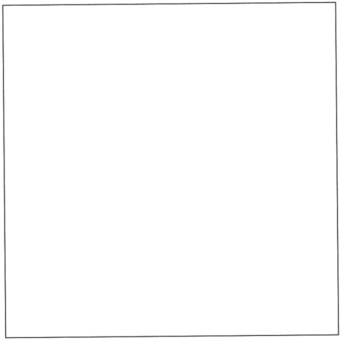
Continuum Random Cluster Model

Pierre HOUDEBERT

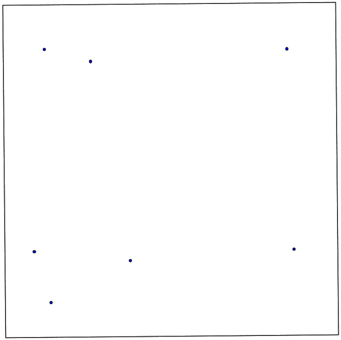
Thèse de doctorat de mathématiques appliquées,
encadrée par David DEREUDRE,
22 Mai 2017, Université Lille 1.

Modèle booléen



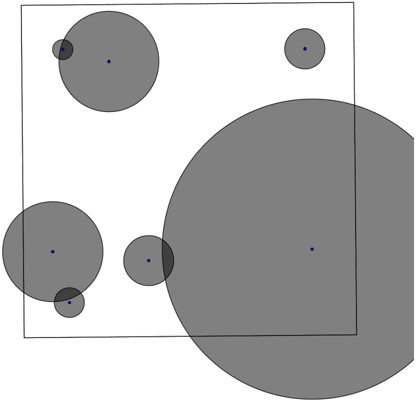
- $N \sim \mathcal{P}(z|\Lambda|)$.
- $x_1, \ldots, x_N$ iid de loi uniforme sur Λ.
- $R_1, \ldots, R_N$ iid de loi Q.

Modèle booléen



- $N \sim \mathcal{P}(z|\Lambda|)$.
- $x_1, \dots, x_N$ iid de loi uniforme sur Λ.
- $R_1, \dots, R_N$ iid de loi Q.

Modèle booléen



- $N \sim \mathcal{P}(z|\Lambda|)$.
- $x_1, \ldots, x_N$ iid de loi uniforme sur Λ.
- $R_1, \ldots, R_N$ iid de loi Q.

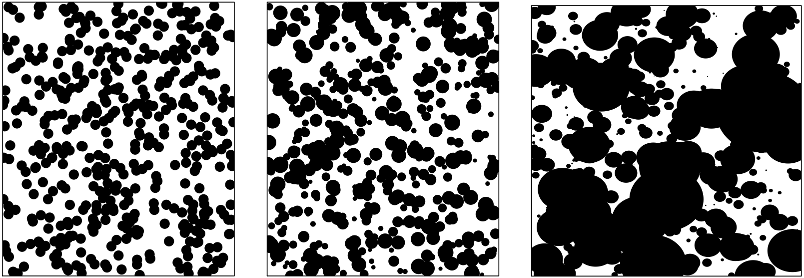


Figure: Simulations modèle booléen sur une fenêtre $[0, 15]^2$ d'intensité spatiale $z = 2$. De gauche à droite rayons constants 0.3, rayons uniformes sur $[0.1, 0.5]$, rayons exponentiels de paramètre 3.

Continuum Random Cluster Model : modèle gibbsien de boules aléatoires avec une densité non normalisée $q^{N_{cc}}$.

Continuum Random Cluster Model : modèle gibbsien de boules aléatoires avec une densité non normalisée $q^{N_{cc}}$.

Motivations

- Version continue du Random Cluster Model.
- Physique statistique : Fortuin-Kasteleyn représentation du modèle de Widom-Rowlinson (**Chayes, Chayes, Kotecký** 1995).
- Géométrie aléatoire : introduire un paramètre qui influence directement la connectivité.

