Université Aix-Marseille
Faculté des sciences
Licence de physique et licence de chimie
Semestre 2

UE Mathématiques 2
TD1
Fonctions réelles de deux variables réelles

1 Dérivées partielles

Exercice 1. *On considère les fonctions f_i définies par*

$$f_1(x,y) = x, \quad f_2(x,y) = y, \quad f_3(x,y) = x + y,$$
$$f_4(x,y) = xy, \quad f_5(x,y) = \frac{x}{y}, \quad f_6(x,y) = x^y,$$
$$f_7(x,y) = x^2 + y^2, \quad f_8(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$f_9(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

1. *Pour chaque fonction, déterminer l'ensemble de définition.*
2. *Pour chaque fonction, déterminer sur quel ensemble elles admettent des dérivées partielles.*
3. *Pour chaque fonction, calculer les dérivées partielles.*
4. *On dit qu'une fonction réelle de deux variables réelles est symétrique lorsque pour tout $(x,y) \in D_f$*

$$f(x,y) = f(y,x).$$

   (a) *Parmi les fonctions ci-dessus, quelles sont les fonctions symétriques ?*

   (b) *Si f est symétrique alors quelle relation existet-il entre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$?*

Exercice 2. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x}).$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f. On le notera D_f.*

2. *Démontrer que pour tout* $(x, y) \in D_f$

$$x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1.$$

3. *Déterminer* $\overrightarrow{grad}(f)$.

Exercice 3. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x,y) = \arctan(\frac{x^2+y^2}{x-y}).$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f. On donnera une interprétation géométrique de cet ensemble.*
2. *Déterminer les dérivées partielles de f.*
3. *Démontrer que les dérivées partielles de f sont continues sur l'ensemble de définition de f.*
4. *Déterminer* $\overrightarrow{grad}(f)$.

2 Dérivation des fonctions composées

Exercice 4. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x,y) = 4x + \sin(y) + \ln(1+x).$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *On fait dépendre x et y de la variable t en posant*

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 \\ y(t) &= t^3 \end{cases}$$

Soit la fonction g définie par

$$g(t) = f[x(t), y(t)].$$

Calculer la dérivée de g de deux façons différentes.

Exercice 5. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x,y) = x + \cos(3y) + \ln(1+2x).$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*

2. *On fait dépendre x et y de la variable t en posant*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & t^2 \\ y(t) & = & 3t \end{array}\right.$$

Soit la fonction g définie par

$$g(t) = f[x(t), y(t)].$$

Calculer la dérivée de g de deux façons différentes.

Exercice 6. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy.$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *On fait dépendre x et y des variables r et θ en posant*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(r,\theta) & = & r\cos(\theta) \\ y(r,\theta) & = & r\sin(\theta) \end{array}\right.$$

Soit la fonction g définie par

$$g(r, \theta) = f[x(r, \theta), y(r, \theta)].$$

Calculer les dérivées partielles de g de deux façons différentes.

Exercice 7. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x, y) = \exp(xy) + \cos(x + y).$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *On fait dépendre x et y des variables u et v en posant*

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(u,v) & = & 2u + 3v \\ y(u,v) & = & -u + 5v \end{array}\right.$$

Soit la fonction g définie par

$$g(u, v) = f[x(u, v), y(u, v)].$$

Calculer les dérivées partielles de g de deux façons différentes.

3 Différentiabilité

Exercice 8. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x,y) = x^3 - 3x^2y - 2y^3.$$

1. *Démontrer que f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Démontrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3f(x,y).$$

Exercice 9. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}.$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f. On admettra que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Etudier la différentiabilité de f.*
3. *Donner l'expression de la différentielle en (x,y) puis en $(1,1)$.*
4. *Donner une valeur approchée de f au voisinage d'un point (x_0,y_0) de l'ensemble de définition.*

Exercice 10. *On considère la fonction f définie par*

$$f(x,y) = (x^2 + 4y^3)^5.$$

1. *Déterminer l'ensemble de définition de f.*
2. *Etudier la différentiabilité de f.*
3. *Donner l'expression de la différentielle en (x,y) puis en $(1,1)$.*
4. *Donner une valeur approchée de f au voisinage d'un point (x_0,y_0) de l'ensemble de définition.*

4 Valeurs approchées

Exercice 11. *Calculer une valeur approchée de*

$$\sqrt{4,05^2 + 2,93^2}.$$

Exercice 12. *On considère une boîte à base carrée de côté $8,005$ cm et de hauteur $10,006$ cm. Calculer une valeur approchée du volume de cette boîte.*