UE Mathématiques 2

TD3 - exercices supplémentaires

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^2$, donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.

1. Droite passant pas les points $A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

2. Droite passant par le point $C\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.

3. Droite passant par le point $P\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et orthogonale à la droite d'équation $3x+4y+5=0$.

Exercice 2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, trouver les points d'intersection des droites d_1 et d_2 décrites par les équations suivantes :

1. $d_1 : 2x+5y+1=0$ et $d_2 : x-2y-4=0$,

2. $d_1 : \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : 3x-2y-4=0$,

3. $d_1 : \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$ et $d_2 : \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Dans $\mathbb{R}^3$, donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacune des droites suivantes.

1. Droite passant par les points $A\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}$.

2. Droite passant par le point $C\begin{pmatrix}-3\\5\\2\end{pmatrix}$ et de vecteur directeur $u = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$.

3. Droite étant l'intersection des plans $P_1 : 6x+2y-z-9=0$ et $P_2 : 3x+2y+2z-12=0$.

4. Droite passant par le point $Q\begin{pmatrix}0\\-2\\3\end{pmatrix}$ et orthogonale au plan $P : 3x-y+2z-6=0$.

Exercice 4.

1. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation cartésienne $x+y+2z+1=0$. Donner une équation paramétrique de $\mathcal{P}$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+t+s \\ y = t-s \\ z = -1+2t-s \end{cases}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Donner une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

Exercice 5. Donner une équation paramétrique et une équation cartésienne pour chacun des plans de $\mathbb{R}^3$ suivants.

1. Plan passant par le point $A\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et orthogonal au vecteur $n = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

2. Plan passant par le point $B\begin{pmatrix}3\\-2\\5\end{pmatrix}$ et parallèle au plan d'équation $x=0$.

3. Plan passant par l'origine et engendré par les vecteurs $u = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

4. Plan passant par les points $P\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$, $Q\begin{pmatrix}-1\\4\\5\end{pmatrix}$ et $R\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver les points d'intersection des plans p_1 et p_2 donnés par les équations suivantes.

1. $p_1 : \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p_2 : x + y + 5z - 2 = 0$.

2. $p_1 : \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $p_2 : \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}$, $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Pour les triplets de points de $\mathbb{R}^3$ suivants, déterminer s'ils sont alignés ou pas. En cas affirmatif, donner une équation cartésienne de la droite qui les contient et, en cas négatif, une équation paramétrique du plan qui les contient.

1. $A\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}5\\4\\-2\end{pmatrix}$.

2. $A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}0\\0\\-2\end{pmatrix}$.

3. $A\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}3\\-3\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 8. Soit $\mathcal{D}$ la droite dans l'espace, définie par l'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + \frac{t\sqrt{6}}{6} \\ y = \frac{t\sqrt{6}}{6} \\ z = \frac{2t\sqrt{6}}{6} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Soit Δ la droite intersection des deux plans d'équations cartésiennes :

$$x + y + z - 1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x - y - 2 = 0.$$

Calculer le cosinus de l'angle aigu entre ces deux droites.

Exercice 9.

1. Calculer la distance entre le point $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et la droite $l : \begin{pmatrix}2\\3\\5\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Calculer la distance entre le point $B\begin{pmatrix}10\\3\\1\end{pmatrix}$ et le plan $p : \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $s, t \in \mathbb{R}$.

3. Calculer la distance entre les plans parallèles d'équations $2x - y + 3z = 0$ et $-4x + 2y - 6z + 8 = 0$.