1. Définition du CRCM
   - CRCM en volume fini
   - CRCM en volume infini

2. Cas des rayons intégrables $\int R^d Q(dR) < \infty$
   - Existence
   - Percolation
   - Widom-Rowlinson : transition de phase

3. Cas extrême des rayons non intégrables $\int R^d Q(dR) = \infty$
   - Non-unicité en petites activités
   - Conjecture d'unicité en grandes activités : transition de phase

1. Définition du CRCM
   - CRCM en volume fini
   - CRCM en volume infini

2. Cas des rayons intégrables $\int R^d Q(dR) < \infty$
   - Existence
   - Percolation
   - Widom-Rowlinson : transition de phase

3. Cas extrême des rayons non intégrables $\int R^d Q(dR) = \infty$
   - Non-unicité en petites activités
   - Conjecture d'unicité en grandes activités : transition de phase

Définition (Espace des configurations)

- Ω : *ensemble des configurations localement finies* $\omega = \bigcup_{i \in I} (x_i, R_i)$, *avec* $x_i \in \mathbb{R}^d$ *et* $R_i \in \mathbb{R}^+$.
- $L(\omega) = \bigcup_{(x,R) \in \omega} B(x, R)$.
- *Pour* $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ *et* $\omega \in \Omega$, ω_Λ *est la configuration restreinte des boules centrées dans* Λ,
$$\omega_\Lambda = \omega \cap (\Lambda \times \mathbb{R}^+).$$

Définition (Espace des configurations)

- Ω : *ensemble des configurations localement finies* $\omega = \bigcup_{i \in I} (x_i, R_i)$, *avec* $x_i \in \mathbb{R}^d$ *et* $R_i \in \mathbb{R}^+$.
- $L(\omega) = \bigcup_{(x,R) \in \omega} B(x, R)$.
- *Pour* $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ *et* $\omega \in \Omega$, ω_Λ *est la configuration restreinte des boules centrées dans* Λ,

$$\omega_\Lambda = \omega \cap (\Lambda \times \mathbb{R}^+).$$

Définition

- $\pi^{z,Q}$ *est la loi sur* Ω *d'un processus ponctuel de Poisson de mesure d'intensité* $z\ \mathcal{L}^d(dx)\ Q(dR)$.
- *Pour* $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$, $\pi_\Lambda^{z,Q}$ *est la restriction de* $\pi^{z,Q}$ *sur* $\Lambda \times \mathbb{R}^+$.

Définition

Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ *borné.*

- *Nous définissons le Continuum Random Cluster Model de paramètres* z, Q, q *sur la fenêtre bornée* Λ *par*

$$P_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega) = \frac{q^{N_{cc}(\omega)}}{Z_\Lambda} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega).$$

Définition

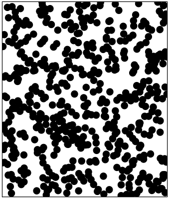
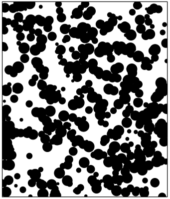
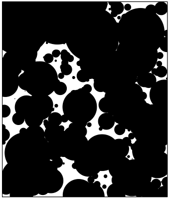
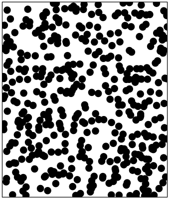
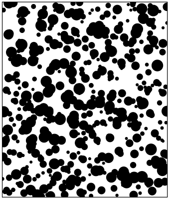
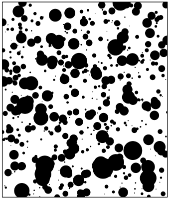
Soit $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ borné.

- *Nous définissons le Continuum Random Cluster Model de paramètres z, Q, q sur la fenêtre bornée Λ par*

$$P_\Lambda^{z,Q,q}(d\omega) = \frac{q^{N_{cc}(\omega)}}{Z_\Lambda} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega).$$

- $q > 1$: le modèle favorise un grand nombre de composantes connexes.
- $q < 1$: le modèle favorise la connexion des boules.
- Le nombre moyen de composantes connexes croît avec q.

