COURS DE LICENCE 3IÈME ANNÉE 2014–15
STRUCTURES ALGÉBRIQUES UE: ENSMI6UX

TD2. Sous-groupes distingués, groupe quotient

Exercice 1. Montrer que l'image réciproque d'un sous-groupe distingué par un morphisme est un sous-groupe distingué. Que dire de l'image directe d'un sous-groupe distingué ?

Exercice 2. Il y a 6 symétrıes d'un trıangle dans le plan: 3 reflexions et les rotations de $2\pi/3$, $4\pi/3$ et 2π (qui est l'identité).

a) Vérifier que ce groupe G est isomorphe à S_3.

b) Trouver tous les sous–groupes. Observer qu'il n'y a qu'un d'ordre 3 — appelons–le H.

c) Montrer que les sous–groupes distingués sont les deux triviaux et H.

d) Donner les éléments des trois quotients de G par ces sous–groupes distingués. Pour chaque quotient donner la table de multiplication correspondante.

Il y a 8 symétries d'un carré dans le plan, 4 reflections, et les rotations de $\pi/1, \pi, 3\pi/2$ et 2π (qui est l'identité). Même questions.

Exercice 3. Soit $G = \{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \mid a_{11}a_{22} \neq 0\,, a_{ij} \in \mathbb{R}\}$, avec l'operation de multiplication.

a) Lesquelles des conditions suivantes donnent des sous–groupes distingués de G?

(i) $a_{11} = 1$ (ii) $a_{12} = 0$ (iii) $a_{11} = a_{22}$ (iv) $a_{11} = a_{22} = 1$.

b) Pour les cas où on a un sous–groupe distingué, décrire le groupe quotient.

Exercice 4. Soit $H = \{\pm 1, \pm i\}$ le sous–groupe de quatrième racines d'unité de $G = \mathbb{C}^*$ avec multiplication.

a) Décrire explicitement les classes latérales de H dans G.

b) Monter que G/H est ısomorphe à G.

Exercice 5 (Groupes distingués)**.**

Soit H et K deux sous-groupes distingués du groupe G.

(1) Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe distingué de G.
(2) Dans le cas où $H \cap K = \{e\}$, montrer que $HK = \{hk | h \in H, k \in K\}$ est un sous-groupe distingué de G.

Exercice 6. Soit G un groupe, et $N < G$ un sous–groupe distingué et $H < G$ un sous–groupe quelconque.

a) Montrer que $HN = \{hn \mid h \in H, n \in N\}$ est un sous–groupe de G.

b) Montrer que $H \cap N$ est un sous–groupe distingué de H.

c) Vérifier que l'application $\phi : H \to \frac{HN}{N}$, $\phi(h) = hN$ est un homéomorphisme surjectif. Décrire Kerϕ.

d) Déduire que $\frac{H}{H\cap N}$ et $\frac{HN}{N}$ sont isomorphes.

Exercice 7. Soit G un groupe, et H, K deux sous–groupes distingués et $K < H$.

a) Vérifier que l'application $\theta : G/K \to G/H$, $\theta(gK) = gH$ est un homomorphisme surjectif. Décrire Kerθ.

b) Déduire que $\frac{G}{H}$ et $\frac{G/K}{H/K}$ sont isomorphes.

Exercice 8. Donner tous les sous–groupes du groupe $S_3 \times S_3$. Lesquels sont–ils distingués?

Date: January 26, 2015.

Exercice 9 (Groupes simples)**.**

Soit G un groupe tel que G ne contient aucun sous-groupe distingué non trivial. (Un tel groupe est appelé groupe *simple*)

(1) Soit H un autre groupe quelconque. Montrer que tout morphisme $f : G \to H$ est soit injectif, soit constant.
(2) Montrer que si G est un groupe fini abélien et simple, alors G est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec p premier.

Exercice 10.

(1) Soit $G = (\mathbb{R}^*, \times)$ et $H = \mathbb{R}_+^*$. Décrire le groupe quotient G/H.
(2) Montrer que le quotient $\mathbb{C}/\mathbb{R}$ est isomorphe à $\mathbb{R}$. (Pour l'addition)

Exercice 11. Montrer que si $G/Z(G)$ est engendré par un seul élément, alors G est abélien. ($Z(G) = \{g \in G \mid gx = xg \ \forall x \in G\}$ est le centre de G.)

Exercice 12.

Soit $(G, +)$ le groupe quotient $(\mathbb{Q}, +)$ par $\mathbb{Z}$. Pour $x \in \mathbb{Q}$, on note $x + \mathbb{Z} \in G$ la classe de x dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(1) Montrer que $\frac{35}{6} + \mathbb{Z} = \frac{5}{6} + \mathbb{Z}$. En déduire l'ordre de $\frac{35}{6} + \mathbb{Z}$ dans G.
(2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, il existe $\alpha(x) \in \mathbb{Q} \cap [0, 1[$ tel que $x + \mathbb{Z} = \alpha(x) + \mathbb{Z}$.
(3) Montrer que tout élément de G est d'ordre fini.
(4) Montrer que G n'est pas d'exposant fini. ($\nexists n \in \mathbb{N}, \forall x \in G, n \times x = e$)

Exercice 13.

Soit $G = (\mathrm{GL}(2, \mathbb{R}), \times)$ le groupe des matrices inversibles. On note

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} | n \in \mathbb{Z} \right\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que H est un sous-groupe abélien de G.
(2) Montrer que H est engendré par un seul élément. Est-ce que H est distingué dans G ?
(3) Déterminer l'ordre de A et de B dans G.
(4) Montrer que H est contenu dans le sous-groupe engendré $K = \langle A, B \rangle$.
(5) Que pensez-vous des deux assertions suivantes ?
    - Un groupe engendré par des éléments d'ordre fini est fini.
    - Un groupe engendré par des éléments d'ordre fini ne contient que des éléments d'ordre fini.