UE Mathématiques 2

TD4 - Espaces vectoriels

1 Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. *Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ définis ci-dessous sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$?*

$$\begin{array}{rclrcl} E_1 & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_2=0\}, & E_2 & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_1=x_2+x_3\}, \\ E_3 & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_2\geqslant 0\}, & E_4 & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_3x_4=0\}, \\ E_5 & = & \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : x_2=x_1^2\}. & & & \end{array}$$

2 Familles libres, familles génératrices et bases

Exercice 2. *On considère trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :*

$$\vec{u}(1,2,-1) \quad \vec{v}(1,0,1) \quad \vec{w}(-1,2,-3).$$

1. *Déterminer si la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est libre ou liée. Dans le cas où la famille est liée, déterminer une relation liant les 3 vecteurs.*
2. *Même question avec les vecteurs $\vec{u}(-1,2,5)$, $\vec{v}(2,3,4)$, $\vec{w}(7,0,-7)$.*

Exercice 3. *Est-ce que les vecteurs suivants forment une famille libre dans l'espace $\mathbb{R}^n$ correspondant?*
1. $(2,1),(6,3)$; 2. $(7,11),(11,7)$; 3. $(1,1),(3,-5),(-6,5)$;
4. $(1,0,0),(1,2,0),(1,2,3)$; 5. $(1,1,1),(3,2,1),(6,5,4)$; 6. $(1,1,1),(1,2,3),(1,3,6)$;
7. $(1,1,1,1),(1,2,3,4),(1,4,7,10)$; 8. $(1,2,1,2,1),(2,1,2,1,2),(1,0,1,1,0),(0,1,0,0,1)$.

Exercice 4. *On considère trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants :*

$$\vec{u}(2,1), \quad \vec{v}(-1,2), \quad \vec{w}(1,3).$$

1. *Démontrer que ces trois vecteurs forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.*
2. *Soit $X(x_1,x_2)$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$.*
   (a) *Exprimer X comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$.*
   (b) *Cette décomposition suivant $\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{w}$ est-elle unique?*

Exercice 5. *Dans les deux cas suivants, les vecteurs forment-ils une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$?*

$$1. \quad \vec{u}(1,-1,2), \quad \vec{v}(3,1,1), \quad \vec{w}(-3,-5,4).$$

$$2. \quad \vec{u}(0,1,3), \quad \vec{v}(-1,1,0), \quad \vec{w}(2,0,1), \quad \vec{t}(4,5,6).$$

Exercice 6. *On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :*

$$\vec{u}(1,0,1), \quad \vec{v}(-1,-1,0), \quad \vec{w}(-1,1,1).$$

1. *Démontrer que la famille $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.*
2. *Exprimer les coordonnées du vecteur $(2,2,3)$ dans cette base.*

Exercice 7. *Considérons la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivante*

$$v_1=(1,-1,0,2), \quad v_2=(1,0,1,2), \quad v_3=(1,3,5,7), \quad v_4=(0,2,3,\alpha),$$

où $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. Pour quelles valeurs de α la famille forme une base de $\mathbb{R}^4$?

2. Dans le cas où la famille est liée, déterminer toutes les relations linéaires liant ces vecteurs. Quelle est la dimension de l'espace engendré ?

3. Soit $v=(-2,k,1,3)$. Pour quelles valeurs de k a-t-on $v\in Vect\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$? Dans ce cas, déterminer les composantes du vecteur v dans une base de $Vect\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$.

3 Dimension, sommes de sous-espaces

Exercice 8. *Quel est le rang des familles de vecteurs suivantes ? Sont-elles libres ? Donner une base du sous-espace engendré.*

1. $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$, $v_3 = (0,1,1)$.
2. $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (1,1,0,0)$, $v_3 = (0,1,1,0)$, $v_4 = (0,0,1,1)$.
3. $v_1 = (1,1,0,1)$, $v_2 = (-1,1,1,0)$, $v_3 = (0,-1,1,1)$, $v_4 = (1,1,1,0)$.
4. $v_1 = (1,-1,0,1)$, $v_2 = (1,1,-1,1)$, $v_3 = (0,1,1,1)$, $v_4 = (1,0,1,0)$.
5. $v_1 = (1,0,0,2,5)$, $v_2 = (0,1,0,3,4)$, $v_3 = (0,0,1,4,7)$, $v_4 = (2,-3,4,11,12)$.

Exercice 9. *Montrer que $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = z\}$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera une base. Même question avec $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z \text{ et } x = 0\}$. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = A \oplus B$.*

Exercice 10. *On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivants :*

$$\vec{u_1}(1,0,4,2), \quad \vec{u_2}(1,2,3,1), \quad \vec{u_3}(1,-2,5,3), \quad \vec{v_1}(4,2,0,1), \quad \vec{v_2}(1,4,2,1).$$

Soient $U = Vect(\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3})$ et $V = Vect(\vec{v_1}, \vec{v_2})$.

1. *Déterminer une base de chacun des espaces U et V.*
2. *En déduire leurs dimensions.*
3. *Démontrer que $\mathbb{R}^4 = U \oplus V$.*