Simulations CRCM sur fenêtre $[0, 15]^2$, $z = 2$

	Rayons constants	Rayons uniformes	Rayons exponentiels
$q = 0.5$			
$q = 2$			

Définition (CRCM(z, Q, q))

Une mesure de probabilité P sur Ω est un Continuum Random Cluster Model de paramètres z, Q, q si pour chaque Λ borné

$$P(d\omega'_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}) = \frac{q^{N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda \cup \omega_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega'_\Lambda). \quad (DLR(\Lambda))$$

Définition (CRCM(z, Q, q))

Une mesure de probabilité P sur Ω est un Continuum Random Cluster Model de paramètres z, Q, q si pour chaque Λ borné

$$P(d\omega'_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}) = \frac{q^{N^\Lambda_{cc}(\omega'_\Lambda \cup \omega_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})} \pi^{z,Q}_\Lambda(d\omega'_\Lambda). \quad (DLR(\Lambda))$$

Définition

Soit $\omega \in \Omega$ et $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^d$ borné.

- $N^\Lambda_{cc}(\omega) =$ *nombre de composantes de connexes de $L(\omega)$ ayant au moins une boule centrée dans Λ.*

Définition (CRCM(z, Q, q))

Une mesure de probabilité P sur Ω est un Continuum Random Cluster Model de paramètres z, Q, q si pour chaque Λ borné

$$P(d\omega'_\Lambda | \omega_{\Lambda^c}) = \frac{q^{N_{cc}^{\Lambda}(\omega'_\Lambda \cup \omega_{\Lambda^c})}}{Z_\Lambda(\omega_{\Lambda^c})} \pi_\Lambda^{z,Q}(d\omega'_\Lambda). \quad (DLR(\Lambda))$$

Définition

- ~~$N_{cc}^{\Lambda}(\omega) =$ nombre de composantes de connexes de $L(\omega)$ ayant au moins une boule centrée dans Λ.~~
- $N_{cc}^{\Lambda}(\omega) = \lim_{\Delta \to \mathbb{R}^d} \left(N_{cc}(\omega_\Delta) - N_{cc}(\omega_{\Delta \setminus \Lambda}) \right).$

Résultat d'existence

Théorème 1

- *Si les rayons sont bornés (Q est à support compact) alors pour chaque $q > 0$ et $z > 0$ il existe un CRCM(z, Q, q) stationnaire.*
- *Si $\int R^d Q(dR) < \infty$ alors pour chaque $q \geq 1$ et $z > 0$ il existe un CRCM(z, Q, q) stationnaire.*

Résultat d'existence

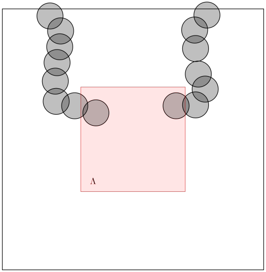
Théorème 1

- *Si les rayons sont bornés (Q est à support compact) alors pour chaque $q > 0$ et $z > 0$ il existe un CRCM(z, Q, q) stationnaire.*
- *Si $\int R^d Q(dR) < \infty$ alors pour chaque $q \geq 1$ et $z > 0$ il existe un CRCM(z, Q, q) stationnaire.*

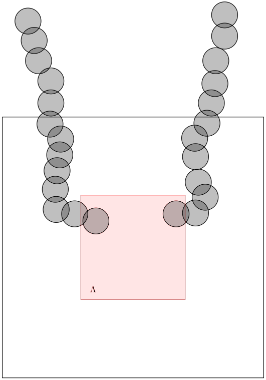
Idées de la preuve :

- Trouver un bon candidat : utilisation de l'entropie spécifique, critère de tension.
- Unicité de la composante connexe infinie : technique de Burton et Keane.
- Étude des noyaux gibbsiens pour prouver les équations DLR.

Problème : non localité de N_{cc}^{Λ}



Problem : non localité de N_{cc}^{Λ}



1. Définition du CRCM
   - CRCM en volume fini
   - CRCM en volume infini

2. Cas des rayons intégrables $\int R^d Q(dR) < \infty$
   - Existence
   - Percolation
   - Widom-Rowlinson : transition de phase

3. Cas extrême des rayons non intégrables $\int R^d Q(dR) = \infty$
   - Non-unicité en petites activités
   - Conjecture d'unicité en grandes activités : transition de phase

Percolation : existence d'au moins une composante connexe infinie.

- Question très naturelle pour le CRCM puisque l'interaction dépend directement de la connectivité.
- A été très étudiée pour pleins de modèles.
- En mécanique statistique, la percolation est liée aux questions d'unicité et de non unicité.

