COURS DE LICENCE 3IÈME ANNÉE 2014–15
STRUCTURES ALGÉBRIQUES UE: ENSMI6UX

TD7 Groupes Abéliens, Anneaux

Exercice 1 (Groupes d'ordre 15)**.**
On veut montrer ici que tout groupe d'ordre 15 est commutatif. On considère l'action de G sur lui-même par conjugaison.

(1) Montrer que les orbites sont de cardinal 1, 3 ou 5.
(2) Supposons que $Z(G) = \{e\}$. Montrer qu'il y a forcément cinq orbites. L'orbite de $\{e\}$, trois orbites de cardinal 3 et une orbite de cardinal 5.
(3) Déterminer les ordres des éléments dans chacune de ces orbites et arriver à une contradiction.
(4) En déduire que G est commutatif (en utilisant un exercice précédent).

Exercice 2. Déterminer le nombre de groupes abéliens d'ordre 32, d'ordre 72, et d'ordre 210. (les trois questions sont indépendantes).

Exercice 3 (Groupes abéliens d'ordre 600)**.**
(1) Montrer que si n et m sont premiers entre eux, alors $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ est isomorphe à $\mathbb{Z}_{mn}$.
(2) Dans la liste suivante, déterminer quels groupes sont isomorphes entre eux :

$$\mathbb{Z}_{600}\ ;\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{300}\ ;\ \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{200}\ ;\ \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{150}\ ;\ \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{120}\ ;\ \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{100}$$
$$\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{75}\ ;\ \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{60}\ ;\ \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{50}\ ;\ \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{40}\ ;\ \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{30}\ ;\ \mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{25}$$

(3) Existe t'il d'autres groupes abéliens d'ordre 600 que ceux de la liste ci-dessus ?

Les ANNEAUX

Exercice 4 (Anneau produit)**.**
Soit $(A_1, +, \cdot)$ et $(A_2, +, \cdot)$ deux anneaux. On munit l'ensemble $A = A_1 \times A_2$ des deux lois $\oplus$ et $\otimes$ définies par :

$$\forall (a_1, a_2), (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2, \begin{cases} (a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \\ (a_1, a_2) \otimes (b_1, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2) \end{cases}$$

(1) Montrer que $(A, \oplus, \otimes)$ est un anneau.
(2) Montrer que si A_1 et A_2 sont tous les deux non réduits à $\{0\}$, alors A n'est pas intègre.

On rappelle qu'un élément $a \in (A, +, .)$ **est inversible s'il existe** $b \in A$ **t.q.** $a.b = 1$.

Exercice 5. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau commutatif unitaire, et $x, y \in A$.
Montrer que xy est inversible si et seulement si x et y sont inversibles.
Montrer que l'ensemble des inversibles de A, muni de l'opération de multiplication, est un groupe abĺien

On dit que un élément $a \in (A, +, .)$ **est un diviseur de zero si** $a \neq 0$ **et il existe** $b \in A, b \neq 0$ **tel que** $a.b = 0$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, et $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
1) Donner les inversibles et les diviseurs de zero dans $\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_7, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_9, \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_{11}$.
2) Est-il vrai que $a \in \mathbb{Z}_n - \{0\}$ est soit inversible soit diviseur de zero, mais pas les deux à la fois ?

Date: March 16, 2015.

Exercice 7. Soit $(G,+)$ un groupe abélien. On note A l'ensemble des endomorphismes de $(G,+)$. On munit l'ensemble A de la loi d'addition induite par $(G,+)$, c'est à dire

$$\forall \psi, \phi \in A, \forall g \in G, (\phi + \psi)(g) = \phi(g) + \psi(g)$$

(1) Montrer que $(A,+,\circ)$ est un anneau unitaire.
(2) On se place dans le cas où $G = (\mathbb{R}[X],+)$ le groupe des polynômes. On définit les fonctions $\phi : P \mapsto P'$ et $\psi : P \mapsto Q$ avec Q la primitive de P s'annulant en 0.
  (a) Justifier que ϕ et ψ sont des éléments de A non inversibles.
  (b) Montrer que $\phi \circ \psi$ est inversible et comparer avec l'exercice précédent.

Exercice 8 (Elements nilpotents)**.** Soit A un anneau et $x \in A$. on dit que x est *nilpotent* si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0$. On se place tout d'abord dans le cas A commutatif. Soit x et y deux éléments nilpotents de A.

(1) Montrer que x n'est pas inversible.
(2) Montrer que xy est nilpotent.
(3) Montrer que $x + y$ est nilpotent.
(4) Donner un exemple d'anneau non-commutatif avec u et v nilpotents et uv et $u + v$ non nilpotent.
(5) Si A est non-commutatif, montrer : (xy nilpotent $\Leftrightarrow$ yx nilpotent)
(6) Si A est unitaire (non nécessairement commutatif), montrer que $(1 - x)$ est inversible.

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des inversibles, des diviseurs de 0 et des nilpotents de l'anneau $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$.

Exercice 10. On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} | a, b \in \mathbb{Z}\}$.

(1) Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}],+,\times)$ est un anneau.
(2) On définit la fonction $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ on a $N(xy) = N(x)N(y)$
(3) En déduire que x est inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ si et seulement si $N(x) = \pm 1$.

Exercice 11 (Anneau intègre fini)**.** Soit A un anneau unitaire fini.

(1) Soit $x \in A$. Montrer que si x n'est pas diviseur de 0 alors x est inversible
(2) En déduire que si A est intègre alors A est un corps
(3) Montrer que la caractéristique d'un anneau unitaire fini intègre est un nombre premier.

Exercice 12 (Polynômes)**.**

On considère l'anneau des polynomes $(\mathbb{R}[X],+,\times)$. Déterminer si les applications suivantes sont des morphismes d'anneaux :

$$\begin{array}{rl} \phi : \mathbb{R}[X] & \to \mathbb{R} \\ P & \mapsto P'(0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rl} \psi : \mathbb{R}[X] & \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P & \mapsto \begin{pmatrix} P(0) & P'(0) \\ 0 & P(0) \end{pmatrix} \end{array}$$