UE Mathématiques 2

# TD - Calcul matriciel

## 1 Opérations arithmétiques

**Exercice 1.** *On considère les matrices carrées d'ordre* 2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* $A+B$, $3A$, $-2B$ *et* $-A+2B$.
2. *Même question pour les matrices* $2 \times 3$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** *On considère les matrices carrées d'ordre* 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Calculer* $AB$, $BA$, $A^2$ *et* $B^3$.

**Exercice 3.** *Effectuer les produits matriciels suivants*

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4.** *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Etudier tous les produits matriciels à deux matrices, entre les matrices* $A$, $B$ *et* $C$. *Dire s'ils sont possibles. Dans le cas où les produits sont possibles, on les calculera.*

**Exercice 5.** ⋆ *Considérons les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 5 \end{pmatrix}.$$

*Des 25 possibilits AA, AB, AC, ..., ED, EE hypothtiques, déterminez et calculez les produits qui sont définis.*

**Exercice 6.** ⋆ *Trouver et démontrer par récurrence les formules explicites pour les puissances* $A^m$, $m \geq 1$, *où*

$$i)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

## 2 Equations matricielles

**Exercice 7.** $\star$ *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Trouver toutes les matrices $X$ telles que $3(A+X) + 5(3X+B) = A - B$.*

**Exercice 8.** $\star$ *Résoudre les équations matricielles suivantes.*

$$i)\ X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad ii)\ X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad iii)\ \begin{pmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$iv)\ X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X, \quad v)\ X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad vi)\ X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad vii)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X = I_2.$$

**Exercice 9.** *Trouver toutes les matrices qui commutent avec*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 10.** *On considère les matrices carrées d'ordre 2*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer $AB$ et $BA$.*
2. *Déterminer les matrices carrées $X$ d'ordre 2 telles que $AX = 0$.*
3. *Déterminer les matrices carrées $Y$ d'ordre 2 telles que $YA = 0$.*
4. *Déterminer les matrices carrées $Z$ d'ordre 2 telles que $AZ = ZA = 0$.*

## 3 Matrices inversibles

**Exercice 11.** *Soient $a, b, c$ et $m$ des nombres réels. On considère la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m & -2 \\ 1 & m+1 & m-2 \\ 2 & 2m+1 & 2m-4 \end{pmatrix}.$$

1. *Résoudre suivant $m$, le système matriciel, d'inconnue $X$*

   $$AX = Y$$

   *avec*

   $$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

2. *Déduire de la question 1, pour quelles valeurs de $m$, la matrice $A$ est inversible.*
3. *Lorsque la matrice $A$ est inversible, déduire de la question 1, son inverse.*

**Exercice 12.** $\star$ *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Calculer $A^2$ et montrer que $A^2 = 2I_2 - A$. En déduire que $A$ est inversible et trouver $A^{-1}$.*

**Exercice 13.** $\star$ *Soit*

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Vérifier que $B^3 - B - 4I_3 = 0$. En déduire que $B$ est inversible et trouver $B^{-1}$.*

## 4 Déterminant et calcul de l'inverse

**Exercice 14.** *Les matrices carrées suivantes sont-elles inversibles? Si oui, calculer leur inverse.*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 15.** *Lequelles des matrices suivantes sont inversibles ? Calculer leurs inverses.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 \\ -9 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 16.** *Soient $x_1$, $x_2$ et $x_3$ trois réels. Calculer le déterminant de la matrice*

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix}.$$

## 5 ⋆ Echelonnement d'une matrice

**Exercice 17.** ⋆ *Échelonner les matrices suivantes.*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -6 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$