6. On veut procéder par contradiction ; Supposons qu'il existe un tel sous–groupe K d'ordre 6 dans A_4.
2) Montrer qu'un tel K serait distingué dans A_4 *(regarder l'indice de K dans A_4)*.
3) Enoncer un théorème sur les nombres premiers et les ordres des groupes finis qui nous permet d'affirmer qu'un tel K contiendrait un élément d'ordre 3.
4) Calculer $(1\,2)(3\,4)(1\,2\,3)(3\,4)(1\,2)$.
5) Montrer que tous les cycles de longueur 3 sont conjugués dans A_4.
6) En déduire que K contiendrait alors toutes les permutations d'ordre 3 dans S_4 et obtenir une contradiction.

III. (1+1+1+2+2+2+2=11 points)

Soit G un groupe, H un sous–groupe, et soit $G/H = \{x * H \mid x \in G\}$ l'ensemble de classes laterales gauches de H dans G.
Soit $N_G(H) = \{x \in G \mid x * H * x^{-1} = H\}$ le normalisateur de H dans G.
0) Montrer que $N_G(H)$ est un sous–groupe de G.
1) Montrer que H est un sous groupe de $N_G(H)$, et de plus est distingué dans $N_G(H)$
2) Montrer qu'on a une action de G sur G/H : définie par $g \cdot (x * H) = (g * x) * H$.
3) Quel est le stabilisateur de la classe $e * H = H$? Et son orbite ?
4) Enoncer un théorème reliant les cardinalités de l'orbite et du stabilisateur et en déduire le théorème de Lagrange sur les ordres des sous–groupes de G.
5) Montrer que le stabilisateur de la classe $x * H$ est H si et seulement si $x \in N_G(H)$.
6) Soit $z \in G$, et $z * H$ sa classe dans le groupe quotient $\widehat{G} = N_G(H)/H$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que $(z * H)^k$ est égal à l'élément neutre dans $\widehat{G}$ si et seulement si $z^k \in H$.
7) (HORS BARÈME) Supposons que H est d'ordre fini n, et que $z \in G \setminus H$, et $(z * H)^p$ égal à l'élément neutre dans $\widehat{G}$ avec p premier. Montrer que G contient un sous–groupe d'ordre pn.