Proposition 1

Un CRCM stationnaire admet au plus une composante connexe infinie

Nous nous intéressons au deux cas suivant :

- C1 : $q > 1$, $\int R^d Q(dR) < \infty$ et $Q(\{0\}) = 0$.
- C2 : $q < 1$ et rayons bornés.

Théorème 2

Pour les deux cas C1 et C2, nous avons l'existence de $0 < z_1 \leq z_2 < \infty$ tels que,

- *Pour $z < z_1$, chaque $CRCM(z, Q, q)$ stationnaire ne percole pas.*
- *Pour $z > z_2$, chaque $CRCM(z, Q, q)$ stationnaire percole.*

Modèle de Widom-Rowlinson

Widom-Rowlinson : q modèles booléen qui cohabitent.

Modèle de Widom-Rowlinson

Widom-Rowlinson : q modèles booléen qui cohabitent.

Définition

- $\tilde{\omega}$ *une configuration colorée (q couleurs possibles).*
- $\tilde{\pi}^{z,Q,q}$ *un modèle booléen coloré avec q couleurs possibles.*

Modèle de Widom-Rowlinson

Widom-Rowlinson : q modèles booléen qui cohabitent.

Définition

- *$\tilde{\omega}$ une configuration colorée (q couleurs possibles).*
- *$\tilde{\pi}^{z,Q,q}$ un modèle booléen coloré avec q couleurs possibles.*

$\tilde{P}$ est un WR(z, Q, q) s'il vérifie

$$\tilde{P}(d\tilde{\omega}'_\Lambda|\tilde{\omega}_{\Lambda^c}) = \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{A}}(\tilde{\omega}'_\Lambda \cup \tilde{\omega}_{\Lambda^c})}{\tilde{Z}_\Lambda}\tilde{\pi}_\Lambda^{z,Q,q}(d\tilde{\omega}'_\Lambda),$$

où $\mathcal{A}$ est l'ensemble des configurations colorées où il n'y pas d'intersection entre boules de différentes couleurs.

FK-représentation

WR = CRCM + coloration iid uniforme des composantes connexes finies.

Théorème 3

Une mesure de probabilité colorée $\tilde{P}$, ayant au plus une composante connexe infinie, est un WR(z,Q,q) si et seulement si

- *En oubliant les couleurs, on retrouve un $CRCM(z/q, Q, q)$.*
- *Chaque composante connexe est colorée indépendamment des autres, et les composantes connexes finies sont colorées de manière uniformément parmi les q couleurs.*

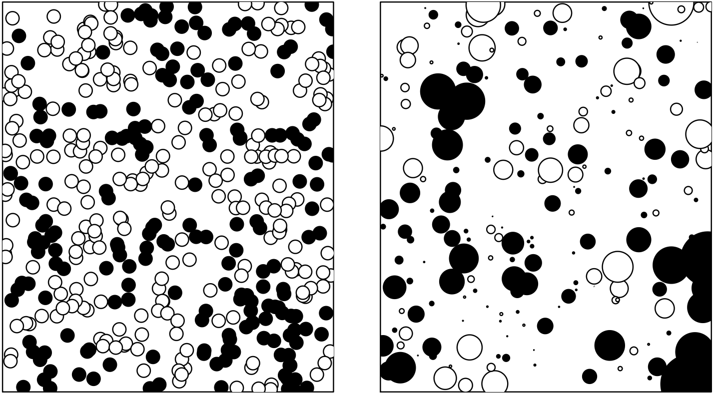


Figure: Simulation WR sur une fenêtre $[0, 15]^2$ pour $q = 2$, $z = 4$. Rayons constants à gauche, rayons exponentielles à droite.

Corollaire 1

Sous la condition (C1) du théorème de percolation, pour z assez grand, il existe plusieurs $WR(z, Q, q)$ différents.

- Ce résultat généralise celui de **Chayes, Chayes, Koteckỳ** au cas des rayons aléatoires non bornés.
- Preuve conceptuellement plus simple.

Unicité du CRCM ?

- Unicité du CRCM : travail en cours (avec C. Hofer-Temmel) pour montrer l'unicité en faibles activités.
- Non-unicité en grandes activités ?
- Estimation des paramètres ?

