Université Aix-Marseille
Faculté des sciences
Licence de physique et licence de chimie
Semestre 2

UE Mathématiques 2
TD2
Vecteurs de $\mathbb{R}^3$

On se place dans un repère orthonormé direct de $\mathbb{R}^3$. L'unité de longueur est le cm.

1 Produit scalaire et produit vectoriel

Exercice 1. *Soient $\vec{u}(1, 2, -3)$ et $\vec{v}(2, 1, 5)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.*

1. *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?*
2. *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?*
3. *Calculer $\cos(\vec{u}, \vec{v})$.*
4. *Déterminer une mesure en radians de l'angle non orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.*
5. *Calculer l'aire du parallélogramme construit avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Exercice 2. *On considère le triangle ABC avec $A(2, -1, 1)$, $B(1, -3, -5)$ et $C(3, -4, -4)$.*

1. *Déterminer les longueurs des côtés du triangle ABC.*
2. *Déterminer le cosinus des angles du triangle ABC.*
3. *Déterminer une mesure en radians des angles du triangle ABC.*

Exercice 3. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ pour les vecteurs suivants.*

1. *$\vec{u}(1, -1, 1)$ et $\vec{v}(-2, 3, 1)$.*
2. *$\vec{u}(-1, 1, 2)$ et $\vec{v}(1, 0, -1)$.*
3. *$\vec{u}(\cos(\alpha), sin(\alpha), 1)$ et $\vec{v}(\cos(\beta), sin(\beta), 1)$ où α et β désignent deux réels.*

Exercice 4. *Soient a, b, c et d quatre nombres réels. On considère les vecteurs $\vec{u}(a, b)$ et $\vec{v}(c, d)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Etablir une condition nécessaire et suffisante pour que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.*

Exercice 5. *Soient* $A(1,0)$*,* $B(2,3)$*,* $C(6,3)$ *et* $D(5,0)$ *4 points du plan.*

1. *Démontrer que* $ABCD$ *est un parallélogramme.*
2. *Calculer son aire.*

Exercice 6. *Soient* $\vec{u}(2,0,4)$*,* $\vec{v}(1,3,1)$ *et* $\vec{w}(2,-1,1)$*. Calculer le volume du parallélépipède construit sur ces 3 vecteurs.*

Exercice 7. *Soient* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^3$*. Démontrer par deux méthodes différentes que*

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|^2 + (\vec{u}.\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

2 Plans et droites dans l'espace

Exercice 8. *On considère le point* $A(1,-2,4)$ *et les vecteurs* $\vec{u}(0,2,-1)$ *et* $\vec{v}(1,3,1)$.

1. *Un plan dans l'espace possède-t-il plusieurs types d'équations ?*
2. *Le plan passant par* A *et dirigé par les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *est-il bien défini ?*
3. *Déterminer une représentation paramétrique du plan qui passe par* A *et qui est dirigé par les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$.
4. *Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par* A *et qui est dirigé par les vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *par deux méthodes différentes.*

Exercice 9. *On considère les points* $A(1,0,0), B(0,1,0)$ *et* $C(0,0,1)$.

1. *Le plan passant par* A, B *et* C *est-il bien défini ?*
2. *Déterminer une représentation paramétrique du plan qui passe par* A, B *et* C.
3. *Déterminer une équation cartésienne du plan qui passe par* A, B *et* C *par deux méthodes différentes.*

Exercice 10. *Déterminer une représentation paramétrique du plan qui a pour équation cartésienne* $2x+y+z-2=0$.

Exercice 11. *On considère les points* $A(-1,2,3)$ *et* $B(0,1,-2)$ *et le vecteur* $\vec{u}(1,2,1)$.

1. *Une droite dans l'espace possède-t-elle plusieurs types d'équations ?*
2. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite qui passe par* A *et qui est dirigée par le vecteur* $\vec{u}$.
3. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite qui passe par les points* A *et* B.

Exercice 12. *Déterminer un système de deux équations vérifiées par la droite qui passe par le point* $A(1,0,1)$ *et qui est dirigée par le vecteur* $\vec{u}(2,-1,1)$.

Exercice 13. *Déterminer une représentation paramétrique de la droite définie par le système d'équations*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-4z & = & 0 \\ x+3y-7z-1 & = & 0. \end{array}\right.$$

Exercice 14. *Soient* $(D_1), (D_2)$ *et* (D_3) *trois droites qui sont définies par les systèmes d'équations respectifs*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 2 \\ x-y+z & = & 0. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 3 \\ x+z & = & 1. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y+z & = & 3 \\ x-2y & = & 1. \end{array}\right.$$

1. *Démontrer que* (D_1) *et* (D_2) *sont parallèles et non confondues.*
2. *Démontrer que* (D_2) *et* (D_3) *ne se coupent pas.*
3. *Démontrer que* (D_1) *et* (D_3) *sont sécantes en un point et calculer les coordonnées de ce point.*

Exercice 15. *Soit* (P) *le plan d'équation* $2x-y+z-3=0$ *et soit* (D) *une droite dirigée par* $\vec{u}(1,3,1)$.

1. *La droite* (D) *est-elle parallèle à* (P) *?*
2. *La droite* (D) *est-elle orthogonale à* (P) *?*
3. *Une droite dirigée par le vecteur* $\vec{v}(-2,1,-1)$ *est-elle orthogonale à* (P) *?*
4. *Démontrer que la droite passant par le point* $A(1,0,1)$ *et dirigée par le vecteur* $\vec{w}(0,1,1)$ *est contenue dans* (P).
5. *Le plan* (P) *contient-il une droite du plan* (xOy) *?*

Exercice 16. *On considère le plan* (P) *défini par le point* $A(1,1,0)$ *et les vecteurs* $\vec{u}(1,0,1)$ *et* $\vec{v}(0,1,1)$.

1. *Le plan* (P) *passe-t-il par l'origine ?*
2. *Soit* (D) *la droite passant par l'origine et orthogonale à* (P). *Déterminer un vecteur directeur de* (D).