1. Définition du CRCM
   - CRCM en volume fini
   - CRCM en volume infini
2. Cas des rayons intégrables $\int R^d Q(dR) < \infty$
   - Existence
   - Percolation
   - Widom-Rowlinson : transition de phase
3. Cas extrême des rayons non intégrables $\int R^d Q(dR) = \infty$
   - Non-unicité en petites activités
   - Conjecture d'unicité en grandes activités : transition de phase

Lemme (Existence d'une solution triviale)

Dans le cas extrême $\int R^d Q(dR) = \infty$, $\pi^{z,Q}$ est un CRCM(z, Q, q).

Lemme (Existence d'une solution triviale)

Dans le cas extrême $\int R^d Q(dR) = \infty$, $\pi^{z,Q}$ est un CRCM(z, Q, q).

- Cette solution triviale n'est pas très intéressante.
- Existe-t-il une autre solution ?

Théorème 4

Si $\int R^d Q(dR) = +\infty$*, alors pour chaque entier* $q > 1$ *et pour* z *assez petit, il existe un CRCM*(z, Q, q) *différent de* $\pi^{z,Q}$.

Théorème 4

Si $\int R^d Q(dR) = +\infty$, alors pour chaque entier $q > 1$ et pour z assez petit, il existe un CRCM(z, Q, q) différent de $\pi^{z,Q}$.

Idées de la preuve

- FK-représentation : Transfert du problème vers WR.
- Entropie spécifique : existence d'un point d'accumulation d'une suite construite à partir des mesures en volume fini.
- Montrer qu'avec probabilité positive notre candidat est polychromatique.

Conjecture

Si $\int R^d Q(dR) = \infty$, alors pour chaque entier $q > 1$ et pour z assez grand, $\pi^{z,Q}$ est l'unique CRCM(z, Q, q).

Conjecture

Si $\int R^d Q(dR) = \infty$, alors pour chaque entier $q > 1$ et pour z assez grand, $\pi^{z,Q}$ est l'unique CRCM(z, Q, q).

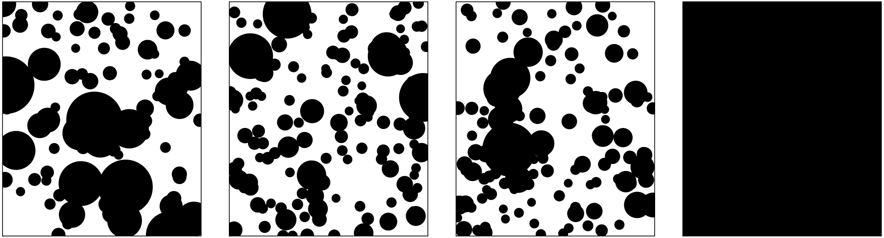


Figure: Simulations du CRCM sur une fenêtre $[0, 50]^2$ pour des rayons de loi uniforme inverse et pour $z = 0.05$, $z = 0.06$, $z = 0.065$, $z = 0.066$.

Pour le moment nous avons une version faible de la conjecture démontrée en dimension $d = 1$.

Proposition 2

Si Q vérifie

- $\int_1^\infty \exp\Big(- \int_1^u Q(]R, +\infty[) dR \Big) < \infty$
- $Q(\{0\}) = 0$,

alors pour z assez grand, la suite $\bar{P}_n$ construite à partir du CRCM en volume fini converge vers $\pi^{z,Q}$.

- Grâce à l'entropie spécifique, on se ramène à montrer que

$$\int q^{N_{cc}(\omega_{[0,n]})} \pi^{z,Q}(d\omega)$$

est majoré par une constante finie indépendante de n.

- On fait apparaître du renouvellement.

Publications

- **Dereudre, Houdebert** : Infinite Volume Continuum Random Cluster Model - EJP - 2015.
- **Houdebert** : Percolation results for the Continuum Random Cluster Model - soumis.

Publications

- **Dereudre, Houdebert** : Infinite Volume Continuum Random Cluster Model - EJP - 2015.
- **Houdebert** : Percolation results for the Continuum Random Cluster Model - soumis.

Merci pour votre attention